

# 陈氏混沌系统的非反馈控制<sup>\*</sup>

谌 龙<sup>†</sup> 王德石

(海军工程大学兵器工程系, 武汉 430033)

(2006 年 4 月 24 日收到, 2006 年 5 月 19 日收到修改稿)

通过对陈氏混沌系统施加非共振参数激励实现非反馈混沌控制. 将远大于系统特征频率的周期信号作为控制输入, 利用平均法和 Lyapunov 方法证明控制方案的可行性, 并得出控制参数应满足的条件. 数值研究表明此方法可以使受控系统迅速达到稳定状态, 且具有较强的抗干扰性能.

关键词: 陈氏混沌系统, 混沌控制, 非反馈控制

PACC: 0545

## 1. 引 言

1990 年 Ott 等<sup>[1]</sup>提出利用状态反馈进行参数微扰的混沌控制方法, 为混沌系统的反馈控制奠定了理论基础. 同年, Lima 等<sup>[2]</sup>提出了基于参数共振微扰原理的非反馈混沌控制方法, 在 Duffing 系统中实现了混沌抑制. 此后, 混沌的控制与应用得到了各领域研究者的广泛关注, 并利用现代控制论取得了一系列研究成果<sup>[3-10]</sup>. 由于混沌的反馈控制具有完善的理论基础, 便于定量分析和设计, 因而在近年来提出的众多控制策略中大部分都是反馈控制方法, 如自适应控制<sup>[3]</sup>、延迟反馈控制<sup>[4]</sup>、追踪控制<sup>[5]</sup>、模糊控制<sup>[6]</sup>等. 反馈控制可以使系统稳定于平衡点或不稳定周期轨道, 甚至追踪任意的参考信号, 但在某些应用场合也存在一些不足. 首先, 反馈控制的实现前提是必须对系统的状态变量进行物理测量, 这在工程应用中常常难以实现, 而且有时会遇到某些状态变量不可观测的情形. 其次, 混沌系统对初值极为敏感, 而状态测量过程会不可避免地引入外界噪声, 从而影响系统的精确控制.

非反馈控制不需要测量状态变量, 控制方法简便易行, 具有独特的优势, 已在电力系统等领域得到成功的应用<sup>[7]</sup>. 在近年来关于混沌系统非反馈控制的研究中, 控制策略大多为参数共振微扰法和周期激励方法. 此类方法一般应用于非自治混沌系统, 控

制效果明显, 采用很小的控制输入即可显著改变系统状态, 但由于缺乏严格的理论基础, 总的来说研究进展缓慢. 此外, 某些混沌系统在受到共振扰动时的分叉特性相当复杂<sup>[8]</sup>, 且与外界噪声密切相关. 因此, 在实际应用中, 此类方法的控制参数难以通过理论分析进行计算, 其选取常常依靠经验和尝试, 不利于推广应用. 利用非共振参数激励实现混沌控制<sup>[9, 10]</sup>是近年来提出的又一种非反馈混沌控制方法, 其可行性已得到实验验证, 且可以通过严格的理论分析求解控制参数. 本文以这一控制原理为基础设计了陈氏混沌系统的非反馈控制模型, 通过施加非共振参数激励使系统从混沌状态转变为稳定状态. 采用平均法和 Lyapunov 方法证明了控制的可行性, 并得到控制参数应满足的条件. 数值研究表明此方法可行, 且具有较强的抗干扰性能.

## 2. 控制系统描述

陈氏混沌系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $a = 35$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$  时系统处于混沌状态. 将各状态变量看作相位连续、包络随机变化的谐和信号, 系统的特征频率定义为信号相位的平均变化率<sup>[9]</sup>, 即

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10272113)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xhrhgz@eyou.com

$$\omega_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi N(T)}{T},$$

其中  $N$  为时间  $T$  内信号的波峰或波谷数目. 对于系统 (1), 可计算其特征频率为  $\omega_0 \approx 12 \text{ rad/s}$ . 由于参数  $c$  的变化对系统行为具有较大影响, 可设计参数激励非反馈控制系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + d[1 + k\cos(\omega t)]y, \quad (2) \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned}$$

其中  $k$  是唯一的待定控制参数, 激励信号频率  $\omega$  远大于系统特征频率  $\omega_0$ , 通过调节参数  $k$  使陈氏混沌系统稳定于周期状态或平衡点.

### 3. 控制参数的确定

下面利用平均法<sup>[11]</sup>来分析受控系统 (2) 的动力学特性. 平均法是求解非线性振动方程的一种近似解析方法, 其基本思想是认为非线性振动系统的解具有快变和慢变两种时间尺度, 在快变周期内可将其视为幅值和初相角不变的简谐振动, 但较长时间内其幅值和初相角会缓慢变化, 即系统的解是包络缓慢变化的简谐振动. 借鉴这一基本思想, 并参考文献 [9, 12] 中的变量处理方法, 可将受控系统 (2) 中的状态变量分解为按系统特征频率  $\omega_0$  变化的慢变量和按外加参数激励频率  $\omega$  变化的快变量, 慢变量描述系统演化的长期趋势, 而快变量表示系统变量的局部振荡形态, 因此只要使慢变系统全局稳定即可实现控制目标. 现将系统变量表示为

$$\begin{aligned} x &= x_s + x_q, \\ y &= y_s + y_q, \quad (3) \\ z &= z_s + z_q, \end{aligned}$$

变量下标  $s$  和  $q$  分别表示快变和慢变. 设快变量在周期  $T = 2\pi/\omega$  内的平均值为零, 且其幅度远小于慢变量. 令算子  $\cdot$  表示  $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\cdot) dt$ , 将 (3) 式代入系统 (2) 并在周期  $T$  内将各慢变量视为常量, 利用平均法对系统变量进行积分处理后得慢变量的演化方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= a(y_s - x_s), \\ \dot{y}_s &= rx_s - x_s z_s + cy_s + ck y_q \cos(\omega t), \quad (4) \\ \dot{z}_s &= x_s y_s - bz_s. \end{aligned}$$

上式中略去了积分不为零的高阶小量, 并令  $r = c - a$ , 对比系统 (2) 和 (4), 可得快变量  $y_q$  的演化方程

$$\dot{y}_q = rx_q + ck \cos(\omega t) y_s + cy_q. \quad (5)$$

由于  $x_q$  的幅度远小于  $y_s$ , 略去上式中的  $rx_q$  项, 解得

$$y_q = \frac{[ck \sin(\omega t) - c^2 k \cos(\omega t)] y_s}{\omega^2 + c^2}. \quad (6)$$

将 (6) 式代入系统 (4), 并利用以下积分关系式

$$\cos^2(\omega t) = 1/2, \quad \cos(\omega t) \sin(\omega t) = 0$$

得慢变系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= a(y_s - x_s), \\ \dot{y}_s &= (c - a)x_s - x_s z_s + c_e y_s, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\dot{z}_s = x_s y_s - bz_s,$$

式中参数  $c_e = c - c^3 k^2 / (2\omega^2 + 2c^2)$ .

对系统 (7) 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2}(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2),$$

求导后得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_s \dot{x}_s + y_s \dot{y}_s + z_s \dot{z}_s \\ &= -ax_s^2 + cx_s y_s + c_e y_s^2 - bz_s^2 \\ &= -[x_s \quad y_s \quad z_s] A [x_s \quad y_s \quad z_s]^T, \end{aligned}$$

$$\text{式中 } A = \begin{bmatrix} a & -c/2 & 0 \\ -c/2 & -c_e & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}.$$

可解出当  $c_e < -c^2 / (4a)$  时矩阵  $A$  正定,  $\dot{V} < 0$ , 从而系统 (7) 渐近稳定于原点. 由此可以得到控制参数  $k$  应满足的条件为

$$k > \sqrt{\frac{(4a + c)(\omega^2 + c^2)}{2ac^2}}. \quad (8)$$

## 4. 数值研究结果

当控制系统 (2) 参数  $a = 35$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 28$  时, 考虑到原系统特征频率  $\omega_0 \approx 12 \text{ rad/s}$ , 取参数激励频率  $\omega = 180 \text{ rad/s}$ , 根据 (8) 式计算得到受控系统稳定时控制参数应满足的条件为  $k > 10.08$ . 取系统初值  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -1$ ,  $z(0) = 1$ , 以下是当  $k$  取不同数值以及控制输入受噪声干扰时利用四阶 Runge-Kutta 法求解系统 (2) 后得到的数值研究结果.

### 4.1. 受控系统稳定于平衡点

取控制参数  $k = 11.8$ , 在  $t = 5 \text{ s}$  时开始施加控制, 系统原来的混沌状态消失, 相轨迹迅速趋于原点. 变量  $x$  随时间的变化如图 1 所示, 可见施加参数激励控制后约  $1 \text{ s}$  时间即可使系统稳定于原点. 仿真

结果表明实际控制参数值要略大于理论预测值,这是由于推导过程中忽略了高阶项的影响,因而(8)式的结果是一个便于计算的近似估计值.

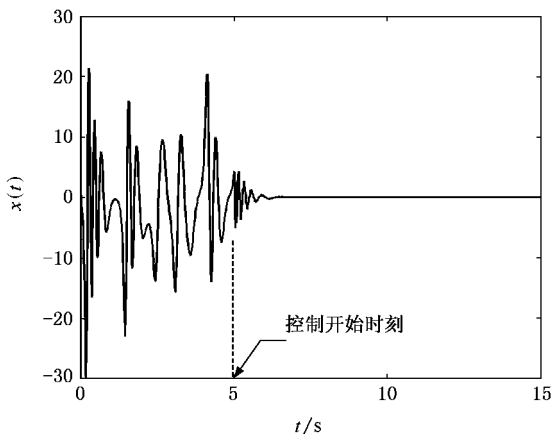


图1  $k = 11.8$  时变量  $x$  随时间的变化

能,当参数  $k = 11.8$  时将方差为 1 的高斯白噪声加入激励信号,得到信噪比为 18.4dB 的控制输入  $u(t)$ ,其波形如图 3 所示.

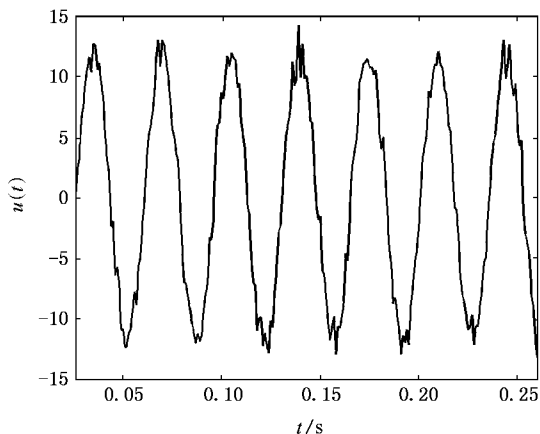


图3 噪声干扰下控制输入  $u(t)$  的波形

### 4.2. 受控系统稳定于周期轨道

取控制参数  $k = 11.6$ , 经过约 20s 的过渡过程之后,系统的混沌状态消失并稳定于小振幅的周期轨道,信号频率与参数激励频率相同.系统的  $x-z$  相态图如图 2 所示(已略去过渡状态),表明混沌已得到抑制.不过由于外加激励振幅较大,此轨道已不是混沌中的不稳定周期轨,而是由外加激励引起的在平衡点附近的周期振荡.

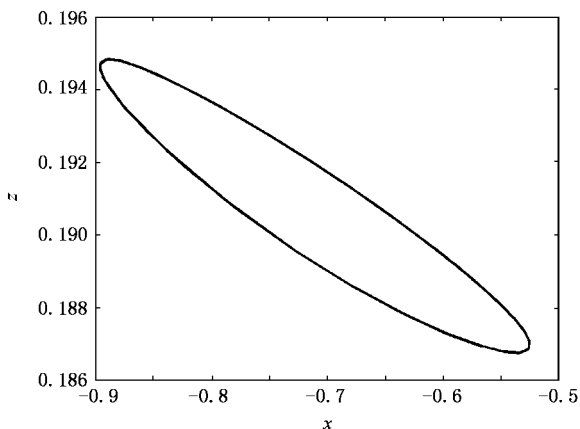


图2  $k = 11.6$  时系统的  $x-z$  相态图

当  $t = 5s$  时开始施加控制,系统依然能够迅速稳定于原点,其中状态变量  $x$  随时间的变化如图 4 所示.与 4.1 中无噪声时的控制效果相比,两种情形下系统稳定于原点所需的时间基本相同,区别仅在于当控制输入含噪声时变量过渡状态的起伏略大一些,说明控制系统的抗干扰性能较好.

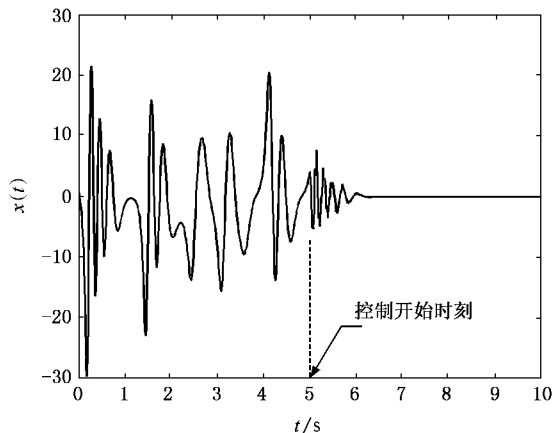


图4 控制输入含噪声时变量  $x$  随时间的变化

### 4.3. 控制输入受噪声干扰时的控制效果

在实际应用中,控制输入常常会受到外界噪声干扰而影响控制效果.为分析控制系统的抗干扰性

## 5. 结 论

本文以非共振参数激励混沌控制原理为基础,设计了陈氏混沌系统的非反馈控制模型.采用平均法和 Lyapunov 方法证明了控制方案的可行性,并得到控制参数应满足的条件.数值研究表明控制参数的理

论分析结果比较准确,通过选取适当参数可将系统稳定于平衡点和周期轨道,且具有较强的抗干扰性能.

相比于参数共振微扰方法,此方法可给出严格的理论分析结果,不足之处是对原系统的扰动较大.

- [ 1 ] Ott E , Grebogi C , Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 2 ] Lima R , Pettini M 1990 *Phys. Rev. A* **41** 726
- [ 3 ] Guan X P , Fan Z P , Peng H P , Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 ( in Chinese ) [ 关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2108 ]
- [ 4 ] Yu H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5053 ( in Chinese ) [ 于洪洁 2005 物理学报 **54** 5053 ]
- [ 5 ] Wang X Y , Shi Q J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5591 ( in Chinese ) [ 王兴元、石其江 2005 物理学报 **54** 5591 ]
- [ 6 ] Wang Y N , Tan W , Duan F 2006 *Chin. Phys.* **15** 89
- [ 7 ] Zhou Y F , Chen J N , Xie Z G *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3676 ( in Chinese ) [ 周宇飞、陈军宁、谢智刚等 2004 物理学报 **53** 3676 ]
- [ 8 ] Yang X L , Xu W , Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 ( in Chinese ) [ 杨晓丽、徐 伟、孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678 ]
- [ 9 ] Choe C U , Hohne K , Benner H *et al* 2005 *Phys. Rev. E* **72** 036206
- [ 10 ] Soong C Y , Huang W T , Lin F P *et al* 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016211
- [ 11 ] Liu Y Z , Chen L Q 2001 *Nonlinear Vibrations* ( Beijing : High Education Press ) Chapt 2 ( in Chinese ) [ 刘延柱、陈立群 2001 非线性振动 ( 北京 : 高等教育出版社 ) 第 2 章 ]
- [ 12 ] Kivshar Yu S , Rodelsperger F , Benner H 1994 *Phys. Rev. E* **49** 319

## Nonfeedback control of chen 's chaotic system <sup>\*</sup>

Chen Long<sup>†</sup> Wang De-Shi

( *Weaponry Engineering Department , Naval University of Engineering , Wuhan 430033 , China* )

( Received 24 April 2006 ; revised manuscript received 19 May 2006 )

### Abstract

Nonfeedback chaos control of Chen 's chaotic system is realized with nonresonant parametric drive. The control input is a periodic signal whose frequency is far higher than the system characteristic frequency. The feasibility of this scheme is proved by averaging method and Lyapunov method , and the condition of control parameter is obtained. Numerical researches show that the controlled system can reach stable state rapidly even when the control signal is noisy.

**Keywords :** Chen 's chaotic system , chaos control , nonfeedback control

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10272113 ).

<sup>†</sup> E-mail : xhrhgz@eyou.com