

带源参数的热传导反问题的无网格方法*

程荣军^{1,2)} 程玉民¹⁾

1) 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

2) 安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

(2007 年 1 月 13 日收到, 2007 年 2 月 4 日收到修改稿)

利用无网格有限点法求带有源参数的一维热传导反问题, 推导了相应的离散方程. 与其他基于网格的方法相比, 有限点法采用移动最小二乘法构造形函数, 只需要节点信息, 不需要划分网格, 用配点法离散求解方程, 可以直接施加边界条件, 不需要在区域内部求积分, 减小了计算量. 用有限点法求解热传导反问题具有数值实现简单、计算量小、可以任意布置节点等优点. 最后通过算例验证了该方法的有效性.

关键词: 热传导反问题, 源参数, 有限点法, 无网格方法

PACC: 0200, 0260, 4410

1. 引 言

热传导反问题是热科学和技术研究的一个重要组成部分, 在航天、核物理、冶金等领域有着广泛的应用背景.

目前对热传导反问题的大量研究都是关于解的唯一性和存在性等方面, 而且对反问题的数值解一般都是采用基于网格的数值方法, 如有限差分法、有限元法等^[1-9]. Dehghan^[10]将径向基函数用于求解热传导反问题. 有限差分法在求解具有规则边界的问题时极为方便, 但是当处理不规则区域时误差很大, 而且由于这类反问题对初值的敏感性, 初值离散化时的很小误差都对结果有很大的影响. 有限元法是将有限差分的离散格式改造成更为灵活的有限单元的离散而形成的, 它简单直观, 计算效率高. 但是有限元法需要对整个求解区域进行网格剖分, 当区域比较复杂时, 尤其在三维空间中生成理想的网格很困难. 在处理大变形、动态裂纹扩展、流固耦合等问题时, 需要进行网格重构, 这不仅要花费大量的计算时间, 而且使求解精度受损, 从而大大降低了有限元法的效率.

与以往的基于网格的方法不同, 无网格方法采用基于点的近似, 不需要在求解区域内划分用来确

定插值函数的网格, 为科学和工程计算带来很大的方便^[11]. 目前发展的无网格方法有无单元 Galerkin 法 (EFGM)^[12]、重构核粒子法 (RKPM)^[13]、有限点法 (FPM)^[14]、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法 (MLPG)^[15]、单位分解法 (PUM)^[16]、点插值法 (PIM)^[17]、最小二乘配点无网格法^[18]、复变量无网格方法^[19]、数值流形无网格方法^[20]以及边界积分方程的无网格方法^[21, 22]等.

有限点法^[14]是采用移动最小二乘法形成形函数、用配点法离散求解方程的一种无网格方法. 和目前已有的无网格方法相比, 有限点法具有可以直接施加边界条件、不需要在区域内部求积分、计算量小等优点, 已经被广泛应用于各个领域.

本文考虑了用有限点法求一类带源参数的热传导反问题. 和其他基于网格的方法相比, 用有限点法求解热传导反问题具有明显的优势, 它只需要节点信息, 不需要网格划分, 可以直接施加边界, 不需要在区域内部求积分, 减少了计算量. 最后通过算例验证了该方法求热传导反问题的有效性和正确性.

2. 有限点法

有限点法^[14]是一种采用移动最小二乘法来构造形函数、用配点法来离散控制方程的无网格方法.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10571118) 和上海市重点学科建设项目 (批准号: Y0103) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: ymcheng@shu.edu.cn; ymcheng@sh163.net

2.1. 移动最小二乘法

移动最小二乘法^[23](MLS)中,取试函数

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

为函数 $u(\mathbf{x})$ 的逼近函数. 这里, $p_i(\mathbf{x})$ 是基函数, m 是基函数的个数, $a_i(\mathbf{x})$ 是相应的系数.

对应于(1)式的整体逼近, Lancaster 和 Salkauskas 在 \mathbf{x} 的邻域内定义局部逼近为

$$u^h(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{\mathbf{x}}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

其中系数 $a_i(\mathbf{x})$ 根据加权最小二乘法来确定, 它使得对函数 $u(\mathbf{x})$ 的局部逼近误差最小.

定义

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

为了得到系数 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 对 J 取极值, 即得

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

其中矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ 分别为

$$\mathbf{A} = \mathbf{p}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{p}, \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{p}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

由(8)式可得

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}. \quad (11)$$

这样, 逼近函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^n \Phi_l^h(\mathbf{x}) u_l = \Phi^h(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (12)$$

其中 $\Phi^h(\mathbf{x})$ 为形函数

$$\begin{aligned} \Phi^h(\mathbf{x}) &= (\Phi_1^h(\mathbf{x}), \Phi_2^h(\mathbf{x}), \dots, \Phi_m^h(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 k 表示基函数中最高阶完备多项式的阶数. 当 $k=0$ 时, $\Phi^0(\mathbf{x})$ 为 Shepard 函数

$$\Phi_l^0(\mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)}{\sum_{l=1}^n u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)}. \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J &= \sum_{l=1}^n u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) [u^h(\mathbf{x}; \mathbf{x}_l) - u(\mathbf{x}_l)]^2 \\ &= \sum_{l=1}^n u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l) \left[\sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}_l) a_i(\mathbf{x}) - u_l \right]^2 \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_l)$ 是具有紧支持性的权函数, \mathbf{x}_l 为点 \mathbf{x} 的紧支域内的节点.

(3)式可用矩阵形式表示为

$$J = (\mathbf{p} \mathbf{a} - \mathbf{u})^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) (\mathbf{p} \mathbf{a} - \mathbf{u}), \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (5)$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ & & \ddots & \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

2.2. 控制方程的离散

考虑如下的偏微分方程

$$A_1(u_j) = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 内} \quad (15)$$

这里边界条件为

$$u_j - \bar{u}_j = 0, \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上} \quad (16)$$

$$B_l(u_j) = 0, \text{ 在 } \Gamma_l \text{ 上} \quad (17)$$

其中 A_1 是定义在区域 Ω 上的微分算子, B_l 是定义在 Neumann 边界条件 Γ_l 上的微分算子, u_j 表示未知变量, \bar{u}_j 表示在 Dirichlet 边界上的给定值, $j=1, 2, \dots, m$, m 是变量的总数. 在固体力学中, u_j 表示位移, A_1 和 B_l 分别表示区域 Ω 上和力边界 Γ_l 上的平衡方程.

(12)式代入(15)–(17)式得

$$A(u^h(x_j)) = 0, j = 1, 2, \dots, n_r, \quad (18a)$$

$$u^h(x_j) - \bar{u}_j = 0, j = 1, 2, \dots, n_u, \quad (18b)$$

$$B(u^h(x_j)) = 0, j = 1, 2, \dots, n_l, \quad (18c)$$

其中 n_r , n_u 和 n_l 分别表示在 Ω 内, Γ_u 和 Γ_l 上的节点个数.

(18)式写成矩阵形式

$$Ku = f, \quad (19)$$

其中 K 是刚度矩阵, u 是节点参数 u_i 的向量, f 为节点上已知量的向量.

3. 热传导反问题的有限点法

本节我们用有限点法求解一维热传导反问题.

考虑如下的求源参数 $p_1(t)$ 的热传导反问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p_1(t)u + \varphi(x, t), \quad (20)$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T.$$

初始条件为

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

边界条件为

$$u(0, t) = g_0(t), 0 < t \leq T, \quad (22)$$

$$u(1, t) = g_1(t), 0 < t \leq T, \quad (23)$$

并且在定点 x_0 有

$$u(x_0, t) = E(t), 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

其中 u 表示温度, f, g_0, g_1, φ, E 为已知函数, p_1 是未知函数.

方程 (20)–(24) 描述了带热源 $p_1(t)$ 的热传导过程.

3.1. 采用的变换

利用如下变换^[8,9]:

$$r(t) = \exp\left(-\int_0^t p_1(s) ds\right), \quad (25)$$

$$u(x, t) = r(t)u(x, t), \quad (26)$$

方程 (20) 变为

$$w_t = w_{xx} + r(t)\varphi(x, t), 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T. \quad (27)$$

初始条件

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq 1. \quad (28)$$

边界条件

$$u(0, t) = r(t)g_0(t), 0 < t \leq T \quad (29)$$

$$u(1, t) = r(t)g_1(t), 0 < t \leq T \quad (30)$$

$r(t)$ 可以由下式得到:

$$r(t) = \frac{u(x_0, t)}{E(t)}. \quad (31)$$

经过这个变换, 源参数消失了, 这样我们可以把 (27)–(31) 式作为正问题来求解.

3.2. 求解方程的建立

在空间域 $[0, 1]$ 上布置 n 个节点 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. 于是 $u(x, t)$ 的逼近函数表示为

$$w^h(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \lambda_i(t), \quad (32)$$

其中 $\Phi_i(x)$ 为第二节中定义的形函数. 把近似函数 (32) 式分别代入 (27) 式和 (28) 式得到

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x_j) \frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2 \Phi_i(x_j)}{dx^2} \lambda_i(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i(x_0)}{E(t)} \varphi(x_j, t) \lambda_i(t), \quad (33)$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i(x_j) \lambda_i(0) = f(x_j), j = 1, 2, \dots, n. \quad (34)$$

(33) 和 (34) 式写成矩阵形式为

$$H \frac{dM}{dt} = (H_1 + C)M, \quad (35)$$

$$M(0) = H^{-1}G, \quad (36)$$

其中

$$M = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))^T, \quad (37)$$

$$G = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))^T, \quad (38)$$

$$H = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \Phi_1(x_2) & \Phi_2(x_2) & \dots & \Phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \Phi_2(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{1,xx}(x_1) & \Phi_{2,xx}(x_1) & \dots & \Phi_{n,xx}(x_1) \\ \Phi_{1,xx}(x_2) & \Phi_{2,xx}(x_2) & \dots & \Phi_{n,xx}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{1,xx}(x_n) & \Phi_{2,xx}(x_n) & \dots & \Phi_{n,xx}(x_n) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$C = \frac{1}{E(t)} \begin{bmatrix} \Phi_1(x_0)\varphi(x_1, t) & \Phi_2(x_0)\varphi(x_1, t) & \dots & \Phi_n(x_0)\varphi(x_1, t) \\ \Phi_1(x_0)\varphi(x_2, t) & \Phi_2(x_0)\varphi(x_2, t) & \dots & \Phi_n(x_0)\varphi(x_2, t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_1(x_0)\varphi(x_n, t) & \Phi_2(x_0)\varphi(x_n, t) & \dots & \Phi_n(x_0)\varphi(x_n, t) \end{bmatrix}. \quad (41)$$

将 (35) 式和 (36) 式看成一个常微分方程组,对 (35) 式进行时间离散可得

$$H \frac{M^{(k+1)} - M^{(k)}}{\Delta t} = (H_1 + C) \frac{M^{(k+1)} + M^{(k)}}{2}, \quad (42)$$

即

$$(2H - \Delta t(H_1 + C))M^{(k+1)} = (2H + \Delta t(H_1 + C))M^{(k)}. \quad (43)$$

利用初始条件 $M(0) = M^{(0)} = H^{-1}G$ 以及边界条件 (29) 式和 (30) 式可以求得 $M^{(i)}, i = 1, 2, \dots, k$. 显然,

$$M^{(k)} = M(t_k) = M(k \cdot \Delta t) = (\lambda_1(t_k), \lambda_2(t_k), \dots, \lambda_n(t_k)). \quad (44)$$

由 (31) 式可得

$$r^h(t) = \frac{w^h(x_0, t)}{E(t)}, \quad (45)$$

从而得到方程 (20)–(24) 的近似解

$$u^h(x, t) = \frac{w^h(x, t)}{r^h(t)}, \quad (46)$$

最后根据 (25) 式得到源参数 $p_1(t)$ 的近似解为

$$p_1^h(t) = - \frac{dr^h(t)/dt}{r^h(t)}. \quad (47)$$

4. 数值算例

为了验证有限点法求解一维热传导反问题的有效性, 本节给出了具体的算例.

考虑如下的热传导反问题^[9,10]:

$$f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x), \quad (48)$$

$$g_0(t) = \exp(-t^2), \quad (49)$$

$$g_1(t) = -\exp(-t^2), \quad (50)$$

$$\varphi(x, t) = (\pi^2 - (t+1)^2) \exp(-t^2) \times (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)), \quad (51)$$

$$E(t) = \sqrt{2} \exp(-t^2), \quad (52)$$

$$x_0 = 0.25, \quad (53)$$

精确解为

$$u(x, t) = \exp(-t^2) (\cos(\pi x) + \sin(\pi x)), \quad (54)$$

$$p_1(t) = 1 + t^2. \quad (55)$$

我们用有限点法求解热传导反问题, 在求解域内均匀布置了 21 个节点. 权函数选为 Gauss 权函数, 基函数取线性基, $\Delta t = 0.0001$. 图 1 给出了源参数 $p_1(t) = t^2 + 1$ 的解析解和数值解. 图 2—6 分别

给出了函数 $u(x, t) = \exp(-t^2) (\cos(\pi x) + \sin(\pi x))$ 在 $t = 0.1, 0.4, 0.6, 0.7, 1$ 处的解析解和数值解.

通过图 1—6 可以看出, 用有限点法求热传导反问题得到的数值解和解析解吻合得很好.

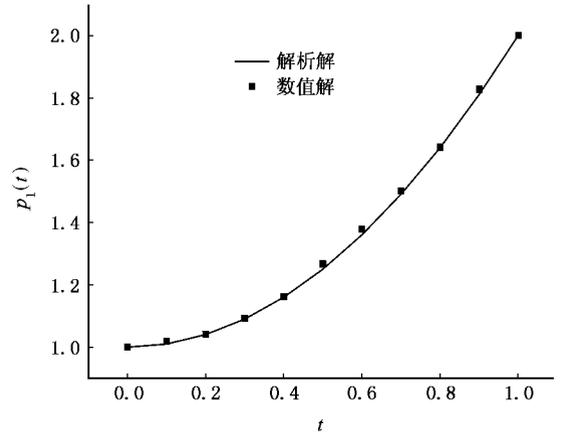


图 1 源参数 $p_1(t)$ 的数值解和解析解的比较

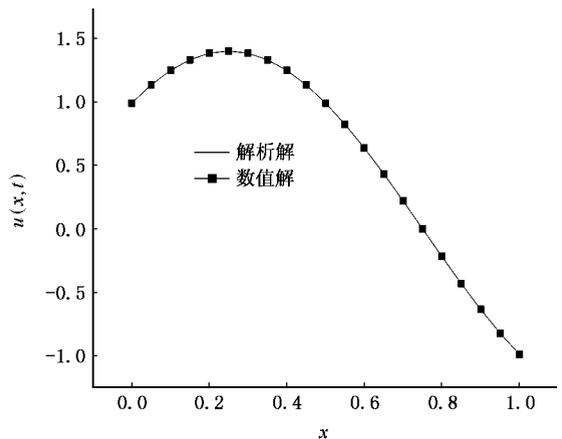


图 2 $u(x, t)$ 在 $t = 0.1$ 处的数值解和解析解的比较

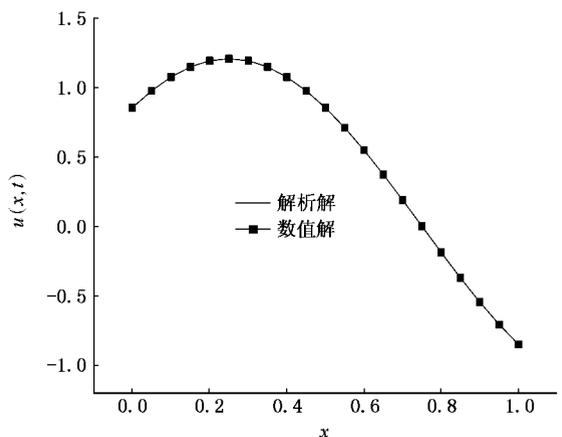
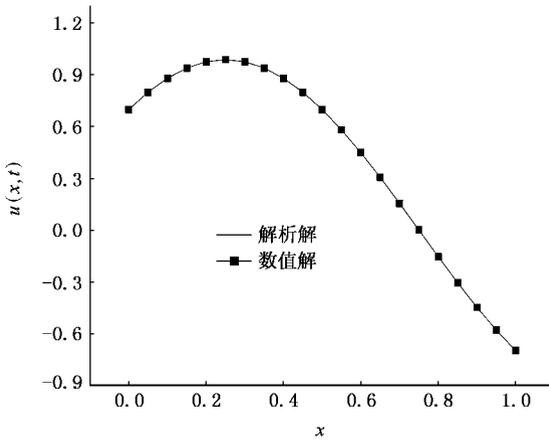
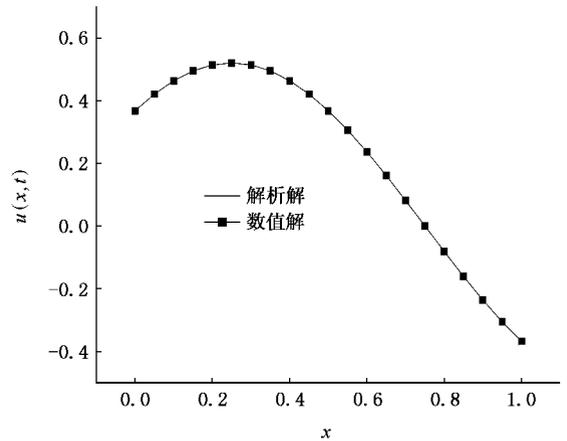
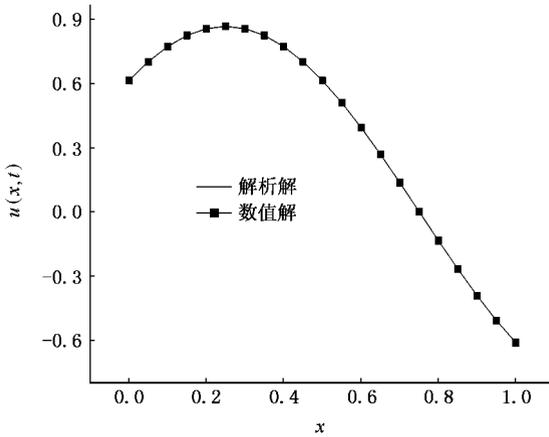


图 3 $u(x, t)$ 在 $t = 0.4$ 处的数值解和解析解的比较

图4 $u(x, t)$ 在 $t = 0.6$ 处的数值解和解析解的比较图6 $u(x, t)$ 在 $t = 1$ 处的数值解和解析解的比较图5 $u(x, t)$ 在 $t = 0.7$ 处的数值解和解析解的比较

5. 结 论

本文利用有限点法求带源参数的热传导反问题. 和其他基于网格的方法, 如有限元、差分法、边界元等数值方法相比, 有限点法在构造近似函数的时候, 不需要划分网格, 只需要节点, 对需要进行网格重构和具有复杂区域的问题而言, 有限点法具有较大的优势. 用配点法来离散方程组, 可以直接施加边界条件, 不需要在区域内求积分, 大大减少了计算量. 用有限点法求带源参数的热传导反问题具有可以任意布置节点、实现简单、计算量小等优点. 最后通过具体算例验证了本文方法的有效性.

- [1] Cannon J R, Lin Y, Xu S 1994 *Inverse Problems* **10** 227
- [2] Cannon J R, Lin Y 1990 *Numer. Meth. Part. Differ. Eq.* **2** 177
- [3] Cannon J R, Lin Y 1990 *J. Math. Anal. and Appl.* **145** 470
- [4] Cannon J R, Lin Y, Wang S 1992 *Meccanica* **27** 85
- [5] Macbain J A, Bendar J B 1986 *J. Math. Phys.* **27** 645
- [6] Wang S, Lin Y 1989 *Inverse Problem* **5** 631
- [7] Dehghan M 2003 *Math. Comput. Simulation* **61** 89
- [8] Dehghan M 2002 *Int. J. Engin. Sci.* **40** 433
- [9] Dehghan M 2003 *Appl. Math. Comput.* **135** 491
- [10] Dehghan M 2006 *Math. Comput. Model.* **44** 1160
- [11] Belytschko T, Krongauz Y 1996 *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.* **139** 3
- [12] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L 1994 *Inter. J. Num. Meth. Engin.* **37** 229
- [13] Liu W K, Jun S, Li S, Belytschko T 1995 *Inter. J. Num. Meth. Fluid* **38** 1655
- [14] Onate E, Idelsohn S R, Zienkiewicz O C, Taylor R L 1996 *Inter. J. Num. Meth. Engin.* **39** 3839
- [15] Atluri S N, Zhu T 1998 *Comput. Mech.* **22** 117
- [16] Babuška I, Melenk J M 1997 *Comp. Meth. Appl. Mech. Engin.* **40** 727
- [17] Liu G R, Gu Y T 2001 *Inter. J. Num. Meth. Engin.* **50** 937
- [18] Zhang X, Liu X, Song K 2001 *Inter. J. Num. Meth. Engin.* **51** 1089
- [19] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民、李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [20] Li S C, Cheng Y M 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 496 (in Chinese) [李树忱、程玉民 2004 力学学报 **36** 496]
- [21] Qin Y X, Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3215 (in Chinese) [秦义校、程玉民 2006 物理学报 **55** 3215]
- [22] Dai B D, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 [戴保东、程玉民 2007 物理学报 **56** 597]
- [23] Lancaster P, Salkauskas K 1981 *Math. Comput.* **37** 141

The meshless method for solving the inverse heat conduction problem with a source parameter^{*}

Cheng Rong-Jun^{1 2)} Cheng Yu-Min¹⁾†

1) (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, China*)

2) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

(Received 13 January 2007 ; revised manuscript received 4 February 2007)

Abstract

In this paper, the finite point method is used to obtain the solution of a one-dimensional inverse heat conduction problem with a source parameter, and the corresponding discrete equations are obtained. Compared with the numerical methods based on mesh, the finite point method only needs the scattered nodes instead of meshing the domain of the problem. The finite point method is a meshless method in which the moving least-square approximation is used to form the meshless approximation functions. And the collocation method is used to discretize the governing partial differential equations. The finite point method has the advantages of simpler numerical procedures, lower computation cost and arbitrary nodes. The result of a numerical example is presented to show the method is effective.

Keywords : inverse heat conduction problem, source parameter, the finite point method, meshless method

PACC : 0200, 0260, 4410

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10571118) and the Shanghai Leading Academic Discipline Program (Grant No. Y0103).

† Corresponding author. E-mail : ymcheng@shu.edu.cn ; ymcheng@sh163.net