

外场驱动对 Tavis-Cummings 模型中 量子态保真度的影响*

王忠纯

(盐城师范学院物理系, 盐城 224002)

(2005 年 11 月 12 日收到, 2006 年 1 月 13 日收到修改稿)

求出了原子受到外部经典场驱动时, 双原子 T-C 模型中量子态的保真度. 通过数值分析, 研究了外场以及特定初态下原子间偶极-偶极相互作用对量子态保真度的影响.

关键词: 量子态保真度, Tavis-Cummings 模型, 经典外场

PACC: 4250

1. 引 言

Tavis-Cummings (T-C) 模型^[1]是描述多个二能级原子与单模光场相互作用的模型. 在此基础上人们进一步对原子间的相互作用、非线性介质的影响等进行了研究, 发现了原子和腔场的许多非经典性质^[2-10]. 为了获得用实验来探测 T-C 模型的方法, 我们曾研究过用外部激光来驱动 T-C 模型中的原子, 求出了经典外场驱动下 T-C 模型的能量本征值和波函数^[11], 分析了外场对 T-C 模型中原子和光场性质的影响^[12].

量子态保真度是量子信息中常用的重要概念, 它表示信息在传输过程中保持原来状态的程度, 近年来广泛应用于量子通信、量子计算机和量子密码中^[5, 13]. 刘堂昆等人对 J-C 模型和 T-C 模型中量子态的保真度有较多的研究, 分析过原子间的偶极相互作用和原子的运动等对量子态保真度的影响^[5, 14]. 但对于外场驱动对 T-C 模型中量子态的保真度的影响尚未见报道.

本文推导出外场驱动下双原子 T-C 模型(DT-C 模型)中量子态的保真度, 通过数值分析研究外场以及特定初态下原子间偶极-偶极相互作用对量子态保真度的影响.

2. DT-C 模型及态矢量

设两个全同的二能级原子位于单模腔场中, 并

且原子间偶极-偶极相互作用不能忽略^[2], 同时原子又受到一个外部的经典相干场的驱动, 构成 DT-C 模型. 在偶极近似和旋波近似下 Schrödinger 绘景中该系统的哈密顿为^[11](取 $\hbar = 1$)

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \omega_0 (\sigma_{z1} + \sigma_{z2}) + V + g_e \sum_{i=1}^2 (\sigma_i^+ \epsilon e^{-i\omega_L t} + \sigma_i^- \epsilon^* e^{i\omega_L t}), \quad (1)$$

$$V = g \sum_{i=1}^2 (a^\dagger \sigma_i^- + \sigma_i^+ a) + \lambda (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) \quad (2)$$

为原子与腔场的相互作用及原子间的偶极-偶极相互作用, (1) 式中最后一项为原子与经典外场的相互作用; a^\dagger, a 是频率为 ω 的腔场的光子产生算符和湮没算符; $\sigma_{zi}, \sigma_i^+, \sigma_i^-$ 是本征频率为 ω_0 的第 i 个原子的自旋算符; g, g_e 分别为原子与腔场和原子与外场间的耦合常量; λ 为原子间偶极相互作用常量; 外场的频率为 ω_L 、幅度为 ϵ . 本文研究完全共振的情况, 取 $\omega_L = \omega_0 = \omega$, 且取 g, g_e 和 λ 均为实数.

不难求出相互作用绘景中系统在 t 时刻的态矢^[12]

$$|\Phi_s(t)\rangle = D^\dagger(\beta) U(t) D(\beta) |\Phi_s(0)\rangle, \quad (3)$$

其中 $U(t) = e^{-iHt}$ 为相互作用绘景中一般 T-C 模型的时间演化算符, $D(\beta) = \exp(\beta a^\dagger - \beta^* a)$ 为平移算符^[15], $\beta = \epsilon g_e / g$. 考虑到两个原子是全同的, 可用三个对两原子具有交换对称的波函数构成原子子空间的基矢,

$$|u_1\rangle = |e_1, e_2\rangle,$$

* 江苏省高校自然科学研究项目(批准号: 05KJD140247)和盐城师范学院教授科研基金资助的课题.

$$\begin{aligned} |u_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1, e_2\rangle + |e_1, g_2\rangle), \\ |u_3\rangle &= |g_1, g_2\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $|e_i\rangle, |g_i\rangle$ ($i=1, 2$) 为第 i 个二能级裸原子的激发态和基态.

设初始时两原子均处于激发态 $|u_1\rangle = |e_1, e_2\rangle$, 而光场处于相干态 $|\alpha\rangle$, 即 $|\Phi_s(0)\rangle = |u_1\rangle \otimes |\alpha\rangle$. 由 (3) 式可得^[12]

$$\begin{aligned} |\Phi_s(t)\rangle &= \exp[-(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta)/2] D^+(\beta) \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 F_m(\alpha + \beta) D_j^m |u_j\rangle \\ &\times |m + j - 1\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$F_m(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D_1^m &= \frac{m+2}{2m+3} - \frac{m+1}{\chi(2m+3)\delta_m} \\ &\times (E_3^m e^{-iE_2^m t} - E_2^m e^{-iE_3^m t}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$D_2^m = \frac{\sqrt{m+1}g}{\sqrt{2}\delta_m} (e^{-iE_2^m t} - e^{-iE_3^m t}), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} D_3^m &= -\frac{\sqrt{m^2+3m+2}}{2m+3} \left[1 + \frac{1}{2\delta_m} \right. \\ &\times (E_3^m e^{-iE_2^m t} - E_2^m e^{-iE_3^m t}) \left. \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$E_{2,3}^m = \frac{\lambda}{2} \pm \delta_m,$$

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + \chi(2m+3)g^2} \\ &(m=0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

t 时刻系统的密度算符、光场和原子的约化密度算符分别为

$$\rho_s(t) = |\Phi_s(t)\rangle \langle \Phi_s(t)|, \quad (11)$$

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_a \rho_s(t), \quad (12)$$

$$\rho_a(t) = \text{Tr}_f \rho_s(t), \quad (13)$$

(12)(13) 两式中分别对原子和光场求迹.

3. DT-C 模型的量子态保真度

量子态保真度表示信息在传输过程中不失真的程度, 其定义为^[16]

$$F(\rho_1, \rho_2) = [\text{Tr}(\sqrt{\rho_1 \rho_2 \rho_1})^{1/2}]^2, \quad (14)$$

式中 ρ_1 和 ρ_2 分别为初态和末态的密度算符. $0 \leq F \leq 1$. $F=1$ 时表示初态与末态完全相同, 没有失真; $F=0$ 时表示初态与末态正交, 完全失真.

由于系统的初态和末态均为纯态, 不难证明系统的量子态保真度可写成

$$\begin{aligned} F_s(t) &= |\langle \Phi_s(0) | \Phi_s(t) \rangle|^2 \\ &= \left| \sum_{m=0}^{\infty} |F_m(\alpha + \beta)|^2 D_1^m \right|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

光场的初态为纯态 $|\alpha\rangle$, 其量子态保真度可写成

$$\begin{aligned} F_f(t) &= \langle \alpha | \rho_f(t) | \alpha \rangle \\ &= \sum_{j=1}^3 |\langle \alpha | u_j \rangle \langle \Phi_s(t) |^2 \\ &= \sum_{j=1}^3 \left| \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\alpha + \beta) F_{m+j-1}^*(\alpha + \beta) D_j^m \right|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (13) 和 (5) 式可得

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} n |\rho_s(t) | n \rangle \langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |A_n\rangle \langle A_n|, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} |A_n\rangle &= |n\rangle \langle D^+(\beta) | \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^3 F_m(\alpha + \beta) \\ &\times D_j^m |u_j\rangle |m + j - 1\rangle. \end{aligned} \quad (18)$$

注意到^[11]

$$\begin{aligned} \langle D(\alpha) | n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} (-\alpha^*)^{n-m} \\ &\times \sqrt{m!} S_m^{n-m}(|\alpha|^2) |m\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$S_m^n(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{1}{k!(m-k)!(n+k)!} x^k \quad (20)$$

为 Sonine 多项式^[17]. 则

$$\begin{aligned} |A_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-|\beta|^2/2} \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^{\infty} (-\beta)^{n-m} \sqrt{m!} S_m^{n-m}(|\beta|^2) \\ &\times F_{m-j+1}(\alpha + \beta) D_j^{m-j+1} |u_j\rangle. \end{aligned}$$

原子量子态的保真度为

$$\begin{aligned} F_a(t) &= \langle u_1 | \rho_a(t) | u_1 \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_1 | A_n \rangle|^2 \\ &= e^{-|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \sum_{m=0}^{\infty} (-\beta)^{n-m} \sqrt{m!} \right. \\ &\quad \times S_m^{n-m}(|\beta|^2) F_m(\alpha + \beta) D_1^m \left. \right|^2. \end{aligned} \quad (21)$$

在 (15)(16) 和 (21) 式中, 取 $\beta=0$, 则得无驱动时一般 T-C 模型的量子态保真度

$$F_s(t) = \left| \sum_{m=0}^{\infty} |F_m(\alpha)|^2 D_1^m \right|^2, \quad (22)$$

$$F_c(t) = \sum_{j=1}^3 \left| \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\alpha) F_{m+j-1}^*(\alpha) D_j^m \right|^2, \quad (23)$$

$$F_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |F_m(\alpha) D_1^n|^2. \quad (24)$$

将(15),(16)式分别与(22),(23)式对比可见,对系统和光场的量子态保真度而言,外部驱动场的作用等效于增加了光场初态时的光子数,即光场初态的光子数由原来的 $|\alpha|^2$ 等效成 $|\alpha + \beta|^2$.

4. 数值分析

4.1. 原子间有偶极-偶极相互作用时保真度与外部驱动场的关系

两原子初始时均处于激发态、光场初态为相干态,原子间有偶极-偶极相互作用($\lambda/g = 0.2$)时,DT-C模型的系统、光场和原子的量子态保真度的时间演化分别如图1至图3所示.图1给出了系统量子态保真度的时间演化与驱动场强和光场初态的关系,图1(a)-(d)分别对应于 $\alpha + \beta = 1, 1.5, 2, 4$.图形表明,系统量子态的保真度随时间的演化为振荡曲线.随着外场驱动的增加或光场初态光子数的增

加,保真度的振荡频率增大,振幅减小.当 $\alpha + \beta$ 较大时系统量子态的保真度出现显著的崩塌-回复现象(见图1(c)(d)). $\alpha + \beta$ 愈大,回复所需的时间愈长,保真度保持不变的时间也就愈长(见图1(d)).从总体上看,系统的保真度随 $\alpha + \beta$ 的增大而下降.从开始经过半个振荡周期,系统的保真度最小,此最小值随着驱动场的加强或光场初态光子数的增加而减小,当 $\alpha + \beta = 4$ 时已接近完全失真.

光场量子态保真度的时间演化与驱动场强和光场初态的关系如图2所示.当 $\alpha + \beta$ 很小时,保真度还呈现较有规律的周期性振荡(见图2(a)).随着驱动场的加强或光场初态光子数的增加,保真度的峰值显著下降,振荡幅度减小,振荡的规律性变差.当 $\alpha + \beta$ 较大时,保真度在开始短时间内急剧下降到0.5左右,在经过较长的时间保持不变后,才出现一个有微小锯齿的小波峰(见图2(d)).进一步数值计算表明,当 $\alpha + \beta > 4$ 后继续增大驱动场时,此小波峰向右移动,保真度不变的时间加长,但保真度持续不变时的值近似保持为0.5不变.相对系统和原子而言,从总体上看光场量子态保真度比原子和系统的量子态保真度高,演化过程中不会出现完全失真.

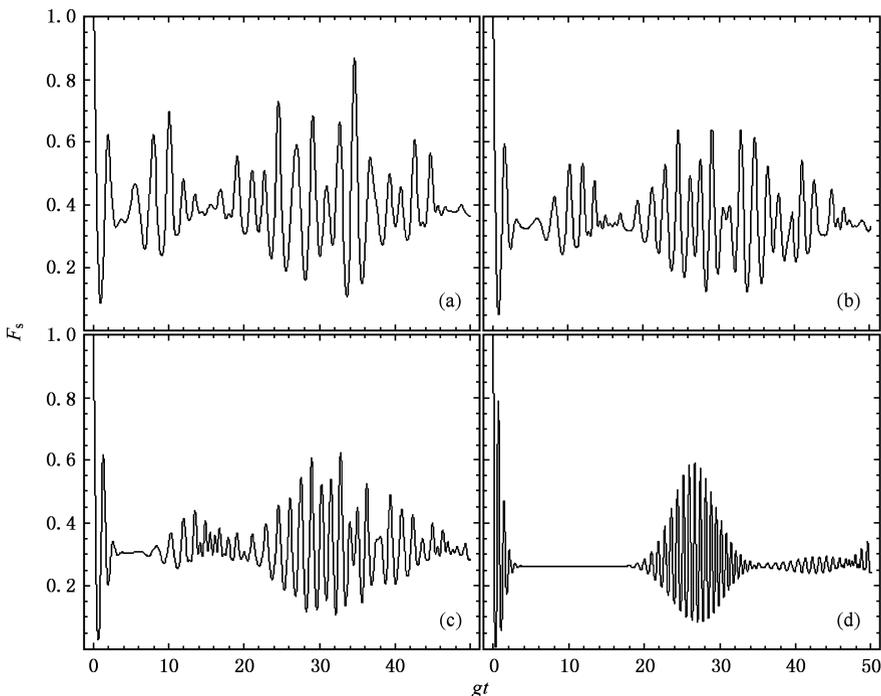


图1 系统量子态保真度的时间演化与驱动场强和光场初态的关系($\lambda/g = 0.2$) (a) $\alpha + \beta = 1$ (b) $\alpha + \beta = 1.5$ (c) $\alpha + \beta = 2$ (d) $\alpha + \beta = 4$

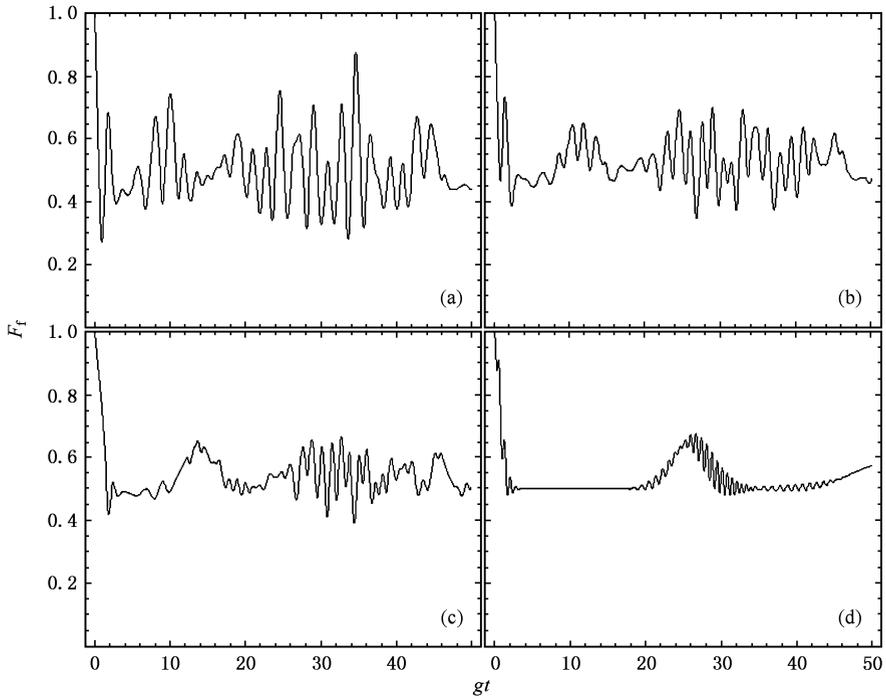


图 2 光场量子态保真度的时间演化与驱动场强和光场初态的关系($\lambda/g=0.2$) (a) $\alpha + \beta = 1$ (b) $\alpha + \beta = 1.5$ (c) $\alpha + \beta = 2$ (d) $\alpha + \beta = 4$



图 3 为 $\alpha = 1$ 时原子量子态的保真度与驱动场强的关系. 对比图 1 和图 3 可以看到, 驱动场对原子量子态的保真度影响的规律与对系统量子态保真度影响的情况相似(见图 3(a)–(c)). 但当 β 较大时, 原子量子态的保真度多出现了一次小的回复(见

图 3(c)). 进一步数值计算表明, 随着 β 的增大, 幅度小的回复与幅度大的回复位置均向右移, 且二者间距加大. 此外从总体上看, 原子量子态的保真度要比系统的保真度高. 例如, 图 1(d) 中保真度持续不变时的值约为 0.27, 而图 3(d) 中约为 0.38.

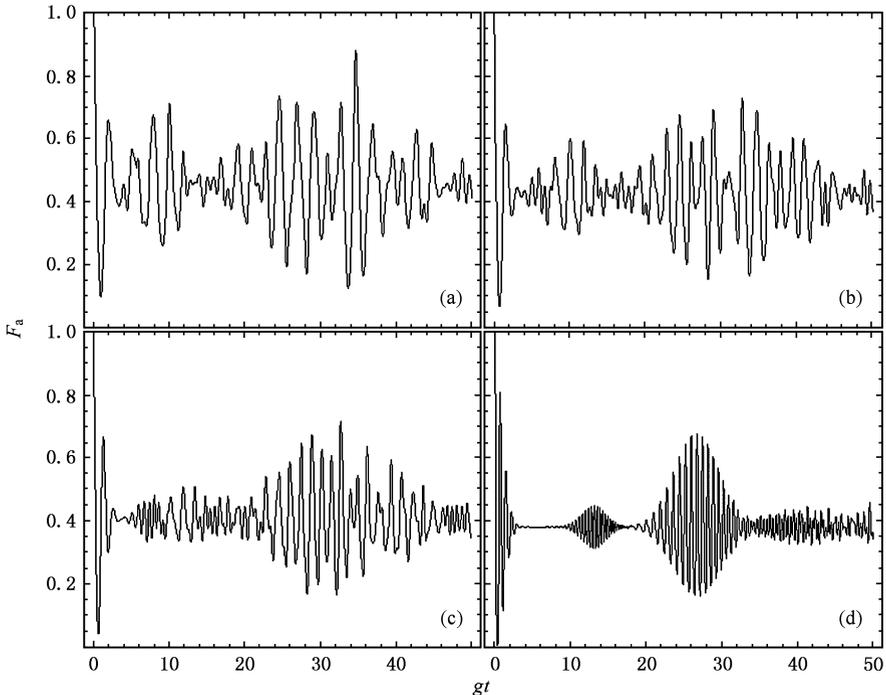


图 3 原子量子态保真度的时间演化与驱动场强的关系($\lambda/g=0.2, \alpha=1$) (a) $\beta=0$ (b) $\beta=0.5$ (c) $\beta=1$ (d) $\beta=3$

4.2. 保真度与原子间偶极-偶极相互作用的关系

先考虑无外场驱动的情况. 设两原子初始时均处于激发态, 光场初态为真空态. 取 $\alpha = \beta = 0$, 由 (22)–(24) 式不难得出

$$F_s(t) = F_f(t) = F_a(t) = |D_1^0|^2, \quad (25)$$

此时 DT-C 模型的系统、光场子系统和原子子系统的量子态保真度相同. 图 4 给出了这三种相同的保真度与原子间偶极-偶极相互作用的关系. 图形表

明, 保真度振荡的最大幅度保持不变, 与 λ 无关. 当原子间无相互作用 ($\lambda = 0$) 时, 由 (25) 式得

$$F_s(t) = F_f(t) = F_a(t) = \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\sqrt{6}gt) \right]^2, \quad (26)$$

保真度作等幅振荡, 振荡幅度最大, 三种保真度周期性地同时呈现完全不失真状态 (见图 4(a)), 周期为 $T = \frac{2\pi}{\sqrt{6}g} \approx 2.57/g$. 最小保真度为 1/9, 不会出现完全失真.

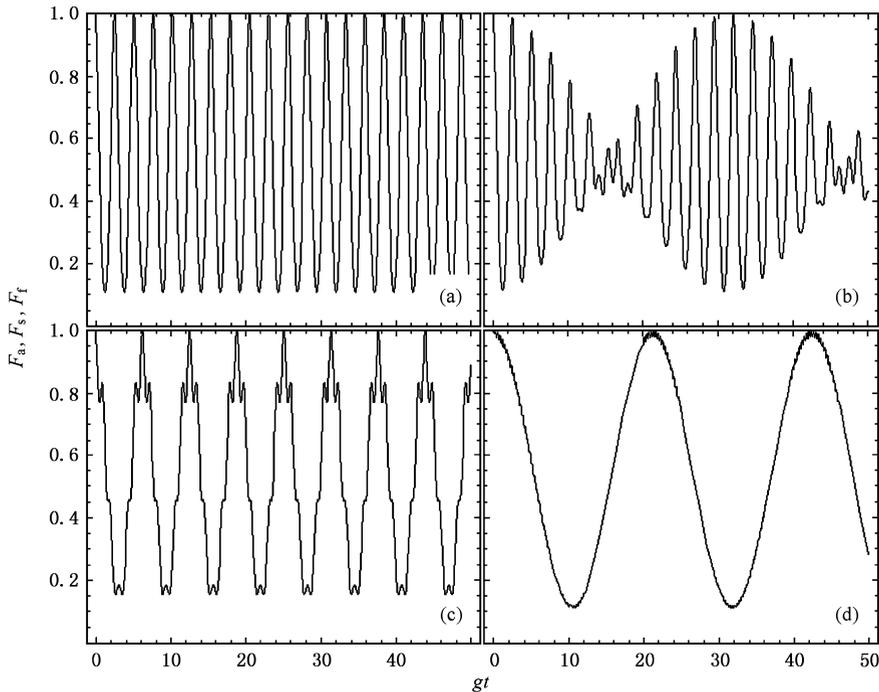


图 4 无外场驱动时, 量子态保真度与原子间偶极-偶极相互作用的关系 ($\alpha = 0, \beta = 0$) (a) $\lambda = 0$ (b) $\lambda/g = 0.2$ (c) $\lambda/g = 5$ (d) $\lambda/g = 20$

随着原子间的相互作用从 0 开始逐渐增大, 保真度作非等幅振荡, 并出现崩塌-回复现象, 如图 4(b) 所示. 但当 λ 大到一定值后, 保真度的演化又向等幅振荡过渡 (见图 4(c), (d)). 这是由于当原子间相互作用较强, 即 $\lambda \gg g$ 时,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + 24g^2} \\ &\approx \frac{\lambda}{2} \left[1 + 12 \left(\frac{g}{\lambda} \right)^2 \right], \\ F_s(t) &= F_f(t) = F_a(t) \\ &\approx \left| \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{i6 \left(\frac{g}{\lambda} \right) gt} \right|^2. \end{aligned} \quad (27)$$

保真度的时间演化近似为周期 $T = \frac{\pi(\lambda/g)}{3g}$ 的等幅

振荡 (见图 4(d)), 振荡周期与原子间偶极-偶极相互作用的强度 λ 成正比. 本文此处所得出的结论与文献 [5] 完全不同, 这是由于采用了不同的初态. 由此可见初态对量子态保真度的演化有很大的影响.

考虑原子受到外场驱动, 系统初态与以上相同. 图 5 给出了 $\beta = 2$ 时原子量子态保真度与原子间偶极-偶极相互作用的关系. 对比图 4, 图 5 中 (a)–(c) 可见, 当 λ 较小时, 有外场驱动情况下偶极相互作用对保真度的影响比无外场驱动情况下小. 有外场驱动情况下只有 λ 较大时, 偶极相互作用才会对保真度产生显著影响 (见图 5(d)). 外场驱动下系统和光场的保真度与偶极相互作用的关系与此相似, 此处不再赘述.

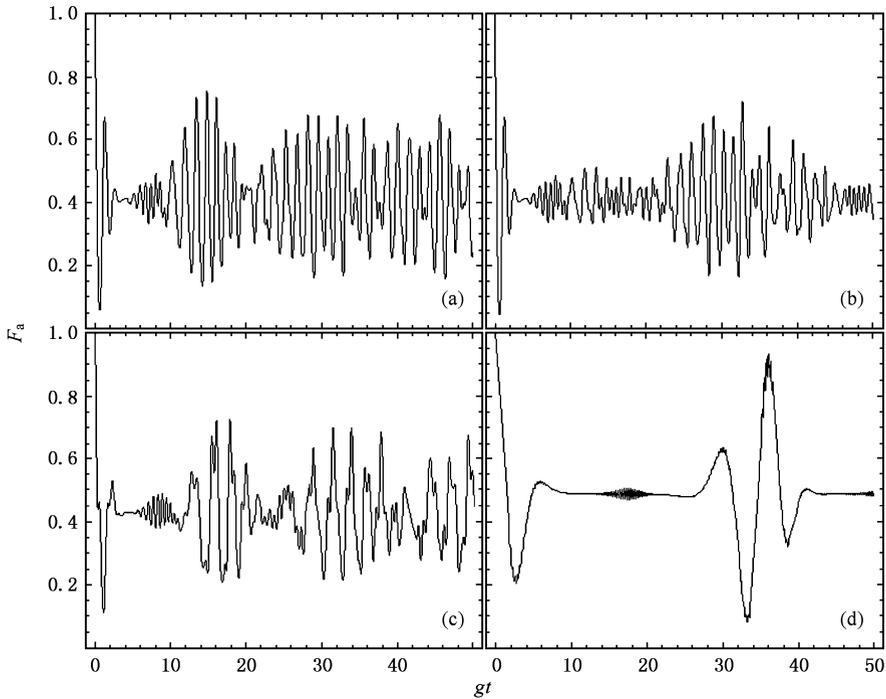


图5 有驱动场时,原子量子态保真度与原子间偶极-偶极相互作用的关系($\alpha=0, \beta=2$) (a) $\lambda=0$ (b) $\lambda/g=0.2$, (c) $\lambda/g=5$ (d) $\lambda/g=20$

5. 结 论

利用全量子理论,研究了原子受到外部经典场驱动时、双原子 T-C 模型中量子态的保真度,并设初始时两个原子均处于激发态而腔场为相干态。结果表明,外场驱动和腔场初态的光子数对量子态的保真度都有显著的影响,系统、光场和原子的量子态保真度的演化均不能出现完全不失真状态。系统和原子保真度的振荡频率随外场的增强而加大,振幅减小,并出现崩塌-回复现象;从开始经过半个振荡周期,系统和原子的保真度最小,随着驱动场的加

强会出现完全失真。光场保真度的演化不会出现完全失真;当外场较强时,光场的保真度能在较长的时间内保持为 0.5 不变。

原子间的偶极-偶极相互作用对保真度也有影响。当无外场驱动并且光场初态为真空态时,系统、光场和原子的量子态保真度均相同,保真度振荡的最大幅度保持不变,而振荡频率随原子间的偶极-偶极相互作用的强度 λ 的增大而减小。当 λ 很小或很大时,三种保真度的演化均近似为等幅振荡。当 λ 较小时,有外场驱动情况下偶极相互作用对保真度的影响比无外场驱动情况下小。

- [1] Tavis M, Cummings F W 1968 *Phys. Rev.* **170** 379
- [2] Joshi A 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2135
- [3] Bogoliubov N M, Bulloughz R K, Timonen J 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 6305
- [4] Andrei R, Georgii M, Ilya V *et al* 1999 *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 8739
- [5] Liu T K, WANG J S, Liu X J *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 708 (in Chinese) [刘堂昆、王继锁、柳晓军等 2000 物理学报 **49** 708]
- [6] Vadeiko I P, Miroshnichenko G P 2003 *Phys. Rev. A* **67** 053808
- [7] Zheng S B, Guo G C 1999 *Commun. Theor. Phys.* **31** 33
- [8] Huang C J, Zhou M, Li J F *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2159 (in Chinese) [黄春佳、周明、厉江帆等 2000 物理学报 **49** 2159]
- [9] Tao X Y, Liu J M, Liu S Q *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1464 (in Chinese) [陶向阳、刘金明、刘三秋等 2000 物理学报 **49** 1464]
- [10] Zuo Z C, Xia Y J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2687 (in Chinese) [左战春、夏云杰 2003 物理学报 **52** 2687]
- [11] Wang Z C, Wang Q, Gu Y J *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 107 (in Chinese) [王忠纯、王琪、顾永建等 2005 物理学报 **54** 107]

- [12] Wang Z C , Wang Q , Zhang Y S *et al* 2005 *Chin . Phys .* **14** 137
- [13] Duan L M , Guo G C 1997 *Phys . Rev . A* **56** 4466
- [14] Liu T K , Wang J S , Zhang M S 2001 *Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics* **18** 58 (in Chinese [刘堂昆、王继锁、詹明生 2001 原子与分子物理学报 **18** 58]
- [15] Alsing P , Gou D S , Carmichael H J 1992 *Phys . Rev . A* **45** 5135
- [16] Jozsa R 1994 *J . Mod . Opt .* **41** 2315
- [17] Liu S S , Liu S D 2002 *Special Functions* (Beijing : Meteorological Press) (in Chinese [刘式适、刘式达 2002 特殊函数 (北京 : 气象出版社)]

Effect of external field on the fidelity of quantum states in the two-atom Tavis-Cummings model^{*}

Wang Zhong-Chun

(*Department of Physics , Yancheng Teachers College , Yancheng 224002 , China*)

(Received 12 November 2005 ; revised manuscript received 13 January 2006)

Abstract

The fidelities of quantum states in the two-atom Tavis-Cummings model where the atoms are driven by an external classical field are derived. The influence of the external field and the dipole-dipole interaction of the atoms in a special initial state on the fidelity is discussed.

Keywords : fidelity , Tavis-Cummings model , external classical field

PACC : 4250

^{*} Project supported by the Natural Science Research Fund of the Jiangsu Education Commission of China (Grant No. 05KJD140247) , the Professor Research Fund of Yancheng Teachers College.