第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/5580-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.10,October,2007
©2007 Chin. Phys. Soc.

Lagrange 系统一类新型的非 Noether 绝热不变量——Lutzky 型绝热不变量*

罗绍凯†

(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)
(先进纺织材料与制备技术教育部重点实验室(浙江理工大学),杭州 310018)

(2007 年 5 月 17 日收到;2007 年 6 月 2 日收到修改稿)

研究了 Lagrange 系统的 Lie 对称性摄动与新型的非 Noether 绝热不变量. 列出了未受扰 Lagrange 系统的 Lie 对称性导致的 Lutzky 型精确不变量.基于力学系统的高阶绝热不变量的定义,研究在小扰动作用下 Lagrange 系统 Lie 对称性的摄动,得到了系统的一类 Lutzky 形式的绝热不变量.举例说明方法和结果的应用.

关键词:分析力学,Lagrange 系统,对称性,摄动
PACC:0320,0220,1130

1. 引 言

对称性的摄动与绝热不变量在现代数学、力学和物理学中扮演着重要的角色[1—8]. 经典的绝热不变量是指在系统的某参数缓慢变化时,比该参数的变化改变的更缓慢的某一物理量;绝热不变量又称缓渐不变量或浸渐不变量[8]. 实际上,参数缓慢变化等同于小扰动的作用. 近年来,力学系统对称性的摄动与绝热不变量的研究已经取得了一些重要成果,文献[3,7—18]研究了 Noether 形式的绝热不变量,文献[19—24]研究了 Hojman 形式的绝热不变量. 本文基于力学系统的高阶绝热不变量的定义,研究 Lagrange 力学系统在小扰动作用下的 Lie 对称性的摄动,提出并得到了一类新型的非 Noether 形式的绝热不变量——Lutzky 形式的绝热不变量.

2. Lie 对称性与 Lutzky 型精确不变量

非奇异 Lagrange 系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数. 由方程(1)可解出广义加速度

$$\ddot{q}_s=\frac{M_{sk}}{D}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\partial t}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k\partial q_j}\dot{q}_j\right), \tag{2}$$

由方程(2)可以直接得到一个反映系统内在结构性质的基本关系式

$$\frac{\partial \ddot{q}_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D=0 \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中

$$D=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0, \tag{4}$$

M_{sk} 是行列式 D 中元素 $\partial^2 L/\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k$ 的代数余子式. 如果由方程(1)解得

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{5}$$

则基本关系式(3)给出

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D=0 \qquad (s=1,\cdots,n). \tag{6}$$

取时间不变的特殊无限小变换

$$t^*=t,\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s^0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n), \tag{7}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_s^0 为无限小生成元. 取无限小生成元向量

$$X_0^{(0)}=\xi_s^0\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{8}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10372053,10472040)资助的课题.

† E-mail:mmmplsk@163.com

及其一次扩张

$$X_0^{(1)} = \xi_s^0 \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s^0 \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{9}$$

则方程(3)在无限小变换(6)下的不变性归为如下的 Lie 对称性确定方程：

$$\ddot{\xi}_s^0 = X_0^{(1)}(\alpha_s). \tag{10}$$

定理 1[25] 对于 Lagrange 系统(1)，如果无限小变换(7)的生成元 ξ_s^0 满足确定方程(10)，则未受扰 Lagrange 系统的 Lie 对称性直接导致 Lutzky 形式的精确不变量

$$I_0 = \frac{\partial \xi_s^0}{\partial q_s} + \frac{\partial \dot{\xi}_s^0}{\partial \dot{q}_s} + X_0^{(1)}(\ln D) = \text{const}. \tag{11}$$

证明 容易验证，对于任意函数 $\phi(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，如果无限小生成元 ξ_s^0 满足 Lie 对称性确定方程(10)，则如下关系成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_0^{(1)}(\phi) = X_0^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\right), \tag{12}$$

由确定方程(10)，并注意到关系式(6)和(12)，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I_0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \xi_s^0}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \dot{\xi}_s^0}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X_0^{(1)}(\ln D) \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left[\ddot{\xi}_s^0 - X_0^{(1)}(\alpha_s)\right] \\ &\quad + X_0^{(1)}\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

于是，系统存在精确不变量(11)．它揭示了未受扰 Lagrange 力学系统的 Lie 对称性与不变量之间的关系．

3．对称性的摄动与一类新型绝热不变量

定义 1[8] 若 $I_z(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \varepsilon)$ 是力学系统的一个含有小参数 ε 的最高次幂为 z 的物理量，其对时间 t 的一阶导数正比于 ε^{z+1}，则称 I_z 为力学系统的 z 阶绝热不变量．

假设 Lagrange 力学系统(1)受到小扰动 εW_s 的作用，则系统的运动微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon W_s \qquad (s = 1, \cdots, n), \tag{13}$$

由方程(13)可解出广义加速度

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon \frac{M_{sk}}{D} W_k \qquad (s = 1, \cdots, n). \tag{14}$$

在小扰动 εW_s 的作用下，系统原有的运动状态会相应地发生改变．扰动方程(14)是在未受扰方程(5)的基础上发生的，由(14)式和基本关系式(3)容易给出

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D} W_k\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D = 0. \tag{15}$$

假设扰动后的无限小生成元 ξ_s 是在系统无扰动的对称性变换生成元基础上发生的小摄动，有

$$\xi_s = \xi_s^0 + \varepsilon \xi_s^1 + \varepsilon^2 \xi_s^2 + \cdots, \tag{16}$$

无限小生成元向量及其一次扩张为

$$X^{(0)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{17}$$

$$X^{(1)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{18}$$

将(16)式代入(18)式，有

$$X^{(1)} = \varepsilon^m X_m^{(1)} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{19}$$

其中

$$X_m^{(1)} = \xi_s^m \frac{\partial}{\partial q_s} + \dot{\xi}_s^m \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{20}$$

扰动后的运动方程(14)在无限小变换下的不变性归为如下的 Lie 对称性确定方程：

$$\ddot{\xi}_s = X^{(1)}(\alpha_s) + \varepsilon X^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D} W_k\right). \tag{21}$$

将(16)和(19)式代入(21)式，并比较等式两边 ε^m 的系数，有

$$\ddot{\xi}_s^m = X_m^{(1)}(\alpha_s) + X_{m-1}^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D} W_k\right), \tag{22}$$

式中 $m = 0$ 时，约定 $\xi_s^{-1} = 0$．

定理 2 对于受到小扰动 εW_s 作用的 Lagrange 系统，如果生成元 ξ_s^m 满足确定方程(22)，则 Lagrange 系统存在一类 Lutzky 形式的高阶绝热不变量，形如

$$I_z = \sum_{m=0}^{z} \varepsilon^m \left[\frac{\partial \xi_s^m}{\partial q_s} + \frac{\partial \dot{\xi}_s^m}{\partial \dot{q}_s} + X_m^{(1)}(\ln D)\right]. \tag{23}$$

证明 容易验证，对于任意函数 $\phi(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，如果无限小生成元 ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(21)，则如下关系成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X^{(1)}(\phi) = X^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\right), \tag{24}$$

由(19)和(24)式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_m^{(1)}(\ln D) = X_m^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D\right). \tag{25}$$

由确定方程(21),经过直接的运算,我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\partial\dot{\xi}_s}{\partial\dot{q}_s}\right)-X^{(1)}\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}\right)-\varepsilon X^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left[\ddot{\xi}_s-X^{(1)}(\alpha_s)-\varepsilon X^{(1)}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\\&=0.\end{aligned} \tag{26}$$

将(16)和(19)式代入(26)式,并令等式两边 ε^m 的系数分别相等,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\xi_s^m}{\partial q_s}+\frac{\partial\dot{\xi}_s^m}{\partial\dot{q}_s}\right)-X_m^{(1)}\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}\right)\\&-X_{m-1}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]=0.\end{aligned} \tag{27}$$

由确定方程(22),并注意到关系式(15),(25)和(27),我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I_z&=\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_s^m}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\dot{\xi}_s^m}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_m^{(1)}(\ln D)\right]\\&=\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\left\{X_m^{(1)}\left(\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}\right)+X_{m-1}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]+X_m^{(1)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln D\right)\right\}\\&=\sum_{m=0}^{z}\varepsilon^m\left\{X_{m-1}^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]-\varepsilon X_m^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right]\right\}\\&=-\varepsilon^{z+1}X_z^{(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{M_{sk}}{D}W_k\right)\right].\end{aligned} \tag{28}$$

因此,I_z 为 Lagrange 系统的一个 z 阶绝热不变量. 证毕.

4. 说明性算例

二自由度系统的 Lagrange 函数为[26]

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2, \tag{29}$$

下面试研究系统的 Lie 对称性的摄动与绝热不变量.

无扰动方程(1)给出

$$\ddot{q}_1=0=\alpha_1,\ \ddot{q}_2=-1=\alpha_2. \tag{30}$$

系统 Lie 对称性的确定方程(9)给出

$$\ddot{\xi}_1^0=0,\ \ddot{\xi}_2^0=0, \tag{31}$$

(31)式有解

$$\begin{aligned}&\xi_1^0=(q_1-\dot{q}_1t)\left(q_2-\dot{q}_2t-\frac{1}{2}t^2\right),\\&\xi_2^0=0,\end{aligned} \tag{32}$$

根据定理 1,系统存在如下的精确不变量

$$I_0=q_2-\dot{q}_2t-\frac{1}{2}t^2=\mathrm{const}. \tag{33}$$

下面研究系统的绝热不变量. 假设系统受到的小扰动为

$$\varepsilon W_1=-\varepsilon\dot{q}_1,\ \varepsilon W_2=\varepsilon\dot{q}_1, \tag{34}$$

扰动方程(12)给出

$$\ddot{q}_1=-\varepsilon\dot{q}_1,\ \ddot{q}_2=-1+\varepsilon\dot{q}_1. \tag{35}$$

确定方程(22)给出

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_1^m+\dot{\xi}_1^{m-1}=0,\ddot{\xi}_2^m=0\\&(m=0,1,2,\cdots),\end{aligned} \tag{36}$$

其中,当 $m=0$ 时,约定 $\xi_1^{-1}=0$. 当 $m=1$ 时,方程(36)给出

$$\ddot{\xi}_1^1=0,\ddot{\xi}_2^1=0, \tag{37}$$

(37)式有解

$$\begin{aligned}&\xi_1^1=(\dot{q}_1+\dot{q}_2+t)\left(q_1+q_2+\frac{1}{2}t^2\right),\\&\xi_2^1=(\dot{q}_1+\dot{q}_2+t)\left(q_1+q_2+\frac{1}{2}t^2\right).\end{aligned} \tag{38}$$

由(32)和(38)式,根据定理 2,系统存在一阶 Lutzky 型绝热不变量,形如

$$I_1=\left(q_2-\dot{q}_2t-\frac{1}{2}t^2\right)+6\varepsilon(\dot{q}_1+\dot{q}_2+t). \tag{39}$$

5. 结 论

本文研究了 Lagrange 系统的 Lie 对称性的摄动,

得到了系统的一类新型的非 Noether 形式的绝热不变量，即 Lutzky 形式的绝热不变量. 这类由系统的 Lie 对称性的摄动直接得到的绝热不变量，不需要任何附加的条件.

本文的方法和结果对于对称性的摄动与绝热不变量的研究具有基本的意义，有可能直接推广到群的一般无限小变换下的 Lie 对称性的摄动，或者类比到 Lie 点对称性的摄动，也有可能推广到其他类型的约束力学系统，逐步成为一类通用性的绝热不变量.

[1] Burgers J M 1917 *Ann. Phys. Lpz.* **52** 195

[2] Kruskal M 1962 *J. Math. Phys.* **3** 806

[3] Djukic D J S 1981 *Int. J. Non-Linear Mech.* **16** 489

[4] Notte J，Falans J，Chu R，Wurtele J S 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 3900

[5] Ostrovsky V N，Prudov N V 1995 *J. Phys.* B **20** 4435

[6] Wang L，Kevorkian J 1996 *Phys. Plasma* **3** 1162

[7] Zhao Y Y，Mei F X 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 207(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1996 力学学报 **28** 207]

[8] Mei F X，Liu D，Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press) p728 (in Chinese) [梅凤翔、刘　端、罗　勇 1991 高等分析力学(北京：北京理工大学出版社)第 728 页]

[9] Chen X W，Zhang R C，Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **16** 282

[10] Chen X W，Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 721

[11] Chen X W，Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 131

[12] Chen X W，Shang M，Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 997

[13] Chen X W，Li Y M 2005 *Chin. Phys.* **14** 663

[14] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666(in Chinese)[张　毅 2002 物理学报 **51** 1666]

[15] Zhang Y，Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2368(in Chinese)[张　毅 2003 物理学报 **52** 2368]

[16] Qiao Y F，Li R J，Sun D N 2005 *Chin. Phys.* **14** 1919

[17] Fu J L，Chen L Q，Xie F P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2664 (in Chinese)[傅景礼、陈立群、谢凤萍 2003 物理学报 **52** 2664]

[18] Chen X W，Li Y M，Zhao Y H 2005 *Phys. Lett.* A **337** 274

[19] Zhang Y，Fan C X，Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3237 (in Chinese) [张　毅、范存新、梅凤翔 2002 物理学报 **55** 3237]

[20] Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3833(in Chinese)[张　毅 2006 物理学报 **55** 3833]

[21] Zhang Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 1935

[22] Luo S K，Guo Y X 2007 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing，China) **47** 133

[23] Zhang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1855(in Chinese)[张　毅 2007 物理学报 **56** 1855]

[24] Xia L L，Li Y C 2007 *Chin. Phys.* **16** 1516

[25] Lutzky M 1995 *J. Phys. A：Math. Gen.* **28** L637

[26] Mei F X，Xu X J 2005 *Chin. Phys.* **14** 449

A new type of non-Noether adiabatic invariants, i.e. adiabatic invariants of Lutzky type, for Lagrangian systems*

Luo Shao-Kai†

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou* 310018, *China*)

(*Key Laboratory of Advanced Textile Materials and Manufacturing Technology* (*Zhejiang Sci-Tech University*), *Ministry of Education*, *Hangzhou* 310018, *China*)

(Received 17 May 2007; revised manuscript received 2 June 2007)

Abstract

The perturbation of Lie symmetries and new non-Noether adiabatic invariants for the Lagrangian system are studied. The exact invariants of Lutzky type arising from the Lie symmetries of Lagrangian system without perturbation are given. Based on the definition of high-order adiabatic invariants of a mechanical system, the perturbation of Lie symmetries for Lagrangian system under the action of small disturbances is investigated, and a type of Lutzky adiabatic invariants of the system are obtained. An example is given to illustrate the application of the method and results.

Keywords: analytical mechanics, Lagrangian system, symmetry, perturbation

PACC: 0320, 0220, 1130

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10372053, 10472040).

† E-mail: mmmplsk@163.com