第 56 卷 第 1 期 2007 年 1 月
1000-3290/2007/56(01)/0001-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.1, January, 2007

一类动力学方程的 Mei 对称性*

葛伟宽

(湖州师范学院物理系，湖州 313000)

(2006 年 3 月 9 日收到；2006 年 5 月 24 日收到修改稿)

研究一类动力学方程的 Mei 对称性的定义和判据，由 Mei 对称性通过 Noether 对称性可找到 Noether 守恒量．由 Mei 对称性通过 Lie 对称性可找到 Hojman 守恒量．同时，也可找到一类新型守恒量．

关键词：动力学方程，Mei 对称性，Noether 对称性，Lie 对称性

PACC：0320

1. 引 言

对称性与守恒量的研究是数学物理科学，特别是分析力学的一个近代发展方向．人们研究了各类动力学方程的 Noether 对称性[1—3]，Lie 对称性[2—11]和 Mei 对称性(亦称形式不变性)[12—15]，以及与之相对应的各类守恒量[16]．本文研究二阶 Micévić-Rusov 方程的 Mei 对称性的定义和判据．如果 Mei 对称性是 Noether 对称性，则可利用 Noether 定理来求 Noether 守恒量．如果 Mei 对称性是 Lie 对称性，则可借助于 Hojman 定理来求 Hojman 守恒量．另外，在一定条件下还可以导出一类新型守恒量．

2. 二阶 Micévić-Rusov 方程

Micévić 和 Rusov1984 年得到一类混合型方程[17]，其形式为

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} - \frac{\partial \overset{(m-1)}{T}}{\partial \overset{(m-1)}{q_s}} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 T 为系统的动能，$\overset{(m)}{T}$ 为动能对时间的 m 次导数，Q_s 为广义力．称方程(1)为 m 阶 Micévić-Rusov 方程．当 $m=1$ 时，方程(1)成为 Nielsen 方程．当 $m=2$ 时，有形式

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_s} - \frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s, \tag{2}$$

将 Q_s 分成有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s，有

$$Q_s = Q'_s + Q''_s, Q'_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}, V = V(t,\boldsymbol{q}). \tag{3}$$

令

$$L = T - V, \tag{4}$$

则方程(2)成为

$$\frac{\partial \ddot{L}}{\partial \ddot{q}_s} - \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{5}$$

将二阶微分方程组(5)展开，可求出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{6}$$

3. Mei 对称性的定义和判据

取时间 t 和坐标 q_s 的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \end{aligned} \tag{7}$$

在变换(7)后，函数 L 和 Q''_s 变为 L^* 和 Q''^*_s，有

$$\begin{aligned} L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2), \\ Q''^*_s &= Q''_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\tilde{X}^{(1)}(Q''_s) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\tilde{X}^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}$$

* 国家自然科学基金(批准号：10272021)资助的课题．

$$+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s},\tag{9}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.$$

定义 方程(5)的 Mei 对称性是指当动力学函数 L,Q''_s 在无限小变换(7)之后仍满足方程(5)的一种不变性.

根据上述定义,有

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L^*\right)-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L^*\right)-\frac{\partial}{\partial q_s}L^*=Q''^{*}_s.\tag{10}$$

将(8)式代入(10)式,利用方程(5),并忽略 ε^2 及各高阶小项,得

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\tilde{X}^{(1)}(L)\right\}-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{X}^{(1)}(L)\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial q_s}\tilde{X}^{(1)}(L)=\tilde{X}^{(1)}(Q''_s)\,(s=1,\cdots,n),\tag{11}$$

于是有

判据 如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足方程(11),则相应的不变性是方程(5)的 Mei 对称性.

方程(11)称为 Mei 对称性的判据方程.

4. Mei 对称性导致的 Noether 守恒量

方程(6)在满足一定条件下可化成 Lagrange 方程[18],如不能或不易化为 Lagrange 方程,可以部分 Lagrange 化.实际上,令

$$\tilde{L}=\frac{1}{2}\dot{q}_s\dot{q}_s,\tilde{Q}_s=\alpha_s,\tag{12}$$

则方程(6)可表为一个有非势力的完整力学系统,其方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}=\tilde{Q}_s.\tag{13}$$

对方程(13),如果存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得下列 Noether 等式成立:

$$\tilde{L}\dot{\xi}_0+X^{(1)}(\tilde{L})+\tilde{Q}(\xi_s-\dot{q}\,\xi_0)+\dot{G}_N=0,\tag{14}$$

则有 Noether 守恒量

$$I_N=\tilde{L}\xi_0+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_N=\mathrm{const}.\tag{15}$$

于是有

命题 1 如果方程(5)Mei 对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足(14)式,则 Mei 对称性导致 Noether 守恒量式(15).

5. Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量

方程(6)在时间不变的特殊无限小变换下,Lie 对称性的确定方程有形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s=\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k.\tag{16}$$

Hojman 定理指出[19],如果生成元 ξ_s 满足方程(16),并且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,\tag{17}$$

则方程(6)有 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const}.\tag{18}$$

于是有

命题 2 如果方程(5)的 Mei 对称性生成元 ξ_s($\xi_0=0$)满足确定方程(16),并且存在某函数 μ 满足(17)式,则 Mei 对称性导致 Hojman 守恒量(18)式.

6. Mei 对称性导致的一类新守恒量

将方程(5)写成如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s,\tag{19}$$

它的 Mei 对称性的判据方程有形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\tilde{X}^{(1)}(L)\right\}-\frac{\partial}{\partial q_s}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}=\tilde{X}^{(1)}(Q''_s).\tag{20}$$

对满足判据方程(20)的生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在某函数 $G_{\mathrm{F}}=G_{\mathrm{F}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\tilde{X}^{(1)}(L)\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+\tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}$$
$$+\tilde{X}^{(1)}(Q''_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{F}}=0,\tag{21}$$

则系统(20)有如下新型守恒量:

$$I_{\mathrm{F}}=\tilde{X}^{(1)}(L)\xi_0+\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{F}}$$
$$=\mathrm{const}.\tag{22}$$

于是有

命题 3 如果方程(5)Mei 对称性的生成元 ξ_0,

ξ_s 满足(20)式，并且存在函数 $G_N = G_N(t, q, \dot{q})$ 满足(21)式，则方程(5)的 Mei 对称性可导致新型守恒量式(22).

以上三个命题都是所论方程 Mei 对称性导致的守恒量，分别为 Noether 守恒量，Hojman 守恒量和新型守恒量.

7. 算　例

下面举例说明上述结果.

例 1　单自由度的 Lagrange 函数和广义力分别为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2, Q = -\dot{q}. \tag{23}$$

首先，研究 Mei 对称性导致的 Noether 守恒量. 对系统(23)，方程(5)给出

$$\ddot{q} = -\dot{q}, \tag{24}$$

取生成元

$$\xi_0 = 0, \xi = 1, \tag{25}$$

则有

$$\tilde{X}^{(1)}(L) = \dot{q}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi - \dot{q}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right) = 0,$$

$$\tilde{X}^{(1)}(Q'') = 0.$$

因此，生成元(25)是 Mei 对称性的. Noether 等式(14)给出

$$L\dot{\xi}_0 + \dot{q}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) - \dot{q}(\xi - \dot{q}\dot{\xi}_0) + \dot{G}_N = 0.$$

将(25)式代入上式，得

$$G_N = q,$$

而守恒量式(15)给出

$$I_N = \dot{q} + q = \text{const}. \tag{26}$$

这是 Mei 对称性导致的 Noether 守恒量.

再取生成元

$$\xi_0 = 0, \xi = (\dot{q} + q)\dot{q}\exp t, \tag{27}$$

则有

$$\tilde{X}^{(1)}(L) = \tilde{X}^{(1)}(Q) = 0,$$

因此，生成元(27)是 Mei 对称性的. 将(17)式代入确定方程(16)，可知满足，因此，它也是 Lie 对称性的. (17)式给出

$$-1 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{28}$$

它有解

$$\mu = \exp t \tag{29}$$

将(27)，(29)式，代入守恒量式(18)，得到

$$I_{\mathrm{H}} = \frac{\partial\xi}{\partial q} = \dot{q}\exp t = \text{const}. \tag{30}$$

它是 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量.

例 2　研究系统

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2, Q'' = t \tag{31}$$

的 Mei 对称性导致的新型守恒量.

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi = \dot{q} + t - \frac{1}{2}t^2, \tag{32}$$

则有

$$\tilde{X}^{(1)}(L) = \dot{q}, \tilde{X}^{(1)}\{\tilde{X}^{(1)}(L)\} = 1, \tilde{X}^{(1)}(Q'') = 0,$$

可验证，生成元(32)满足方程(11)，因此它是方程(5)的 Mei 对称性. 由(21)式求得

$$G_{\mathrm{F}} = -t,$$

而守恒量(22)式给出

$$I_{\mathrm{F}} = \dot{q} - \frac{1}{2}t^2 = \text{const}. \tag{33}$$

它是 Mei 对称性导致的新型守恒量.

8. 结　论

本文研究了二阶 Micévić-Rusov 方程的 Mei 对称性，并由 Mei 对称性求得了 Noether 守恒量，Hojman 守恒量和新型守恒量等.

[1] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[2] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[4] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[5] Fu J L, Chen L Q 2003 *Phys. Lett.* A **317** 255

[6] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese)[梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[7] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461(in Chinese)[张　毅 2002

物理学报 **51** 461]

[8] Zhang H B 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1

[9] Mei F X 2000 *Acta Mech*. **141**(3–4) 135

[10] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 841

[11] Qiao Y F, Li R J, Zhao S H 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1790

[12] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Institute of Technology* **9** 120

[13] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1999

[14] Mei F X, Xu X J 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 449

[15] Fang J H, Peng Y, Liao Y P 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 496 (in Chinese) [方建会、彭 勇、廖永潘 2005 物理学报 **54** 496]

[16] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[17] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京 北京理工大学出版社)]

[18] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (NewYork: Springer-Verlag)

[19] Hojman S A 1992 *J*. *Phys* A **25** L29

Mei symmetries of a type of dynamical equations*

Ge Wei-Kuan

(*Department of Physics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

(Received 9 March 2006; revised manuscript received 24 May 2006)

Abstract

The definition and the criterion of a Mei symmetry for a type of dynamical equations are presented. The Noether conserved quantity can be deduced when the Mei symmetry is a Noether symmetry. The Hojman conserved quantity can be obtained if the Mei symmetry is a Lie symmetry. In addition, a new conserved quantity can be found by the Mei symmetry.

Keywords: dynamical equations, Mei symmetry, Noether symmetry, Lie symmetry

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021).