第 55 卷 第 9 期 2006 年 9 月
1000-3290/2006/55(09)/4901-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.9,September,2006

特殊钻石型等级晶格上 S^4 模型的临界性质*

尹训昌[1)2)] 尹 慧[1)] 孔祥木[1)†]

1)(曲阜师范大学物理系,曲阜 273165)

2)(安庆师范学院物理系,安庆 246011)

(2006 年 2 月 28 日收到;2006 年 3 月 27 日收到修改稿)

应用实空间重整化群和累积展开的方法,研究了外场中特殊钻石型等级晶格上 S^4 模型的相变和临界性质,求出了系统的临界点和临界指数. 结果表明,此系统除了存在一个 Gauss 不动点外,还存在一个 Wilson-Fisher 不动点,与该等级晶格上的 Gauss 模型相比较,系统的临界指数发生了变化.

关键词:钻石型等级晶格,S^4 模型,重整化群,临界性质

PACC:7540D,6460A,0570J

1. 引 言

分形是具有自相似性的几何对象,描述分形这种自相似特征的一个重要参数是分形维数. 由于分形维数可以是非整数,因此,研究分形上的相变问题对于理解非整数维系统的临界性质具有十分重要的意义. 上世纪 80 年代,Gefen 等人研究了分形晶格上 Ising 模型和 Potts 模型的相变问题[1—4],从此以后,人们对分形晶格上自旋模型的相变问题产生了浓厚的兴趣并取得了一系列的成果[5—15]. 近年来,作为 Ising 模型的推广,分形晶格上自旋可以连续取值的 S^4 模型的相变和临界问题引起了人们的关注,如 Li 和 Kong 应用实空间重整化群(简称 RG)的方法,研究了 m 个分支一般钻石型等级晶格上 S^4 模型的相变问题,求出了临界点和临界指数[16]. 一般的钻石型等级晶格是可以约化的,而本文所研究的特殊钻石型等级晶格是不可约化的,这更加接近于自然界的真实系统,因此,研究不可约化的特殊钻石型等级晶格的相变问题可以为理解自然界中系统的临界特性提供一个更好的理论依据. 本文应用实空间重整化群和累积展开的方法,在有外场的情况下,研究了一种特殊钻石型等级晶格(简称 SDH)上 S^4 模型的相变和临界性质,求出了系统的临界点和临界指数. 结果表明,此系统除了存在一个 Gauss 不动点外,还存在一个 Wilson-Fisher 不动点,且 Wilson-Fisher 不动点对系统的临界性质有决定性的影响. 与该等级晶格上的 Gauss 模型相比较,系统的临界指数发生了变化.

2. SDH 晶格上的 S^4 模型

我们所讨论的 SDH 晶格的构造过程如图 1 所示. 这种晶格由迭代过程生成,其基元(构造过程中的第 $n=0$ 级)是一个由两点和一键组成的晶格,然后五个这样的基元组成一个生成元($n=1$ 级),这个生成元的每一个键再被生成元本身来代替,这样的过程进行无穷多次,最后得到的晶格称为 SDH 晶格. 这种晶格是一种典型的非均匀晶格,即格点的配位数与格点的位置有关,其分形维数 $d_f=\ln5/\ln2=2.322$. 此晶格上 S^4 模型的有效哈密顿量可写为

$$H = K\sum_{\langle ij\rangle} s_is_j - \sum_i \frac{b_i}{2}s_i^2 - \sum_i u_is_i^4 + \sum_i h_is_i, \tag{1}$$

其中 s_i 表示格点 i 上的自旋变量,它的取值范围为 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的任意实数,$K=J/(k_BT)$是简化的最近邻相互作用参量,J 是交换积分,k_B 为 Boltzmann 常数,T 是热力学温度,b_i,u_i 和 h_i 分别代表格点 i 上的 Gauss 分布常数、四自旋相互作用参数和简化的外磁场. 为了求解非均匀晶格上自旋模型

* 曲阜师范大学科研基金资助的课题.

† E-mail:kongxm@mail.qfnu.edu.cn

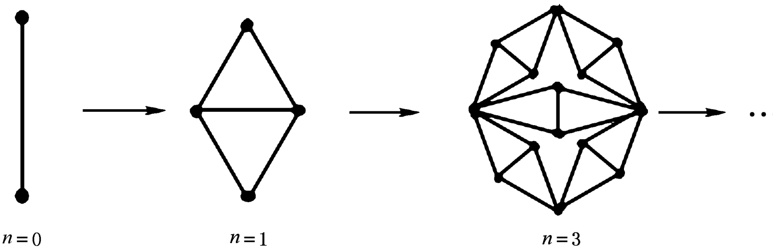

图 1 SDH 晶格的构造过程

的相变问题,我们假设[12]

$$b_i/b_j = u_i/u_j = h_i/h_j = q_i/q_j, \tag{2}$$

q_i 和 q_j 分别为格点 i 和 j 的配位数.

2.1. RG 变换过程

为了表述简单,这里取生成元来进行 RG 变换,图 2(a)给出了 SDH 晶格的一个生成元,各格点上的自旋分别以 s_a,s_b,s_1,s_2 来表示,在这个生成元中格点的配位数与格点的位置有关,并且格点 a 的配位数依赖于构造过程中的级数. 容易看出,$q_a = 3\times 2^{n-1}(n>1)$,$q_b=6$,$q_1=q_2=3$. 根据(1)式,该生成元的有效哈密顿量可写为

$$H = H_0 + V, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} H_0 = & \sum_{i=1}^{2}\left(K(s_a + s_b)s_i - \frac{b_3}{2}s_i^2 + h_3 s_i\right) \\ & + Ks_1 s_2 - \frac{b_{3\times 2^{n-1}}}{2}\frac{s_a^2}{3\times 2^{n-2}} - \frac{b_6}{2}\frac{s_b^2}{3} \\ & - u_{3\times 2^{n-1}}\frac{s_a^4}{3\times 2^{n-2}} - u_6\frac{s_b^4}{3} \\ & + h_{3\times 2^{n-1}}\frac{s_a}{3\times 2^{n-2}} + h_6\frac{s_b}{3}, \end{aligned} \tag{4a}$$

$$V = -u_3(s_1^4 + s_2^4). \tag{4b}$$

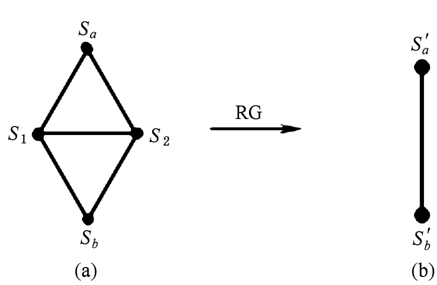

图 2 SDH 晶格的 RG 变换过程 (a) SDH 晶格的一个生成元;(b) 生成元经过 RG 变换后的晶格

经过一次变换后图 2(a)内部格点被消去变到图 2(b),以 s_a',s_b' 来表示变换后各格点上的自旋,经过此变换后系统的配分函数保持不变,这个过程可由下式表示:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H) = C\exp(H'), \tag{5}$$

式中 C 为与自旋无关的重整化常数,H' 为此生成元经过 RG 变换后的有效哈密顿量.

我们定义部分迹,记为(PT),

$$(PT) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H). \tag{6}$$

把(4)式代入(6)式,得到部分迹

$$\begin{aligned} (PT) & = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0) \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(e^V)\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0)}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0)} \\ & = A\langle e^V\rangle_0, \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0), \tag{8a}$$

$$\langle e^V\rangle_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(e^V)\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0)}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \exp(H_0)}. \tag{8b}$$

由于 V 为小量,对 e^V 作级数展开,则部分迹可表述为

$$(PT) = A\left(1 + \langle V\rangle_0 + \frac{1}{2!}\langle V^2\rangle_0 + \frac{1}{3!}\langle V^3\rangle_0 + \cdots\right). \tag{9}$$

由(5)式,(6)式和(9)式可以看出,经过 RG 变换后系统的有效哈密顿量为

$$H' = \ln A + \ln\left(1 + \langle V\rangle_0 + \frac{1}{2!}\langle V^2\rangle_0 + \frac{1}{3!}\langle V^3\rangle_0 + \cdots\right). \tag{10}$$

考虑到 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$,得到

$$H' = \ln A + \langle V\rangle_0 + \frac{1}{2}(\langle V^2\rangle_0 - \langle V\rangle_0^2) + \cdots. \tag{11}$$

上式的展开称为累积展开，这里只保留到二阶近似，A 可视为累积展开的零级项.

2.2. RG 变换的递推关系

利用(4)式和(8)式，可以计算(11)式中的各阶累积展开项. 由(4a)式和(8a)式得到累积展开的零级项为 $A=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\exp(H_0)=\exp(H_0')$，经过计算得到

$$\begin{aligned}H_0'&=k_{11}s_as_b+k_{12}(s_a^2+s_b^2)\\&\quad+k_{13}(s_a^4+s_b^4)+k_{14}(s_a+s_b),\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$k_{11}=\frac{2K^2}{b_3-K},$$

$$k_{12}=\frac{b_3^2-b_3K-3K^2}{3K-3b_3},$$

$$k_{13}=-\frac{2}{3}u_3,$$

$$k_{14}=\frac{2h_3(b_3+2K)}{3(b_3-K)}.$$

由(4)式和(8b)式得到一阶累积展开项为

$$\begin{aligned}\langle V\rangle_0&=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2V\exp(H_0)}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\exp(H_0)}\\&=k_{21}s_as_b+k_{22}(s_a^2+s_b^2)\\&\quad+k_{23}(s_a^4+s_b^4)+k_{24}(s_a+s_b),\end{aligned}\tag{13}$$

其中

$$k_{21}=-\frac{24K^2(b_3^2+b_3(h_3^2-K)+h_3^2K)u_3}{(b_3-K)^4(b_3+K)},$$

$$k_{22}=\frac{12K^2(b_3^2+b_3(h_3^2-K)+h_3^2K)u_3}{(b_3-K)^4(b_3+K)},$$

$$k_{23}=-\frac{2K^4u_3}{(b_3-K)^4},$$

$$k_{24}=-\frac{8H_3K(3b_3^2+b_3(h_3^2-3K)+h_3^2K)u_3}{(b_3-K)^4(b_3+K)}.$$

利用(4)式和(8)式，得到

$$\langle V^2\rangle_0=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2V^2\exp(H_0)}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\exp(H_0)},\tag{14}$$

利用(13)式和(14)式，经过复杂的计算，得到二阶累积展开项为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\langle V^2\rangle_0-\langle V\rangle_0^2)&=k_{31}s_as_b+k_{32}(s_a^2+s_b^2)+k_{33}(s_a^4+s_b^4)\\&\quad+k_{34}(s_a+s_b),\end{aligned}\tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}k_{31}&=\frac{u_3^2}{(b_3-K)^7(b_3+K)^3}\\&\quad\times\Big(96K^2(8b_3^5+b_3^4(21h_3^2-13K)\\&\quad-(K^2-15h_3^4+12h_3^2K)(b_3^2K+b_3K^2)\\&\quad+K^3(2K^2+5h_3^4-9h_3^2K)\\&\quad+b_3^3(5K^2+5h_3^4+12h_3^2K)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{32}&=\frac{u_3^2}{(b_3-K)^7(b_3+K)^3}\\&\quad\times\Big(48K^2(8b_3^5+b_3^4(21h_3^2-13K)\\&\quad-(K^2-15h_3^4+12h_3^2K)(b_3^2K+b_3K^2)\\&\quad+K^3(2K^2+5h_3^4-9h_3^2K)\\&\quad+b_3^3(5K^2+5h_3^4+12h_3^2K)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{33}&=\frac{u_3^2}{(b_3-K)^7(b_3+K)^2}\\&\quad\times\Big(24K^4(7b_3^3+(b_3^2+K^2)(10h_3^2-3K)\\&\quad+b_3K(20h_3^2-K)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{34}&=\frac{u_3^2}{(b_3-K)^7(b_3+K)^3}\\&\quad\times\Big(96h^3K(8b_3^5+b_3^4(7h_3^2-13K)\\&\quad-(K^2-3h_3^4+4h_3^2K)(b_3^2K+b_3K^2)\\&\quad+K^3(2K^2+h_3^4-3h_3^2K)\\&\quad+b_3^3(5K^2+h_3^4+4h_3^2K)\Big).\end{aligned}$$

根据(11)，(12)，(13)和(15)式，求得生成元经 RG 变换后的有效哈密顿量为

$$\begin{aligned}H'&=(k_{11}+k_{21}+k_{31})s_as_b\\&\quad+(k_{12}+k_{22}+k_{32})(s_a^2+s_b^2)\\&\quad+(k_{13}+k_{23}+k_{33})(s_a^4+s_b^4)\\&\quad+(k_{14}+k_{24}+k_{34})(s_a+s_b).\end{aligned}\tag{16}$$

为了得到与变换前形式相同的哈密顿量，需要对自旋进行重标，令 $s_i'=\xi s_i\,(i=a,b)$，则变换后的哈密顿量可改写为

$$\begin{aligned}H'&=K's_a's_b'-\frac{b_{3\times2^{n-2}}}{2}\frac{s_a'^2}{3\times2^{n-2}}-\frac{b_3}{2}\frac{s_b'^2}{3}\\&\quad-u_{3\times2^{n-2}}'\frac{s_a'^4}{3\times2^{n-2}}-u_3'\frac{s_b'^4}{3}\\&\quad+h_{3\times2^{n-2}}'\frac{s_a'}{3\times2^{n-2}}+h_3'\frac{s_b'}{3},\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\xi = \sqrt{-\frac{6}{b^3}(k_{12}+k_{22}+k_{32})}, \tag{18}$$

$$K' = (k_{11}+k_{21}+k_{31})/\xi^2, \tag{19}$$

$$u_3' = -3(k_{13}+k_{23}+k_{33})/\xi^4, \tag{20}$$

$$h_3' = 3(k_{14}+k_{24}+k_{34})/\xi. \tag{21}$$

(19)—(21)式就是 RG 变换的递推关系,由它们出发可以求出系统的临界点和临界指数.

2.3. 临界点和临界指数

为了求得系统的不动点,令 $K'=K=K^*$,$u_3'=u_3=u^*$,$h_3'=h_3=h^*=0$,由递推关系可以求得系统的不动点为

$$A: K^*=0, u^*=0, h^*=0;$$

$$B: K^*=b_3/3, u^*=0, h^*=0;$$

$$C: K^*=0.142b_3, u^*=0.095b_3^2, h^*=0. \tag{22}$$

其中 A 为稳定不动点,B 为 Gauss 不动点,C 为 Wilson-Fisher 不动点,且 Wilson-Fisher 不动点对系统的临界性质有决定性的影响,由 Wilson-Fisher 不动点可以计算出系统的临界指数.

根据 RG 变换理论,把 K',u_3',h_3' 在 C 点附近展开,保留线性项可得在不动点邻域的线性变换矩阵为

$$R_L = \begin{pmatrix} \frac{\partial K'}{\partial K} & \frac{\partial K'}{\partial u_3} & \frac{\partial K'}{\partial h_3} \\ \frac{\partial u_3'}{\partial K} & \frac{\partial u_3'}{\partial u_3} & \frac{\partial u_3'}{\partial h_3} \\ \frac{\partial h_3'}{\partial K} & \frac{\partial h_3'}{\partial u_3} & \frac{\partial h_3'}{\partial h_3} \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 3.549 & 3.951 & 0 \\ 1.358 & 2.559 & 0 \\ 0 & 0 & 5.240 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

由(23)式得 R_L 的本征值为 $\lambda_1=5.423$,$\lambda_2=0.685$,$\lambda_3=5.240$,其中 λ_1,λ_2 与温度有关,λ_3 与磁场有关.由 λ_1,λ_3 得到标度幂

$$p = \frac{\ln\lambda_1}{d_f \ln L} = 1.050, \quad q = \frac{\ln\lambda_3}{d_f \ln L} = 1.029,$$

其中 $d_f=2.322$ 是 SDH 晶格的分形维数,$L=2$ 是标度因子.由关系 $\alpha=\frac{2p-1}{p}$,$\beta=\frac{1-q}{p}$,$\gamma=\frac{2q-1}{p}$,$\delta=\frac{q}{1-q}$,$\eta=2+d_f(1-2q)$,$\nu=\frac{1}{pd_f}$,求得系统的临界指数分别为 $\alpha=1.048$,$\beta=-0.028$,$\gamma=1.008$,$\delta=-35.233$,$\eta=-0.457$,$\nu=0.410$.其中 α,β,γ,δ,η,ν 分别描述比热、自发磁化强度、零场磁化率、磁场强度、关联函数和关联长度在临界点附近的临界行为.

在(1)式中令 $u_i=0$,我们得到该等级晶格上 Gauss 模型的有效哈密顿量为 $H=K\sum_{\langle ij\rangle}s_i s_j-\sum_i \frac{b_i}{2}s_i^2+\sum_i h_i s_i$,从有效哈密顿量出发,我们很容易求得该等级晶格上 Gauss 模型的临界点为 $K^*=b_3/3$,$h^*=0$,根据 RG 变换理论求得系统的临界指数 $\alpha=1$,$\beta=0$,$\gamma=1$,$\delta=\infty$,$\eta=-0.332$,$\nu=0.431$.

3. 结 论

本文应用实空间重整化群和累积展开的方法,在有外场的情况下,研究了一种特殊钻石型等级晶格上 S^4 模型的相变和临界性质,求出了临界点和临界指数.由结果可知,此系统除了存在一个 Gauss 不动点外,还存在一个 Wilson-Fisher 不动点,且 Wilson-Fisher 不动点对系统的临界性质有决定性的影响.与该等级晶格上的 Gauss 模型相比较,系统不仅多了一个 Wilson-Fisher 不动点,而且系统的临界指数也发生了变化,这表明这两个系统属于不同的普适类.

[1] Gefen Y, Mandelbrot B, Aharony A 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 855

[2] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1983 *J. Phys.* A **16** 1267

[3] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys.* A **17** 435

[4] Gefen Y, Aharony A, Mandelbrot B 1984 *J. Phys.* A **17** 1277

[5] Yang Z R 1988 *Phys. Rev.* B **38** 728

[6] Hu B 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2316

[7] Hu B 1986 *Phys. Rev.* B **33** 6503

[8] Wu Y K, Hu B 1987 *Phys. Rev.* A **35** 1404

[9] Wang Z D, Gong C D, Arno H, 1986 *Phys. Rev.* A **34** 1531

[10] Fahnle M, Braun P 1988 *Phys. Rev.* B **38** 7094

[11] Li S, Yang Z R 1997 *Phys. Rev.* E **55** 6656

[12] Kong X M, Li S 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 63

[13] Kong X M, Lin Z Q, Zhu J Y 2000 *Sci. China* A **43** 768

[14] Zhu J Y, Zhu H 2003 *Chin. Phys* **12** 264

[15] Sun C F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3768 (in Chinese) [孙春峰 2005 物理学报 **54** 3768]

[16] Li Y，Kong X M 2005 *Physica* A **356** 589

Critical properties of the S^4 model on a special diamond-type hierarchical lattice*

Yin Xun-Chang[1)2)] Yin Hui[1)] Kong Xiang-Mu[1)†]

1)（*Department of Physics*，*Qufu Normal University*，*Qufu* 273165，*China*）

2)（*Department of Physics*，*Anqing Teachers College*，*Anqing* 246011，*China*）

（Received 28 February 2006；revised manuscript received 27 March 2006）

Abstract

Using the renormalization-group transformation and cumulative expansion technique，the phase transition and critical properties of the S^4 model on a special diamond-type hierarchical lattice are studied，and its fixed points and critical exponents are obtained. The results show that there exists a Wilson-Fisher fixed point besides the Gaussian fixed point，and compared with the Gaussian model of the special diamond-type hierarchical lattices，the critical exponents have changed.

Keywords：diamond-type hierarchical lattice，S^4 model，renormalization-group，critical property

PACC：7540D，6460A，0570J

* Project suported by the Science Foundation of Qufu Normal University.

† E-mail：kongxm@mail.qfnu.edu.cn