

两束离轴高斯光束干涉场中的横向光涡旋*

王 莉^{1)†} 王庆峰¹⁾ 王喜庆²⁾ 吕百达³⁾

1) 西南交通大学理学院物理系, 成都 610031)

2) 西南交通大学峨眉校区, 峨眉 614202)

3) 四川大学 激光物理与化学研究所, 成都 610064)

(2006 年 3 月 29 日收到, 2006 年 4 月 27 日收到修改稿)

研究了两束离轴高斯光束干涉场中的波前结构以及横向光涡旋. 研究表明干涉场中的相位鞍点以及涡旋点的位置与光束的离轴参数、束腰宽度、相位以及相对振幅有关. 相位鞍点既可位于涡旋点的内侧, 也可以位于涡旋点的外侧, 且控制参数取一定值时, 相位鞍点将与涡旋点重合. 对于离轴光束, XZ 平面两侧的相位鞍点与涡旋点相遇时所对应的控制参数并不相同, 且 XZ 平面上相位鞍点相遇时所对应 x 值, 一般情况下与涡旋点相遇时所对应的 x 值不相同.

关键词: 奇点光学, 离轴参数, 涡旋, 相位鞍点

PACC: 4225

1. 引 言

在线性和非线性光学系统中, 振幅为零点的附近光场的相位是不确定的. 对这种具有相位奇点光束特性的研究已成为一个热点, 并形成了现代光学前沿之一——奇点光学^[1]. 最近, Wolf 等将奇点光学的研究对象从单色场扩展到多色场, 指出光谱开关是奇点光学的一类新效应^[2-5]. 在奇点附近出现了不同种类的奇异特性, 例如相位鞍点、位错或光涡旋等. 目前, 多种技术已被应用于产生“奇点光束”, 例如相位掩模^[6,7], 有源激光系统^[8]以及非线性介质中自作用引起的光束波前变形^[9]等. 同时奇点光学也得到了广泛的应用, 如在原子光学中, 作为原子导引, 在生物光学中, 可作为光镊或光学扳手, 等等. Soskin 等人研究了共轴高斯光束合成干涉场中的相位奇点, 分析表明干涉场中的涡旋和拓扑核与振幅比以及束宽有关^[10,11]. 本文在更为一般的情况下研究离轴高斯光束干涉场中的相位奇点、波前结构和光涡旋等问题, 在文献 [1] 的基础上得到了一些新的结果, 文献 [11] 可作为本文的特例.

2. 离轴高斯光束的干涉

满足近轴波动方程的二维离轴高斯光束可表示为^[12]

$$E(x, z) = E_0 \sqrt{\frac{w_0}{w}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{w^2}\right] \times \exp\left\{i\left[\frac{k(x-a)^2}{2R(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_R} + kz + \varphi\right]\right\}, \quad (1)$$

式中 w_0 为束腰宽度, $z_R = kw_0^2/2$ 为瑞利长度, $w = w_0(1+z^2/z_R^2)^{1/2}$ 为束宽, $R(z) = z(1+z^2/z_R^2)$ 是等曲面曲率半径, φ 是初始相位, a 为离轴参数.

为了考察干涉场中的光学奇点, 现考虑两束入射面处相位差为 π , 且光腰位于入射面 $z=0$ 处的离轴高斯光束的干涉, 合成光束在 z 处的场分布可表示为

$$E(x, z) = E_1(x) \exp[i\Phi_1(x, z)] + E_2(x) \exp[i\Phi_2(x, z)], \quad (2)$$

其中

$$\Phi_1(x, z) = \frac{k(x-a)^2}{2R_1(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R1}} + kz + \varphi_1, \quad (3)$$

* 西南交通大学校科学研究基金(批准号 2006B01)资助的课题.

† E-mail: liwang@nec.swjtu.edu.cn

$$\Phi_2(x, z) = \frac{k(x+b)^2}{2R_2(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R2}} + kz + \varphi_2, \quad (4)$$

且 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.

2.1. XZ 平面上涡旋点分布

由于干涉,合成光束在传输中将会出现振幅为

$$x = \frac{(aw_2^2 + bw_1^2) \pm w_1 w_2 \sqrt{(a+b)^2 - (w_2^2 - w_1^2) \ln \left(\eta \sqrt{\frac{w_2}{w_1}} \frac{w_1}{w_2} \right)}}{w_2^2 - w_1^2}, \quad (6)$$

$\eta = E_{02}/E_{01}$ 为控制参数,且相干波之间的相位差为 π ,即

$$\frac{k(x-a)^2}{2R_1(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R1}} - \frac{k(x+b)^2}{2R_2(z)} + \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R2}} = 0. \quad (7)$$

由(7)式可得

$$x = \frac{a(z^2 + z_{R2}^2) + b(z^2 + z_{R1}^2)}{z_{R2}^2 - z_{R1}^2} \pm \sqrt{(z^2 + z_{R1}^2)(z^2 + z_{R2}^2) \left[\frac{(a+b)^2}{(z_{R2}^2 - z_{R1}^2)^2} + \frac{\arctan(z/z_{R1}) - \arctan(z/z_{R2})}{k(z_{R2}^2 - z_{R1}^2)} \right]}. \quad (8)$$

由(6)式和(8)式可知,等振幅线与离轴参数以及控制参数有关,而相位条件仅与离轴参数有关,与控制参数则无关.由图1可以看出当 η 较大(如 $\eta = 0.674$)时,仅在光腰 $z=0$ 处有一个涡旋点;当 η 较小(如 $\eta = 0.672$)时,等振幅线与相消干涉线有三个交点,即 XZ 平面存在三个涡旋点.对于 XZ 平面的左侧也具有类似的情况.

2.2. 轴上涡旋点分布

当 $a=0, b=0$ 时可得两束同轴高斯光束干涉场中光腰处涡旋点表达式为

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{w_{02}^2 w_{01}^2 \ln(1/\eta)}{w_{02}^2 - w_{01}^2}}, \quad (11)$$

(11)式与文献[11]的(3)式相一致.由(10)式可以看出涡旋点位置与光束的离轴参数、束腰宽度以及控制参数 η 有关.当 $\eta = \eta_0 = \exp[(a+b)^2/(w_{02}^2 - w_{01}^2)]$ 时,光腰平面处只有一个涡旋点,且位于 $(aw_{02}^2 + bw_{01}^2)/(w_{02}^2 - w_{01}^2)$ 处;当 $\eta > \eta_0$ 时,没有涡旋点;当 $0 < \eta < \eta_0$ 时,出现两个涡旋点.图2给出了涡旋点

零的点即涡旋点,涡旋处两束干涉波的振幅及相位满足一定的条件,即干涉波的振幅相等

$$E_{01} \sqrt{\frac{w_{01}}{w_1}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{w_1^2}\right] = E_{02} \sqrt{\frac{w_{02}}{w_2}} \exp\left[-\frac{(x+b)^2}{w_2^2}\right], \quad (5)$$

式中, a 和 b 为离轴参数,由(5)式可得

当 $z=0$ 时,由(1)及(2)式可得

$$E(x, z=0) = E_{01} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{w_{01}^2}\right] \exp[i\varphi_1] + E_{02} \exp\left[-\frac{(x+b)^2}{w_{02}^2}\right] \exp[i\varphi_2] \quad (9)$$

式中同样满足 $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.由(9)式可得光腰处,即 $z=0$ 处的涡旋点表达式

$$x_0 = \frac{(aw_{02}^2 + bw_{01}^2) \pm w_{01} w_{02} \sqrt{(a+b)^2 - (w_{02}^2 - w_{01}^2) \ln \eta}}{w_{02}^2 - w_{01}^2}. \quad (10)$$

位置随控制参数 η 的变化,计算参数取 $a=2, b=1, w_{01}=5\sqrt{2}, w_{02}=20\sqrt{2}$.由图2可以看出当 $0 < \eta < \eta_0$ 时,两个涡旋关于 $x_0=2.2$ 对称,且随着 η 的增大,逐渐靠近,当 $\eta = \eta_0 = 1.012$ 时,两个涡旋点相遇.

2.3. 合成光束的波前分布

由(2)式可得合成光束的相位 $\Phi(x, z)$ 满足

$$\tan[\Phi(x, z)] = \frac{\ln[E(x, z)]}{R[E(x, z)]}. \quad (12)$$

利用三角变换,可得

$$\begin{aligned}
 & E_1(x) \sin \left[\frac{k(x-a)^2}{2R_1(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R1}} \right. \\
 & \left. + kz + \varphi_1 - \Phi(x, z) \right] \\
 = & E_2(x) \sin \left[\frac{k(x-a)^2}{2R_2(z)} - \frac{1}{2} \arctan \frac{z}{z_{R2}} \right. \\
 & \left. + kz + \varphi_2 - \Phi(x, z) \right]. \tag{13}
 \end{aligned}$$

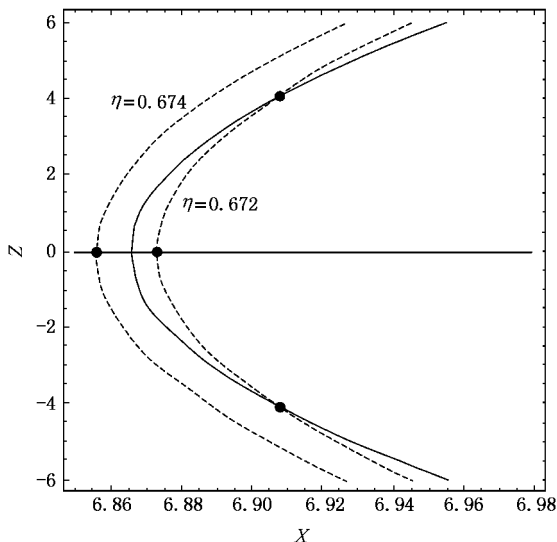


图 1 XZ 平面上的等振幅线(虚线)与相消干涉线(实线)

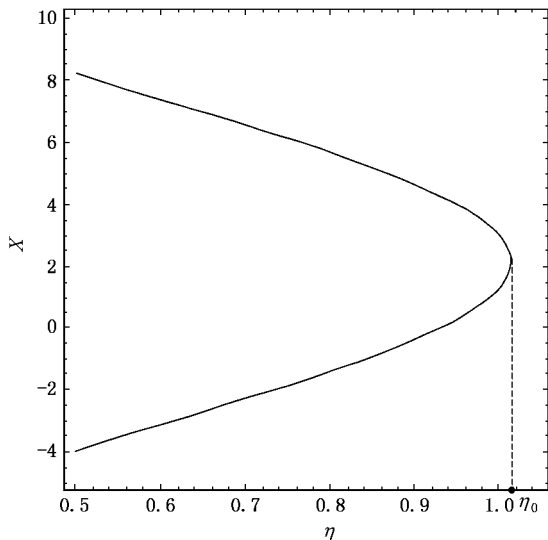


图 2 光腰处涡旋点位置随控制参数的变化

图 3 给出了光腰处合成光束的振幅分布(图 3(a))以及 XZ 平面上波前分布(图 3(b)).其中 $\varphi_1 = \pi/4, E_{01} = 1, E_{02} = 0.8, k = 1$,其他参数与图 2 相同.由图 3(a)可以看出干涉场在 $z = 0$ 处有两个振幅为零的点.由图 3(b)可以看出在光腰前部,波前朝传

输方向突出,而在光腰后部,波前的朝向发生反转;且距离光腰越远,突出越为光滑.由图 3(b)还可以看出涡旋点间隔内出现了波前的缺失,导致涡旋间隔内、外相速度的变化,这是由于 Gouy 效应而引起的^[11].光束的相速度与相位可表示为

$$v_p = \frac{\omega}{d\Phi(x, z)/dz}, \tag{14}$$

其中 $\omega = kc, \Phi(x, z)$ 为相位, c 为光速.由(1)式和(14)式可得光腰处单束离轴高斯光束的相速度

$$v_p = c \left[1 + \frac{(x-a)^2}{2z_R^2} - \frac{1}{2kz_R} \right]^{-1}. \tag{15}$$

由(15)式可知,当 $x = a$ 时,相速度 v_p 取得最大值,且大于 c ;当 $x = a \pm w_0/\sqrt{2}$ 时, $v_p = c$.由(2)式及(14)式可得光腰处两束干涉波相速度相等点的位置表达式

$$\begin{aligned}
 x = & \frac{az_{R2}^2 + bz_{R1}^2}{z_{R2}^2 - z_{R1}^2} \\
 & \pm \sqrt{\left[\frac{(a+b)z_{R1}^2 z_{R2}^2}{(z_{R2}^2 - z_{R1}^2)^2} + \frac{z_{R1} z_{R2}}{k(z_{R2} - z_{R1})} \right]}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

比较(8)式和(16)式可知,相速度相等点的位置与相消干涉线和 X 轴的交点相重合.

对于相消干涉,即两束干涉光束间的相位差为 $(2n+1)\pi$ 时(n 为整数),利用(2)式和(12)式计算整理可得合成光束的相速度

$$v_{\Sigma} = \frac{[E_1(x) - E_2(x)]v_1 v_2}{E_1(x)v_2 - E_2(x)v_1}, \tag{17}$$

其中 v_1, v_2 为离轴高斯光束在光腰处的相速度.对相长干涉, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2n\pi$ (n 为整数),只需将(17)式中的分子及分母的负号改为正号,即可得合成光束的相速度.

3. 离轴高斯光束干涉场中的拓扑反应

图 4 为 XZ 平面右侧等相位线图,图中等相位线间的相位差为 $\pi/4$,计算参数如图 2 所示,图 4 中“●”表示涡旋点;“○”表示相位鞍点.涡旋点处振幅为零,但在相位鞍点处振幅并不为零.由图可以看出多条等相位线通过涡旋点,这说明了涡旋点的相位具有不确定性,其物理解释为涡旋处振幅为零.通过涡旋点的等相位线有一个 π 的跃变,特别地,在光腰处,涡旋点的左侧为波峰($\Phi(x, z=0) = 0$),而其右侧则为波谷($\Phi(x, z=0) = \pi$).由图 4 还可以看出光腰处出现了相位鞍点,等相位线在相位鞍点处发生

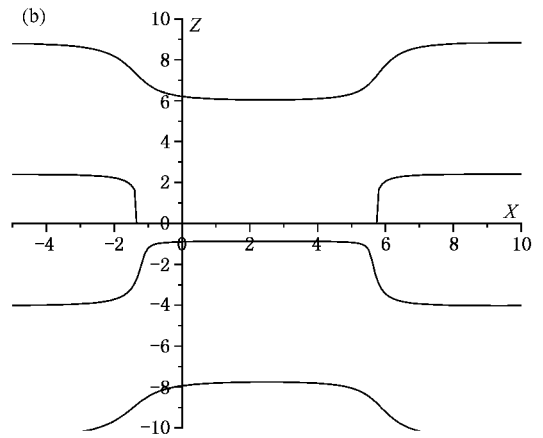
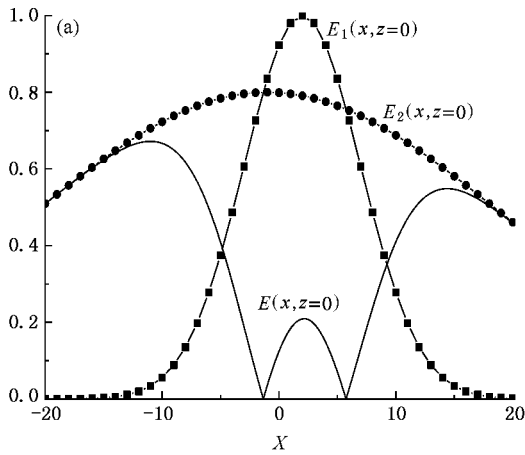


图 3 (a)光腰处合成光束的振幅分布 (b)以及 XZ 平面上波前分布

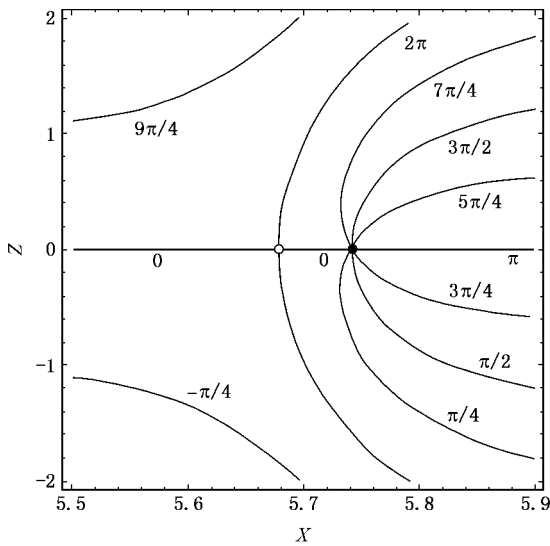


图 4 XZ 平面右侧等相位线图

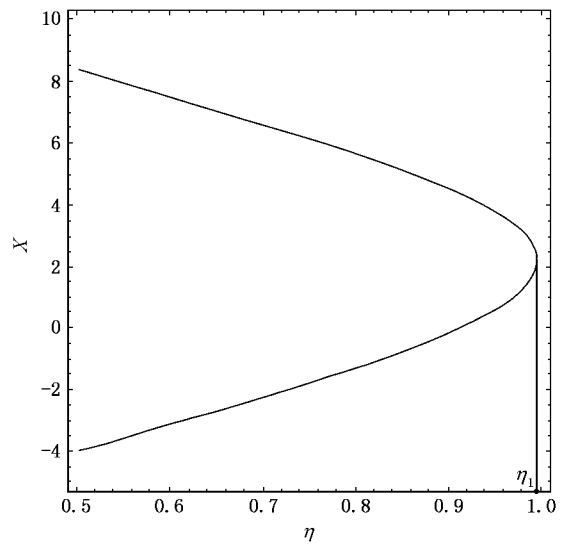


图 5 相位鞍点随控制参数的变化曲线

了分离.由 $\Phi = 0$, 并利用(12)式得到相位鞍点位置 x_s 满足的方程

$$\begin{aligned} & \frac{k(x-a)^2}{2z_{R1}^2} - \frac{1}{2z_{R1}} + k \\ &= \eta \left[\frac{k(x+b)^2}{2z_{R2}^2} - \frac{1}{2z_{R2}} + k \right] \\ & \times \exp \left[\frac{(x-a)^2}{w_{01}^2} - \frac{(x+b)^2}{w_{02}^2} \right], \quad (18) \end{aligned}$$

由(18)式表明相位鞍点位置 x_s 是光束离轴参数、束腰宽度及控制参数的函数.当离轴参数 $a = 0, b = 0$ 时可得两束同轴高斯光束, $\Phi = 0$ 时相位鞍点位置 x_s 满足的方程

$$\frac{kx^2}{2z_{R1}^2} - \frac{1}{2z_{R1}} + k$$

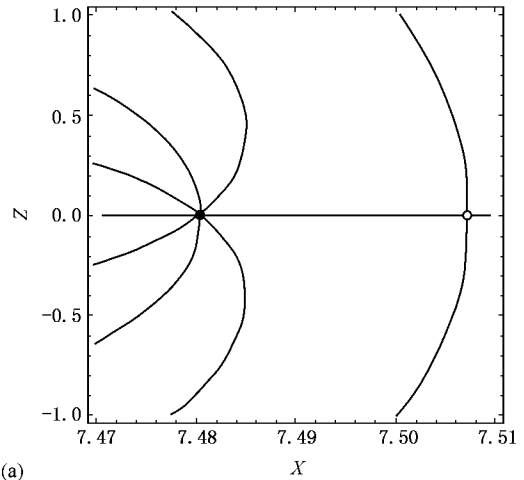
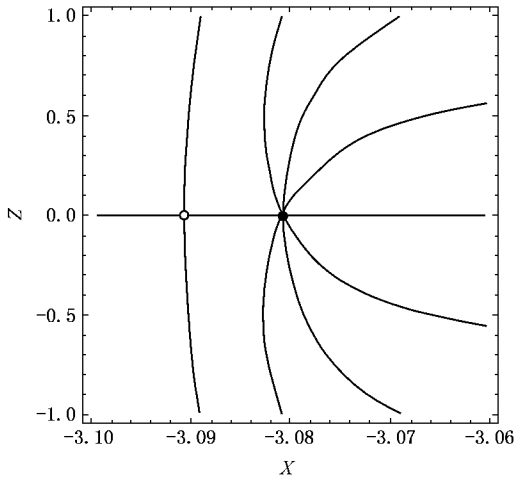
$$= \eta \left[\frac{kx^2}{2z_{R2}^2} - \frac{1}{2z_{R2}} + k \right] \exp \left[\frac{x^2}{w_{01}^2} - \frac{x^2}{w_{02}^2} \right]. \quad (19)$$

(19)式与文献 11 的(7)式结果相一致.图 5 给出了相位鞍点随控制参数的变化曲线.由图可以看出光腰处相位鞍点的个数与控制参数相关,由图 5 可以看出当 $0 < \eta < \eta_1$ 时,两个鞍点随着 η 的增大,逐渐靠近,当 $\eta = \eta_1$ 时,两个鞍点相遇.分析比较(10)式和(18)式与图 2 和图 5 可知,相位鞍点与涡旋点的相对位置与控制参数有关,相位鞍点既可以位于涡旋点的内侧,也可以位于涡旋点的外侧.随着控制参数的增大,相位鞍点与涡旋点将逐渐靠近并重合;当控制参数继续增大时,相位鞍点与涡旋点将再次分离;当 $\eta = \eta_1 = 0.9931$ 时,两个相位鞍点将相遇.由涡旋点相遇时的 x 值及(18)式可知,由于合成光束

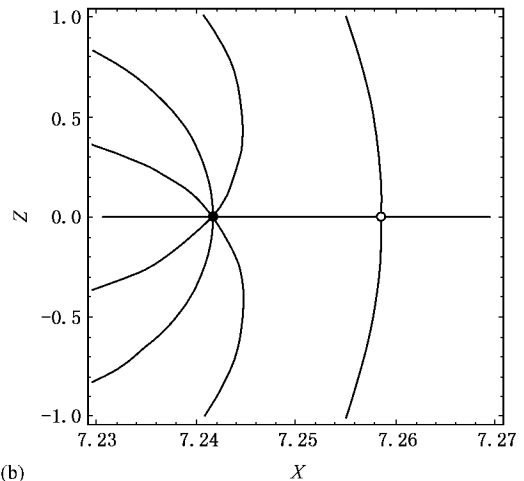
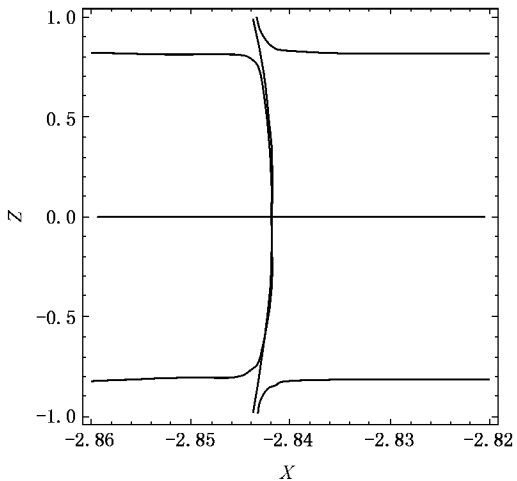
具有离轴度, XZ 平面上相位鞍点相遇时所对应 x 值, 一般情况下与涡旋点相遇时所对应的 x 值不相同. 当 $a = b = 0$ 时, 则相位鞍点和涡旋点都是在 $x = 0$ 处相遇.

将(10)式关于涡旋点 x_{0+} , x_{0-} 的方程代入(19)式, 化简可得

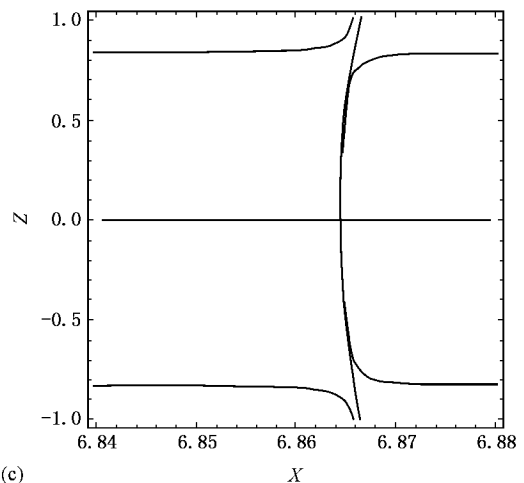
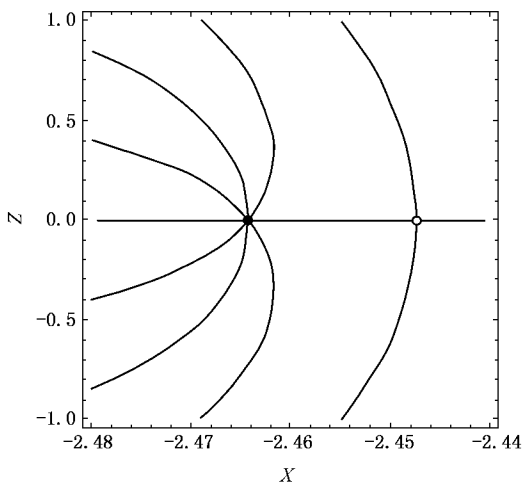
$$\frac{\mathcal{X}(w_{02}^2 + w_{01}^2) \ln \eta}{kw_{01}^2 w_{02}^2} + \frac{\mathcal{X}(a+b) \sqrt{(a+b)^2 - (w_{02}^2 - w_{01}^2)}}{kw_{02} w_{01} (w_{02}^2 - w_{01}^2)} - \frac{\mathcal{X}(w_{02}^2 + w_{01}^2) \mathcal{X}(a+b) - (w_{02}^2 - w_{01}^2)}{kw_{01}^2 w_{02}^2 (w_{02}^2 - w_{01}^2)} = 0. \quad (20)$$



(a)



(b)



(c)

图 6 相位鞍点与涡旋点相遇时的等相位线图 (a) $\eta = 0.6$ (b) $\eta = 0.62836$ (c) $\eta = 0.67306$

由(20)式可知,当

$$\frac{(a+b)\sqrt{(a+b)^2 - (w_{02}^2 - w_{01}^2)\ln\eta}}{kw_{02}w_{01}(w_{02}^2 - w_{01}^2)} = 0 \quad (21)$$

时,左侧的鞍点和涡旋点相遇,右侧的鞍点和涡旋点也相遇.其中,当 $(a+b)=0$ 时,为两束同轴离轴光束的合成情况,即两束光束的离轴参数相等;当 $(a+b)^2 - (w_{02}^2 - w_{01}^2)\ln\eta = 0$ 时,轴上只有一个涡旋点.因此对于两束具有不同离轴度的高斯光束的合成, XZ 平面两侧的相位鞍点与涡旋点的相遇点并不关于 Z 轴对称,且相遇时所对应的 η 值也不相同.

图6为涡旋点(“●”)与相位鞍点(“○”)相遇前后, XZ 平面左右两侧的等相位线图.由图6(a)可以看出当控制参数较小时,涡旋点位于鞍点的内侧,且左侧的相位鞍点与涡旋点之间的距离 Δx_+ 小于右侧的相位鞍点与涡旋点之间的距离 Δx_- ;随着控制

参数的增大,左侧的相位鞍点与涡旋点将比右侧的先相遇,且 Δx_- 相对于图6(a)的将减小,如图6(b)所示.随着控制参数的增大,左侧的相位鞍点与涡旋点将再次分离,且等相位线的方向反向,而右侧的相位鞍点与涡旋点也将逐渐的靠近并相遇,如图6(c)所示.

图7为 XZ 平面上相位鞍点及涡旋点湮没时的等相位线图.图7(a)为鞍点相遇时($\eta = 0.9931$)等相位线图,由图可知相位鞍点在 z 轴上相遇时,涡旋点仍分居于鞍点的两侧.随着控制参数的继续增大($\eta = 1.0089$),沿平行于 z 轴方向分离为上下两个鞍点,且这两个鞍点关于 x 轴对称,同时涡旋点也将逐渐的靠近,如图7(b)所示;当控制参数增大到 $\eta_0 = 1.0123$ 时,涡旋点在 $(aw_{02}^2 + bw_{01}^2)/(w_{02}^2 - w_{01}^2)$ 处($x = 2.2$)相遇,此时鞍点及涡旋点全部湮没,如图7(c)所示.

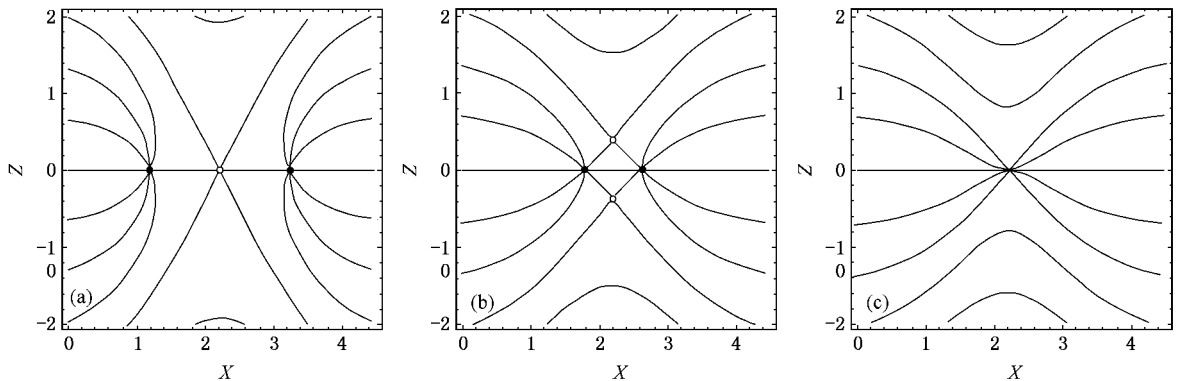


图7 相位奇点湮没时的等相位线图 (a) $\eta = 0.9931$ (b) $\eta = 1.0089$ (c) $\eta = 1.0123$

4. 结 论

本文对两束离轴高斯光束叠加干涉场中的相位奇点、波前结构做了详细分析.研究表明合成相速度与光束的离轴参数及控制参数有关.当控制参数 η 较小时,相位鞍点位于涡旋点的外侧.随着控制参数的增大,相位鞍点与涡旋点将逐渐靠近并重合;当控制参数继续增大时,相位鞍点与涡旋点将再次分离,最终相位鞍点及涡旋点全部湮没.对于离轴光束,

XZ 平面两侧的相位鞍点与涡旋点的相遇点并不关于 Z 轴对称.相遇时所对应的 η 值也不相同;且 XZ 平面上相位鞍点相遇时所对应 x 值,一般情况下与涡旋点相遇时所对应的 x 值不相同.令离轴参数 $a = b = 0$ 时,本文有关公式和物理结论就回到了文献[11]中共轴高斯光束干涉场的有关结果.在实际中光涡旋可用作携带信息的相位,因此光涡旋有望在光互连、光信息处理和计算中得到应用.本文提出的通过改变离轴参数及振幅来控制合成光束的光涡旋的方法值得考虑.

[1] Soskin M S, Vashnetsov M V 2001 *Progress in Optics* **42** 219

[2] Foley J T, Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 2510

[3] Pan L, Lü B D 2004 *Chin. Phys.* **13** 637

[4] Pu J X, Cai C 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1268

[5] Zhao G P, Lü B D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2974 [in Chinese] [赵光普、吕百达 2004 物理学报 **53** 2974]

- [6] Tidwell S ,Kim G ,Kimura W 1993 *Appl. Opt.* **32** 5222
- [7] Beijersbergen M W ,Coerwinkel R P C ,Kristiansen M *et al* 1994 *Opt. Commun.* **112** 321
- [8] Arecchi F T ,Giacomelli G ,Ramazza P L *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3749
- [9] Ackemann T ,Kriege E ,Lange W 1995 *Opt. Commun.* **115** 339
- [10] Soskin M S ,Gorshkov V N ,Vasnetsov M V *et al* 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4064
- [11] Pas'ko V A ,Soskin M S ,Vasnetsov M V 2001 *Opt. Commun.* **198** 49
- [12] Tovar A A ,Caperson L W 1991 *J. Opt. Soc. Am. A* **8** 60

Transversal optical vortex in the interference field of two off-axis Gaussian beams^{*}

Wang Li^{1)†} Wang Qing-Feng¹⁾ Wang Xi-Qing²⁾ Lü Bai-Da³⁾

¹ *Department of Physics , Science College , Southwest Jiaotong University , Chengdu 610031 , China)*

² *Emei School , Southwest Jiaotong University , Chengdu 614202 , China)*

³ *Institute of Laser Physics and Chemistry , Sichuan University , Chengdu 610064 , China)*

(Received 29 March 2006 ; revised manuscript received 27 April 2006)

Abstract

The structure of the wavefront and transversal optical vortices in an interference field of two off-axis Gaussian beams is studied. It is shown that the positions of phase saddles and vortices depend on the off-axis parameter , beam width , phase and relative amplitude of beams. The saddle can be located inside or outside the vortices. For a certain value of the governing parameter , the saddle point coincides with the vortex. For off-axis beams , the encounters of the saddle point and vortex on both sides in the XZ cross-section do not occur at the same governing parameter η . Moreover , the x value corresponding to the encounter of saddle points is not equal to the x value corresponding to the encounter of vortices.

Keywords : singular optics , off-axis parameter , vortex , phase saddle

PACC : 4225

^{*} Project supported by the Foundation of Science and Technology Research of Southwest Jiaotong University , China (Grant No. 2006B01).

[†] E-mail : liwang@nec.swjtu.edu.cn