

# 部分相干平顶光束在线性增益(损耗)介质中的 光谱特性<sup>\*</sup>

张 艳 文 乔 张 彬<sup>†</sup>

(四川大学电子信息学院, 成都 610064)

(2005 年 9 月 14 日收到, 2006 年 3 月 24 日收到修改稿)

根据 Li 提出的平顶光束模型和部分相干光理论, 推导出部分相干平顶光束在线性增益(损耗)介质中传输的光谱分布解析表达式, 定量研究了部分相干平顶光束在线性增益(损耗)介质中传输的光谱特性, 分析了近场和远场轴上光谱的变化特点, 以及介质的增益(损耗)特性、光源的中心频率、空间相干参数以及谱宽等因素对光谱变化的影响. 研究结果表明, 部分相干平顶光束在线性增益(损耗)介质中传输时, 光源的中心频率、光谱宽度、空间相干参数对相对谱移量影响较大, 但对光谱分布随传输距离的总体变化趋势影响较小, 而光谱分布随传输距离的总体变化趋势则主要由平顶光束的阶数所决定.

关键词: 部分相干平顶光束, 光谱特性, 谱移, 线性增益(损耗)介质

PACC: 9265, 4200

## 1. 引 言

1988 年, Wolf 证明了当光源的光谱相干度满足定标定律时, 从光源发出的光在传输中保持光谱不变, 而违反定标定律的光源发出的光, 即使在自由空间中传输其光谱也会发生变化. 这种由于光源的光谱相干度违反定标定律的光谱变化就是相关诱导的光谱变化. 此后的研究发现, 满足定标定律的光源发出的光经光阑衍射后, 在衍射光场也观察到光谱的变化, 这种光谱的变化称为衍射诱导的光谱变化. 针对这两种光谱变化的产生机理, 人们进行的大量的理论和实验研究<sup>[1-6]</sup>. 然而, 在现有的光谱特性研究中, 对于部分相干的平顶光束却较少涉及. 本文针对部分相干平顶谢尔模型光束, 定量研究了其在增益(损耗)介质中传输时的光谱特性, 分析了介质的增益或损耗特性、光源的中心频率、空间相干参数以及谱宽等因素对光谱变化的影响.

## 2. 理论模型

激光光束在线性增益(或吸收)介质中传输时,

其传输仍然遵循 Collins 公式<sup>[7]</sup>. 对于一维直角坐标系, 相应的表达式为

$$E_2(x, z, \omega) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi B}} \exp\left(-\frac{ikz}{2}\right) \int E_1(x', z=0, \omega) \times \exp\left[-\frac{ik}{2B}(Ax'^2 - 2x'x + Dx^2)\right] dx', \quad (1)$$

式中  $E_1(x', z=0, \omega)$ ,  $E_2(x, z, \omega)$  分别为入射光场和出射光场的场分布,  $x'$ ,  $x$  分别为入射和出射光场的横向坐标,  $\omega$  为频率,  $A, B, C, D$  是光学系统的变换矩阵元, 当在线性增益(损耗)介质中传输有效距离  $z$  时, 该矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$k$  为复数波数, 可表示为

$$k = nk_0 + ik_i, \quad (3)$$

其中  $n$  为介质的折射率,  $k_0$  为真空中的波数,  $k_i$  为与介质的增益或损耗特性有关的参数,  $k_i > 0$  和  $k_i < 0$  分别表示增益介质和吸收介质.

由经典的光场相干性理论可知, 部分相干光可用空间-频率域中的交叉频谱密度函数描述. 根据交叉谱密度函数的定义<sup>[8]</sup>

<sup>\*</sup> 教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-05-0784)及国家自然科学基金(批准号: 60108004)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: zhangbinff@sohu.com

$$W(x_1, x_2, z, \omega) = E(x_1, z, \omega)E^*(x_2, z, \omega), \quad (4)$$

式中  $E(x, z, \omega)$  是场函数  $E(x, z, t)$  的傅里叶变换,  $\langle \rangle$  表示系综平均,  $*$  表示复共轭。

将(1)式代入(4)式,可得到部分相干光在介质中通过傍轴 ABCD 光学系统后的交叉频谱密度函数的传输公式为

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, z, \omega) = & \frac{|k|}{2\pi B} \exp(i k_i z) \iint W_0(x'_1, x'_2, z=0, \omega) \\ & \times \exp\left\{ \frac{i}{2B} [A(kx_1'^2 - k^*x_2'^2) \right. \\ & - \mathcal{X}(kx_1x'_1 - k^*x_2x'_2) \\ & \left. + D(kx_1^2 - k^*x_2^2)] \right\} dx'_1 dx'_2, \quad (5) \end{aligned}$$

式中  $x'_1, x'_2$  为入射面 ( $z=0$ ) 上的两点,  $x_1, x_2$  为出射面  $z$  上的两点。

根据 Li 提出的平顶光束模型<sup>[9]</sup>以及描述部分相干光的谢尔模型<sup>[10]</sup>,部分相干平顶光束的交叉谱密度函数可表示为

$$\begin{aligned} W_0(x'_1, x'_2, z=0, \omega) = & S^0(\omega) \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \\ & \times \exp\left\{ - \left[ \left( mp_m \frac{x_1'^2}{w_0^2} \right) + \left( m'p_{m'} \frac{x_2'^2}{w_0^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma^2(\omega)} \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

式中  $S^0(\omega)$  为源光谱,  $\sigma(\omega)$  为空间相关长度,  $w_0$  为束腰宽度,  $M$  为平顶光束的阶数, 且

$$\alpha_t = (-1)^{t+1} \frac{M!}{t(M-t)!}, p_t = \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i}{t} \quad (t = m, m'). \quad (7)$$

将(6)式代入(5)式,通过复杂的积分变换,可得到平顶谢尔模型光束经介质传输后的交叉谱密度函数解析表达式为

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, z, \omega) = & S^0(\omega) \frac{|k|}{B} \sigma^2(\omega) \exp(i k_i z) \\ & \times \exp\left[ - \frac{iD}{2B} (kx_1^2 - k^*x_2^2) \right] \\ & \times \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} (4g_m g_{m'}^* - 1)^{1/2} \\ & \times \exp\left[ - \frac{\sigma^2(\omega) \mathcal{X}(k^2 g_m^* x_1^2 - |k|^2 x_1 x_2 + k^{*2} g_m x_2^2)}{B^2 (4g_m g_{m'}^* - 1)} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

式中

$$g_t = \frac{t\beta^2 p_t}{1 - \beta^2} + \frac{i\sigma^2(\omega)kA}{2B} + \frac{1}{2} \quad (t = m, m'), \quad (9)$$

$$\beta = \left( 1 + \frac{w_0^2}{\sigma^2(\omega)} \right)^{-1/2}, \quad (10)$$

$\beta$  为光束空间相干参数,通常  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $\beta = 1$  和  $\beta = 0$  分别对应于完全空间相干光和完全空间非相干光。

令(8)式中的  $x_1 = x_2 = x$ ,可得到平顶谢尔模型光束在介质中传输后的光谱函数  $S(x, z, \omega)$ ,为了讨论方便,可以将它写成如下形式:

$$S(x, z, \omega) = S^0(\omega) M(x, z, \omega), \quad (11)$$

其中  $M(x, z, \omega)$  为调制函数,具体表示为

$$\begin{aligned} M(x, z, \omega) = & \frac{|k|}{B} \sigma^2(\omega) \exp(i k_i z) \\ & \times \exp\left[ - \frac{iD}{2B} (k - k^*) x^2 \right] \\ & \times \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} (4g_m g_{m'}^* - 1)^{1/2} \\ & \times \exp\left[ - \frac{\sigma^2(\omega) \mathcal{X}(k^2 g_m^* - |k|^2 + k^{*2} g_m) x^2}{B^2 (4g_m g_{m'}^* - 1)} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

(11, 12)式表明,平顶谢尔模型光束经介质传输后的谱特性与源处的谱密度  $S^0(\omega)$ ,空间相干参数  $\beta$ 、平顶光束阶数、ABCD 传输矩阵元以及介质的折射率和介质的增益或损耗特性等有关。

对于轴上光谱  $x=0$ ,调制函数可以简化为

$$\begin{aligned} M(0, z, \omega) = & \frac{|k|}{B} \sigma^2(\omega) \exp(i k_i z) \\ & \times \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} (4g_m g_{m'}^* - 1)^{1/2}. \quad (13) \end{aligned}$$

分析(13)式可知,式中  $|k| \sigma^2(\omega) / B$  项表示了光源相干特性对光谱函数的调制,会造成传输过程中光谱的移动;式中  $\exp(i k_i z)$  项表示了线性介质的增益或损耗特性仅对光谱强度进行调制,但不会造成光谱的移动;  $\sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} (4g_m g_{m'}^* - 1)^{1/2}$  项中虽然隐含了  $\beta, \sigma(\omega)$  等表示相干特性的参量,但该项更显著地表现了平顶光束的光束轮廓对光谱的调制,可以等效认为是光阑衍射作用对光谱的调制,会造成传输过程中光谱的移动。

假设源光谱  $S^0(\omega)$  为中心频率  $\omega_0$  的洛伦兹线

型,即

$$S^0(\omega) = S_0 \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}, \quad (14)$$

式中  $S_0$  为正常数,  $\Gamma$  为源光谱谱宽.

将(12)式和(14)式代入(11)式即可计算源光谱为洛伦兹线型的平顶谢尔模型光束在增益或损耗介质中传输后的光谱分布.

为了方便讨论,计算中采用归一化光谱  $S(\omega)$  和相对谱位移  $\frac{\delta\omega}{\omega_0}$ :

$$S(\omega) = \frac{S(x, z, \omega)}{S_{\max}(x, z, \omega)}, \quad (15)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{\max} - \omega_0}{\omega_0}, \quad (16)$$

式中  $S_{\max}(x, z, \omega)$  和  $\omega_{\max}$  分别为  $z$  处最大光谱强度值及其相应的频率.

### 3. 数值计算和分析

利用(11)–(16)式进行数值计算,计算所用参数:源光谱的中心频率  $\omega_0 = 3 \times 10^{15}$  rad/s,源光谱的谱宽  $\Gamma = 0.6 \times 10^{15}$  rad/s,空间相干参数  $\beta = 0.8$ ,介质折射率  $n = 1.5$ ,  $k_i = \pm 0.2$ .图1给出了阶数  $M = 1, 5, 10, 15$  的部分相干平顶光束的轴上相对谱移随传输距离的变化曲线:(a)近场;(b)远场.当  $M = 1$  时,对应于高斯谢尔模型(GSM)光束,图中  $z_0$  为 GSM 光束的瑞利长度.

分析图1可知,GSM 光束在线性增益介质中传输时其光谱特性较为特殊,在近场和远场均只发生蓝移. $M > 1$  时的平顶光束在线性增益介质中传输时,其近场区的轴上光谱会出现红移—蓝移的交替变化过程.已有的理论和实验<sup>[2,3]</sup>已证明了 GSM 光束经硬边光阑衍射后出现了所谓的光谱开关现象<sup>[2]</sup>.而当平顶光束的阶数  $M$  足够大时,平顶-谢尔模型光束的传输特性与经硬边光阑衍射的 GSM 光束是完全等效的,因此,也会出现光谱开关现象;而当平顶光束的阶数较小时,则等效于 GSM 光束经软边光阑衍射的情况,此时,部分相干平顶光束在近场的光谱相对偏移量是缓慢变化的,并没有出现光谱开关,只是随着阶数的增加,相对谱移量变化明显加剧,当阶数足够大时,便会出现光谱开关现象.进一步分析图1(b)可知,在远场区,不同阶数的部分相干平顶光束的轴上光谱均出现蓝移,且随着光束阶数的增加,蓝移量增大.此外,随着传输距离的增

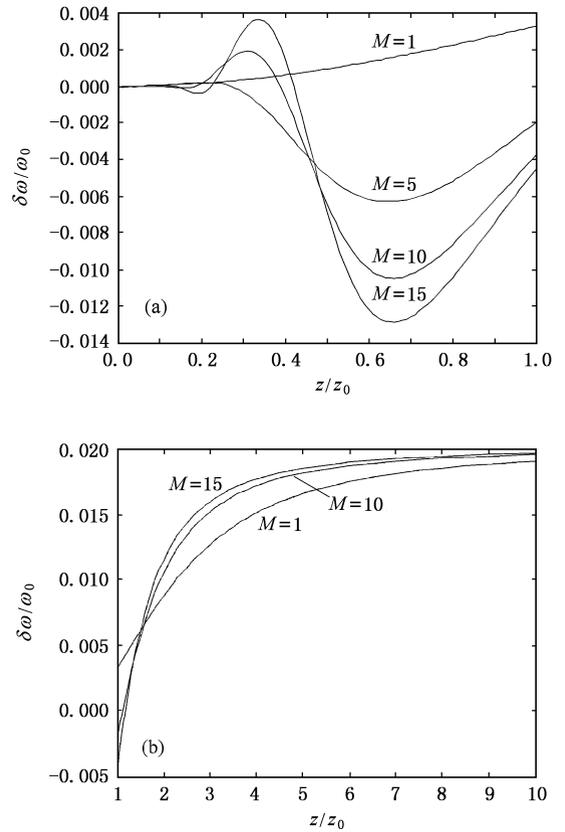


图1 部分相干平顶光束的轴上相对谱移

加,相对谱移量的变化逐渐变缓,最终趋于稳定值.经分析认为,作为部分相干平顶光束特例的 GSM 光束,由于其光束阶数  $M = 1$ ,此时,可以忽略光阑衍射效应对相对谱移的影响,而只是由于光源的部分相干特性造成了光谱的蓝移.当  $M > 1$  时,则可以认为其光谱同时受到了光源相干特性和光阑衍射的调制,在近场区域,衍射对光谱的作用更为显著,以致出现了光谱红移—蓝移交替的现象;在远场区域,相干特性的影响更为显著,从而在远场并没有发生光谱开关,而只是发生了光谱蓝移.

#### 3.1. 介质特性对光谱分布的影响

图2给出了不同介质折射率时,  $M = 15$  的部分相干平顶光束在介质中传输时的谱移随传输距离的变化曲线.图3表示了介质的增益(损耗)特性对部分相干平顶光束在介质中传输时的光谱特性的影响,计算参数  $M = 15$ ,  $z = 0.6z_0$ .

从图2可以看出,介质折射率的不同并不会改变相对谱移在介质中的变化趋势以及最大谱移量,只是随着折射率的增加,谱移的变化曲线逐渐变缓,

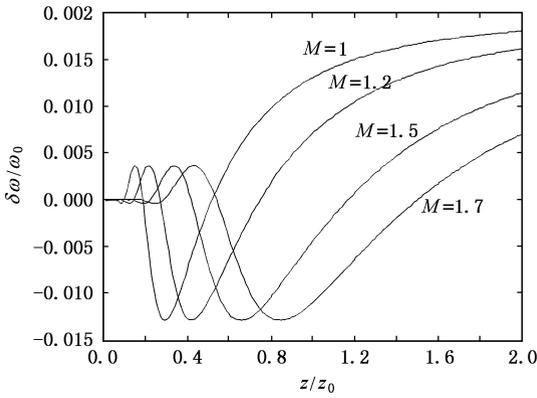


图 2 不同折射率时谱移随传输距离的变化

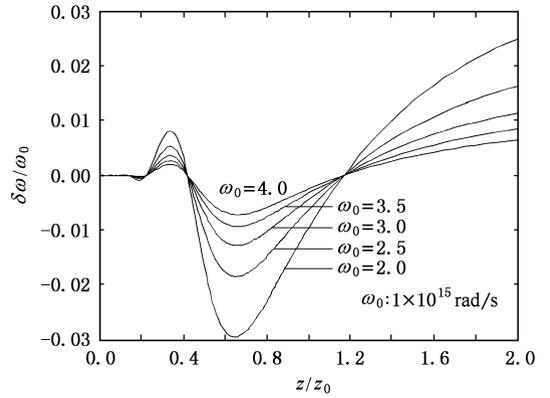


图 4 中心频率对相对谱移的影响

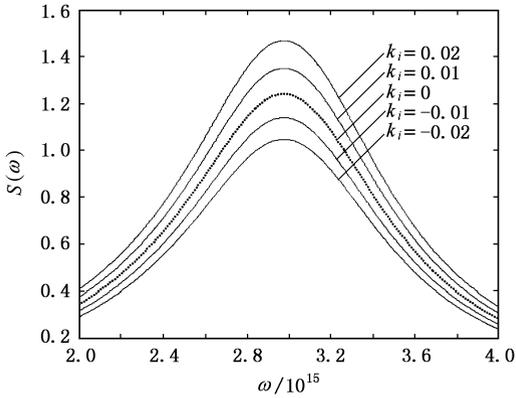


图 3 增益(损耗)特性对光谱的影响

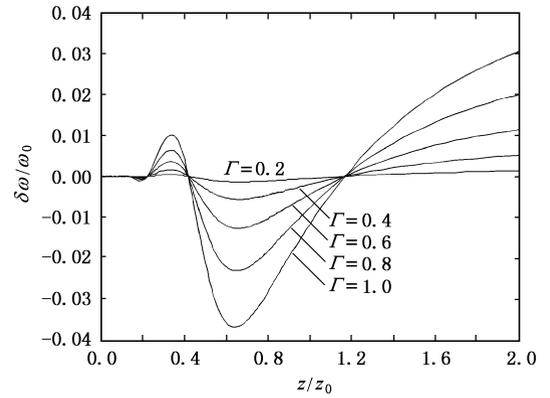


图 5 光谱宽度对相对谱移的影响

且发生相同谱移的位置相应滞后. 分析图 3 可知, 当  $k_i > 0$  时, 光谱强度随  $k_i$  增大而增大; 当  $k_i < 0$  时, 光谱的强度随  $k_i$  减小而减弱. 部分相干光束在线性介质中传播时, 介质的增益或损耗特性仅影响光谱的强度, 不会导致光谱的频移, 该结论与直接对 (12) 式右边  $\exp(k_i z)$  项进行定性分析得到的结论是一致的.

### 3.2. 源光谱参数对光谱的影响

图 4 给出了在相同谱宽 ( $\Gamma = 0.6 \times 10^{15}$  rad/s) 的情况下, 具有不同中心频率的部分相干平顶光束 ( $M = 15$ ) 的相对谱移随传输距离的变化曲线. 图 5 为具有不同光谱宽度的部分相干平顶光束 ( $M = 15$ ) 的相对谱移随传输距离的变化曲线. 图 6 给出了不同空间相干参数时, 部分相干平顶光束 ( $M = 15$ ) 在介质中传输时的相对谱移随传输距离的变化曲线.

从图 4 和图 5 可以看出, 光源的中心频率越小和光谱宽度越大, 相对谱移量则越大. 然而, 中心频

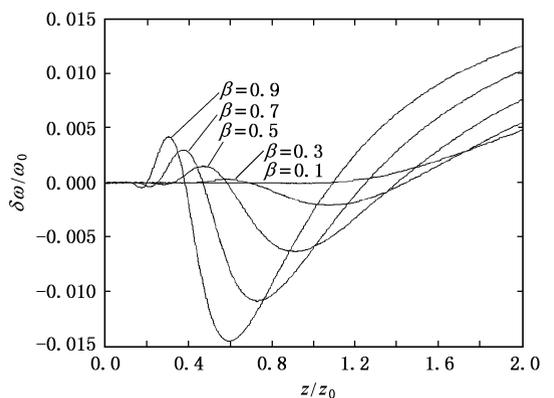


图 6 空间相干参数对相对谱移的影响

率和光谱宽度的变化只影响相对谱移量的大小, 而不会影响相对谱移随传输距离的变化趋势, 也不会改变零相对谱移量出现的位置. 其主要原因在于: 光源的光谱宽度越窄, 光源的单色性越好, 时间相干性越好, 传输中的相对谱移量越小; 当谱宽足够窄时, 从光源发出的光可以看成是理想单色光, 在传输

过程中光束的相对谱移量为零,说明理想的单色光束在传输中不会发生谱移.

分析图 6 可知,空间相干参数的变化不仅影响了相对谱移量的大小,而且还改变了零相对谱移量出现的位置.这是因为空间相干参数越大,空间相干性越好,相对谱移量越大.随着空间相干参数逐渐减小,空间相干性越差,相对谱移量减小,出现零相对谱移量的位置滞后.当光束的空间相干性变得很差(例如,  $\beta = 0.1$ )时,光阑衍射作用不明显,光束在近场区域的蓝移几乎消失,而只在远场区域出现蓝移.

## 4. 结 论

本文给出了部分相干平顶光束在线性介质中传

输的光谱公式,研究了部分相干平顶光束在线性增益或损耗介质中传输的光谱特性,分析了光束在近场和远场轴上光谱变化特点,并详细讨论了介质特性和光源参数对光谱的影响.研究结果表明,介质的折射率并不改变谱移在介质中的变化趋势和最大谱移量,只是随着折射率的增加,发生相同谱移的位置滞后.部分相干光束在线性介质中传播时,介质的增益(损耗)特性仅影响光谱的强度,而不改变光谱相对分布.光源的谱宽越窄,相对谱移量越小;光源的空间参数越小,相对谱移量越小.总的来说,部分相干平顶光束在线性介质中传输时,光源的中心频率、光谱宽度、空间相干参数对相对谱移量影响较大,但对谱移随传输距离的总体变化趋势的影响较小,而谱移随传输距离的总体变化趋势则主要由平顶光束的阶数所决定.

- 
- [ 1 ] Dacic Z, Wolf E 1988 *J. Opt. Soc. Am.* A **5** 1118
- [ 2 ] Pu J X, Cai C, Nemoto S 2004 *Chin. Opt. Lett.* **2** 239
- [ 3 ] Wang W J, Wolf E 1992 *Journal of Modern Optics* **39** 2007
- [ 4 ] Lü B D, Pan L Z 2003 *Science in China (Series G)* **33** 454 (in Chinese) [ 吕百达、潘留占 2003 中国科学(G 辑) **33** 454 ]
- [ 5 ] Pan L Z, Lü B D 2003 *Acta Opt. Sin.* **23** 707 (in Chinese) [ 潘留占、吕百达 2003 光学学报 **23** 707 ]
- [ 6 ] Ji X L, Xiao X, Lü B D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3396 [ 季小玲、肖 希、吕百达 2004 物理学报 **53** 3396 ]
- [ 7 ] Lü B D 2003 *Laser Optics ( Beam Characterization , propagation and Transformation , Resonator Technology and Physics )* ( Higher Education Press ) p11 [ 吕百达 2003 激光光学( 光束描述、传输变换与光腔技术物理 ) ( 高等教育出版社 ) 第 11 页 ]
- [ 8 ] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* ( Cambridge University Press ) p63
- [ 9 ] Li Y J 2002 *Opt. Commun.* **206** 225
- [ 10 ] Starikov A, Wolf E 1982 *J. Opt. Soc. Am.* **72** 923

# The spectral properties of partially coherent flat-topped light beams propagating in linear gain or loss media <sup>\*</sup>

Zhang Yan Wen Qiao Zhang Bin<sup>†</sup>

( College of Electronics Information , Sichuan University , Chengdu 610064 , China )

( Received 14 September 2005 ; revised manuscript received 24 March 2006 )

## Abstract

Based on the flat-topped beams model proposed by Li and the propagation theory of partially coherent light , the spectrum analytical expression of partially coherent flat-topped beams propagating in the linear gain or loss media was derived and the spectral properties were studied quantitatively by numerical calculation . The variation characteristics of the on-axis spectrum in near- and far-field regions have been discussed in details . The effects of the property of the linear gain or loss media and some parameters of the light source , such as the central frequency , spectrum width and spatial coherence parameter on the spectral shift have also been discussed . It can be shown that the light source parameters have greater effects on the value of the frequency shift than on the total changing trend of the spectrum along the propagation distance , whereas the latter is determined by the beam order of flat-topped beam .

**Keywords** : partially coherent flat-topped light beam , spectral properties , spectrum shift , linear gain or loss media

**PACC** : 9265 , 4200

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Program for New Century Excellent Talents in University( NCET-05-0784 ) and the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60108004 ) .

<sup>†</sup>Corresponding author . E-mail zhangbinff@sobu . com