

耦合的 van der Pol 振子的极限环幅值控制^{*}

唐驾时[†] 萧 寒

(湖南大学力学与航空航天学院,长沙 410082)

(2006 年 3 月 9 日收到,2006 年 5 月 14 日收到修改稿)

设计反馈控制器,对一类耦合的 van der Pol 振子的极限环幅值进行控制.用近似解析方法求出了控制系统的幅值的控制方程,得到了控制参数与极限环幅值的函数关系,使系统的振幅能按需求得到有效地调整.通过数值计算绘制了在不同控制参数下,系统响应的时间历程曲线和极限环.近似解析方法计算得到的结果与数值计算进行了比较,两者是符合的.这一方法也可以推广应用到其他耦合的 van der Pol 振子.

关键词:van der Pol 振子,极限环,振幅,反馈控制

PACC:0547,1120D

1. 引 言

在非线形科学中,混沌控制和分岔控制近年来引起了科技工作者的浓厚兴趣^[1-8],混沌控制的研究成果较多,而分岔控制的研究成果相对要少些.但是,研究成果正在逐年地增加^[1].分岔控制指的是设计一个控制器去改变非线性系统的分岔特性.在工程问题中,分岔控制的目的是避免系统因分岔现象产生有害的动力学行为,使系统得到监控^[9].在分岔研究中,Hopf 分岔是一类重要的动态分岔.van der Pol 振子是一个著名的自激振动系统,最先出现在非线性电路中,后来在机械、生物、化学、医学、生态学等很多工程和科学领域中发现了它的存在.以往对 van der Pol 振子的研究,主要集中在求 van der Pol 振子、广义的 van der Pol 振子和耦合的 van der Pol 振子的近似解^[10-13]和数值解^[14],分析极限环的存在和稳定性.极限环幅值的控制无论在理论上还是应用上都有重要的研究价值.文献[15]对一个平面系统进行了研究,利用一个非线性控制器使极限环的幅值得到了控制.文献[16]设计了不同的反馈控制器,对 van der Pol 振子和广义的 van der Pol 振子的极限环幅值进行了有效的控制.但是,这些文献都是对单自由度系统进行研究.对于多自由度系统的极限环幅值的控制目前还没有这方

面的研究成果发表,还有许多问题需要去解决.本文对这个问题进行探讨,研究耦合的 van der Pol 振子极限环幅值的控制,这对多自由度系统的分岔控制研究是很有意义的.

考虑一个耦合的 van der Pol 振子

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x - \varepsilon\alpha_1(1 - x^2)\dot{x} - \varepsilon\beta_1 x(x^2 + y^2) &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y - \varepsilon\alpha_2(1 - y^2)\dot{y} - \varepsilon\beta_2 y(x^2 + y^2) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

这个系统在相平面 x - \dot{x} 和 y - \dot{y} 上均有极限环,本文对其幅值进行控制,用近似解析方法求出控制系统幅值的控制方程,得到控制参数与极限环幅值的函数关系,从而实现通过调整控制增益对极限环幅值进行控制.为说明控制方程的效果,解析计算得到的结果与数值计算结果进行了比较.

2. 控制参数与极限环幅值的函数关系

研究(1)式表示的系统,为了控制系统极限环的幅值,需要设计反馈控制器 $u_i(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ ($i = 1, 2$),而且这个控制器不会改变平衡点和分岔点的位置.未控系统(1)变成了一个控制系统

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x - \varepsilon\alpha_1(1 - x^2)\dot{x} \\ - \varepsilon\beta_1 x(x^2 + y^2) &= u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y - \varepsilon\alpha_2(1 - y^2)\dot{y} &\end{aligned}$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10672053)资助的课题.

[†] E-mail: tangjiashi@hnu.cn

$$-\varepsilon\beta_2 y(x^2 + y^2) = u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}). \quad (2)$$

控制器 $u_i(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ 可以设计成线性的或非线性的。非线性控制器有平方非线性, 立方非线性等等。将控制器设计为 $u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \varepsilon k_1 y^2 \dot{x}$, $u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \varepsilon k_2 x^2 \dot{y}$, 其中 k_1, k_2 为控制参数。控制系统(2)变为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x - \varepsilon\alpha_1(1 - x^2)\dot{x} \\ - \varepsilon\beta_1 x(x^2 + y^2) &= \varepsilon k_1 y^2 \dot{x}, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y - \varepsilon\alpha_2(1 - y^2)\dot{y} \\ - \varepsilon\beta_2 y(x^2 + y^2) &= \varepsilon k_2 x^2 \dot{y}. \end{aligned} \quad (3)$$

如果 ε 为小参数, 一般在 $0 < \varepsilon < 0.3$ 的范围内, 用多尺度方法可以求得(3)式的近似解^[17-20], 设其解为

$$\begin{aligned} x_0 &= A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i\omega_1 T_0}, \\ y_0 &= A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2(T_1) e^{-i\omega_2 T_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中时间尺度 $T_i = \varepsilon^i t$ ($i = 0, 1$)。考虑 $\omega_1 \approx \omega_2$ 的共振情况, 令

$$\begin{aligned} (2\omega_2 - \omega_1)T_0 &= \omega_1 T_0 + 2\sigma T_1, \\ (2\omega_1 - \omega_2)T_0 &= \omega_2 T_0 - 2\sigma T_1, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 σ 为调谐参数。利用消除永年项的条件得

$$\begin{aligned} -2i\omega_1 A_1' + i\omega_1 \alpha_1 A_1 - i\omega_1 \alpha_1 A_1^2 \bar{A}_1 + 3\beta_1 A_1^2 \bar{A}_1 \\ + 2\beta_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 + 2i\omega_1 k_1 A_1 A_2 \bar{A}_2 \\ + (\beta_1 - i\omega_1 k_1) \bar{A}_1 A_2^2 e^{2i\sigma T_1} &= 0, \\ -2i\omega_2 A_2' + i\omega_2 \alpha_2 A_2 - i\omega_2 \alpha_2 A_2^2 \bar{A}_2 + 3\beta_2 A_2^2 \bar{A}_2 \\ + 2\beta_2 A_1 A_1 \bar{A}_2 + 2i\omega_2 k_2 A_1 \bar{A}_1 A_2 \\ + (\beta_2 - i\omega_2 k_2) A_1^2 \bar{A}_2 e^{-2i\sigma T_1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

设

$$A_1 = \frac{1}{2} a_1(T_1) e^{i\theta_1(T_1)}, \quad (7)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} a_2(T_1) e^{i\theta_2(T_1)},$$

$$\varphi = \alpha(\theta_2 - \theta_1 + \sigma T_1). \quad (8)$$

将(7)和(8)式代入(6)式, 分开实部和虚部, 有

$$\begin{aligned} -\omega_1 a_1' + \frac{1}{2} \alpha_1 \omega_1 \alpha_1 - \frac{1}{8} \alpha_1 \omega_1 a_1^3 + \frac{1}{4} \omega_1 k_1 a_1 a_1^2 \\ - \frac{1}{8} \omega_1 k_1 a_1 a_2^2 \cos\varphi + \frac{1}{8} \beta_1 a_1 a_2^2 \sin\varphi &= 0, \\ \omega_1 a_1 \theta_1' + \frac{3}{8} \beta_1 a_1^3 + \frac{1}{4} \beta_1 a_1 a_2^2 \\ + \frac{1}{8} \beta_1 a_1 a_2^2 \cos\varphi + \frac{1}{8} \omega_1 k_1 a_1 a_2^2 \sin\varphi &= 0, \\ -\omega_2 a_2' + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_2 \alpha_2 - \frac{1}{8} \alpha_2 \omega_2 a_2^3 + \frac{1}{4} \omega_2 k_2 a_1^2 a_2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8} \omega_2 k_2 a_1^2 a_2 \cos\varphi - \frac{1}{8} \beta_2 a_1^2 a_2 \sin\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_2 a_2 \theta_2' + \frac{3}{8} \beta_2 a_2^3 + \frac{1}{4} \beta_2 a_1^2 a_2 \\ + \frac{1}{8} \beta_2 a_1^2 a_2 \cos\varphi - \frac{1}{8} \omega_2 k_2 a_1^2 a_2 \sin\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

系统有稳态解, 则有

$$a_1' = a_2' = \varphi' = 0.$$

(9)式变为

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 \omega_1 - \alpha_1 \omega_1 a_1^2 + 2\omega_1 k_1 a_2^2 \\ - \omega_1 k_1 a_2^2 \cos\varphi + \beta_1 a_2^2 \sin\varphi &= 0, \\ 4\alpha_2 \omega_2 - \alpha_2 \omega_2 a_2^2 + 2\omega_2 k_2 a_1^2 \\ - \omega_2 k_2 a_1^2 \cos\varphi - \beta_2 a_1^2 \sin\varphi &= 0, \\ 3\omega_2 \beta_1 a_1^2 - 3\omega_1 \beta_2 a_2^2 + 2\omega_2 \beta_1 a_2^2 \\ - 2\omega_1 \beta_2 a_1^2 + (\omega_2 \beta_1 a_2^2 \\ - \omega_1 \beta_2 a_1^2) \cos\varphi + \omega_1 \omega_2 (k_1 a_2^2 \\ + k_2 a_1^2) \sin\varphi + 8\omega_1 \omega_2 \sigma &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式表示了控制参数 k_1, k_2 与极限环幅值 a_1, a_2 的函数关系, 是系统的幅值的控制方程, 使振幅能通过调整增益得到有效地控制, 一般用数值方法求解。

3. 数值计算

利用解常微分方程的数值计算, 可获得未控制系统(1)和控制系统(3)的时间历程曲线和极限环。取 $\varepsilon = 0.1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ 。通过数值计算, 在相平面 $x-\dot{x}$ 和 $y-\dot{y}$ 上未控制系统(1)的极限环分别如图1所示。极限环的幅值为 $a_1 = a_2 = 2.0000$ 。

对系统(1)进行控制, 未控制系统(1)变为控制系统(3), 系统的参数仍取为 $\varepsilon = 0.1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\omega_1 = \omega_2 = 1.0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ 。改变控制参数的值将使极限环的幅值得到控制。图2表示控制参数取 $k_1 = k_2 = -0.1$ 通过数值计算得到的时间历程曲线和极限环, 极限环的幅值为 $a_1 = a_2 = 1.9069$ 。图3表示控制参数取 $k_1 = k_2 = -0.5$, 通过数值计算得到的时间历程曲线和极限环, 极限环的幅值分别为: $a_1 = a_2 = 1.6330$ 。

控制参数取其他值计算极限环幅值的结果见表1。

控制系统(3)的控制参数 k_1, k_2 与振幅 a_1, a_2 的关系图如图4所示。计算结果表明控制方程(10)

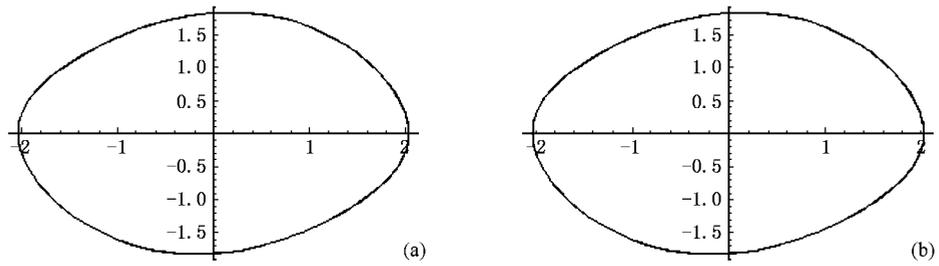


图1 未控系统(1)的极限环($\varepsilon=0.1, \alpha_1=\alpha_2=1, \omega_1=\omega_2=1.0, \beta_1=\beta_2=0.5$) (a) $x-x'$ 相轨线 (b) $y-y'$ 相轨线

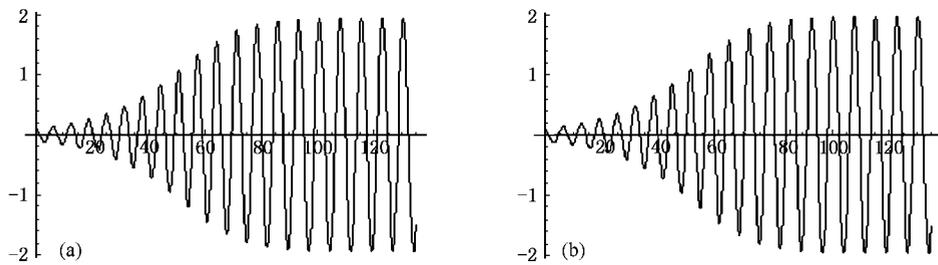


图2 控制系统(3)的时间历程曲线和极限环($k_1=k_2=-0.1$) (a) $t-x$ 曲线 (b) $t-y$ 曲线 (c) $x-x'$ 相轨线 (d) $y-y'$ 相轨线

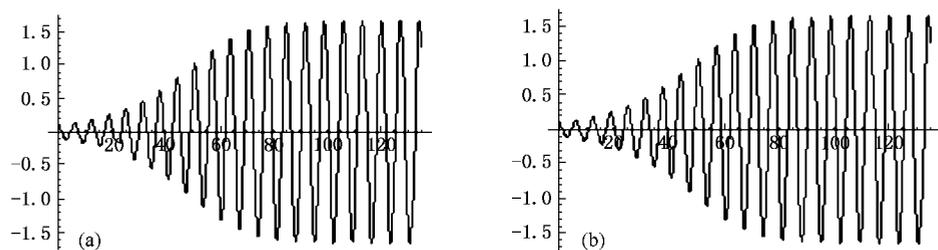


图3 控制系统(3)的时间历程曲线和极限环($k_1=k_2=-0.5$) (a) $t-x$ 曲线 (b) $t-y$ 曲线 (c) $x-x'$ 相轨线; (d) $y-y'$ 相轨线

的计算精度是很高的. 图 4 还表明, 若给定振幅值, 可以在图上找到对应的控制参数值, 从而对系统进行有效的控制. 由此可见, 方程(10)是一个很重要的关系式.

表 1 不同控制参数下的极限环幅值
($\epsilon = 0.1, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 1.0, \beta_1 = \beta_2 = 0.5$)

k_1, k_2	(a_1, a_2)		
	解析解	数值解	误差/%
0	2.0000	2.0361	1.77
-0.1	1.9069	1.9367	1.54
-0.3	1.7541	1.7759	1.23
-0.5	1.6330	1.6495	1.00
-0.7	1.5339	1.5475	0.88
-0.9	1.4510	1.4621	0.76

对系统(1)进行控制, 控制器还可以设计为

$$\begin{aligned} u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_1 x^2 \dot{y}, \\ u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_2 y^2 \dot{x}, \end{aligned} \quad (11)$$

或

$$\begin{aligned} u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_1 (x^2 + y^2) \dot{x}, \\ u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_2 (x^2 + y^2) \dot{y}, \end{aligned} \quad (12)$$

或

$$\begin{aligned} u_1(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_1 (x^2 \dot{y} + y^2 \dot{x}), \\ u_2(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \epsilon k_2 (x^2 \dot{y} + y^2 \dot{x}). \end{aligned} \quad (13)$$

它们都有较好的控制效果, 并且不会改变极限环的稳定性. 控制器还可以设计成其他更简单的形式, 经过计算它们不能控制极限环幅值, 甚至会使极限环消失, 因此不宜采用.

对于其他的耦合的 van der Pol 振子, 例如

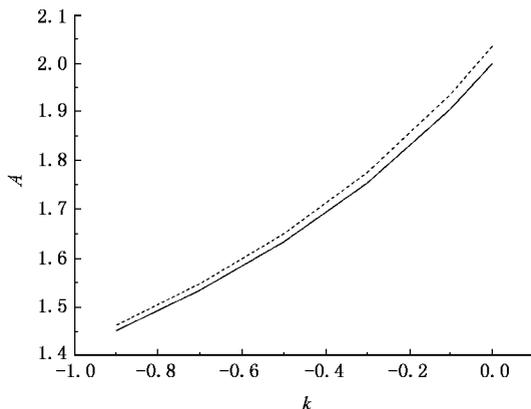


图 4 控制参数 k_1, k_2 与振幅 a_1, a_2 的关系图(..... 数值解; —— 解析解)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x - \epsilon \alpha_1 (1 - x^2 - y^2) \dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y - \epsilon \alpha_2 (1 - x^2 - y^2) \dot{y} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

也可以进行类似的分析.

4. 结 论

利用反馈控制器, 耦合的 van der Pol 振子的极限环幅值能得到控制. 对于某些弱非线性系统, 用近似解析方法能获得控制参数与极限环幅值的函数关系, 该控制方程能使系统的振幅得到有效的控制. 这一方法也可以推广应用到其他的耦合 van der Pol 振子. 一般来说要获得控制参数与极限环幅值的函数关系是比较困难的, 需借助于数值分析, 设计控制器, 确定适合的控制参数. 对于强非线性耦合的 van der Pol 振子, 也可以设计适当的反馈控制器对系统的极限环幅值进行控制.

[1] Chen G R, Moiola J L, Wang H O 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **10** 511
 [2] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 (in Chinese)[孙晓娟、徐 伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]
 [3] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 (in Chinese)[张广军、徐健学 2005 物理学报 **54** 557]
 [4] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese)[徐 伟、贺 群、戎海武、方 同 2003 物理学报 **52** 1365]
 [5] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese)[康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 802]
 [6] Sun Z K, Xu W, Yang X L 2005 *J. Dyn. Contr.* **3**(3)13 (in

Chinese)[孙中奎、徐 伟、杨晓丽 2005 动力学与控制学报 **3**(3)13]
 [7] Qian C Z, Fu W B 2005 *J. Dyn. Contr.* **3**(4)7 (in Chinese) [钱长照、符文彬 2005 动力学与控制学报 **3**(4)7]
 [8] Fu W B, Tang J S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2889 (in Chinese) [符文彬、唐驾时 2004 物理学报 **53** 2889]
 [9] Brandt M E, Chen G R 1997 *IEEE Circuits Syst.* **1** **44** 1031
 [10] Maccari A 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 123
 [11] Mickens R E 2003 *J. Sound Vib.* **259** 457
 [12] Tang J S, Fu W B, Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004
 [13] Ricardo L R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **21** 55
 [14] Mickens R E, Gumel A B 2002 *J. Sound Vib.* **250** 955

- [15] Cam U , Kuntman H 1998 *Microelectron. J.* **29** 913
- [16] Tang J S , Chen Z L 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 487
- [17] Tang J S , Liu Z Y , Li X P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 522 (in Chinese)[唐驾时、刘铸永、李学平 2003 物理学报 **52** 522]
- [18] Tang J S , Qian C Z 2003 *J. Sound Vib.* **268** 1036
- [19] Tang J S 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 1153
- [20] Tang J S 2000 *J. Sound Vib.* **232** 993

Amplitude control of limit cycle of coupled van der Pol oscillator^{*}

Tang Jia-Shi[†] Xiao Han

(College of Mechanics and Aerospace , Hunan University , Changsha 410082 , China)

(Received 9 March 2006 ; revised manuscript received 14 May 2006)

Abstract

Feedback controllers are designed by way of controlling the amplitude of limit cycle of coupled van der Pol oscillators. Bifurcation control equations of weakly nonlinear systems are obtained by using the approximate method, and relationships between the amplitude of limit cycle and the control gain are acquired, hence the amplitude of limit cycle can be controlled effectively. By using numerical method of solving ordinary differential equations, time displacement curves and limit cycle of the uncontrolled or controlled system can be found. The results obtained by approximate method and in numerical calculation are in good agreement. The method may be applied to other coupled van der Pol oscillators.

Keywords : van der Pol oscillator , limit cycle , amplitude , feedback control

PACC : 0547 , 1120D

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672053).

[†] Corresponding author. E-mail : tangjiashi@hnu.cn