第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/5585-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.10,October,2007
©2007 Chin.Phys.Soc.

组合 KdV-mKdV 方程的 Jacobi 椭圆函数解*

潘军廷 龚伦训†

(贵州师范大学理学院,贵阳 550001)

(2006 年 9 月 6 日收到;2007 年 1 月 30 日收到修改稿)

对第一类椭圆方程进行新形式的函数展开,构造出非线性波动方程新的 Jacobi 椭圆函数解.将该方法应用于组合 KdV-mKdV 方程,得到方程新的 Jacobi 椭圆函数解,并列出一些具体的解和作出相应的图形.

关键词:第一类椭圆方程,Jacobi 椭圆函数,组合 KdV-mKdV 方程,行波解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

寻找非线性波动方程的精确解在非线性科学中占有非常重要的地位.近年来,人们提出了许多方法,如齐次平衡法[1—5]、双曲正切函数展开法[6—8]、sine-cosine方法[9]等.最近,刘式适等[10—16]提出了 Jacobi 椭圆函数展开法并求得了一大类非线性波动方程的周期解;张善卿等[17]利用秩的概念扩充了 Jacobi 椭圆函数展开法的应用范围;郭冠平等[18]、沈守枫等[19]、石玉仁等[20]以及吕大昭[21]分别推广了 Jacobi 椭圆函数展开法的展开形式;刘官厅等[22]和韩兆秀[23]将在行波变换下的 Jacobi 椭圆函数展开法推广到一般函数变换下进行;Zhu 等[24]的方法的关键在于将展开项的指数从 $-n$ 扩展到 n;Peng 用修正影射法[25]得到了(2+1)维破裂孤子方程的解.本文在以上文献的启发下,结合文献[26],对第一类椭圆方程进行新形式的函数展开,构造出非线性波动方程新的 Jacobi 椭圆函数解,并对组合 KdV-mKdV 方程求解.

2. 方法简述

考虑非线性波动方程

$$N(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

寻求它的行波解为

$$u = u(\xi),\ \xi = k_1 x + k_2 t, \tag{2}$$

其中 $k_j\,(j=1,2)$ 为待定的波参数.

把(2)式代入(1)式,(1)式可约化为如下的常微分方程:

$$K(u, \mathrm{d}u/\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\xi^2, \cdots) = 0. \tag{3}$$

由文献[26],并进一步将展开项的指数从 $-n$ 扩展到 n,假设方程(3)具有如下新形式的函数展开解:

$$u(\xi) = \sum_{i=-n}^{n} [A_i f^i(\xi) + B_i f^{i-1}(\xi) f'(\xi)], \tag{4}$$

其中,A_i,B_i 为待定常数,$f'(\xi)$ 是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} f(\xi)$,$n$ 的值由领头项分析法[27]确定.

(4)式中 $f(\xi)$ 满足第一类椭圆方程[28]:

$$(f')^2 = h_0 + h_2 f^2 + h_4 f^4, \tag{5a}$$

即

$$f' = e\sqrt{h_0 + h_2 f^2 + h_4 f^4}, \tag{5b}$$

其中,$e = \pm 1$;h_0,h_2,h_4 为待定常数,适当选取这些常数的值,可使方程(5)的解 $f(\xi)$ 为 Jacobi 椭圆函数[29,30].

把(4)式代入(3)式并结合(5)式可得到一关于 $f(\xi)$ 的多项式方程.化简该方程后,令

$$f^p (f')^q$$
$$(p = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots;\ q = 0, 1,) \tag{6}$$

的系数为 0,就得到一包含所有待定常数 A_i,B_i,h_0,h_2,h_4,k_j 的非线性代数方程组,解此方程组就可以得到方程(1)的 Jacobi 椭圆函数解.

---

* 贵州省科学技术基金(批准号:20072009)资助的课题.

† 通讯联系人.E-mail:glx3097@sina.com

3. 组合 KdV-mKdV 方程的 Jacobi 椭圆函数解

考虑如下形式的组合 KdV-mKdV 方程[14]

$$u_t + (\alpha u + \beta u^2) u_x + \gamma u_{xxx} = 0. \tag{7}$$

把(2)式代入(7)式得

$$k_1^3 \gamma u''' + k_2 u' + k_1 \alpha u u' + k_1 \beta u^2 u' = 0. \tag{8}$$

(8)式两边同时对 ξ 积分一次得

$$Au'' + Bu + Cu^2 + Du^3 = C_0, \tag{9}$$

其中,$A = k_1^3 \gamma$,$B = k_2$,$C = k_1 \alpha/2$,$D = k_1 \beta/3$,C_0 为积分常数.

对(9)式,由领头项分析法得平衡常数

$$n = 1. \tag{10}$$

故由(4),(10)式得方程(7)的解为

$$u(\xi) = A_0 + A_{-1} f^{-1} + A_1 f + B_{-1} f^{-2} f' + B_0 f^{-1} f' + B_1 f'. \tag{11}$$

由上述方法,把(11)式代入(9)式并利用(5)式(以 $e = 1$ 为例),可得到如下的代数方程组:

$$A_0 B + A_0^2 C + 2A_1 A_{-1} C - C_0 + A_0^3 D + 6A_0 A_1 A_{-1} D + B_1^2 Ch_0 + 6A_1 B_0 B_1 Dh_0 + 3A_0 B_1^2 Dh_0 + B_0^2 Ch_2 + 2B_1 B_{-1} Ch_2 + 3A_0 B_0^2 Dh_2 + 6A_{-1} B_0 B_1 Dh_2 + 6A_1 B_0 B_{-1} Dh_2 + 6A_0 B_1 B_{-1} Dh_2 + B_{-1}^2 Ch_4 + 6A_{-1} B_0 B_{-1} Dh_4 + 3A_0 B_{-1}^2 Dh_4 = 0,$$

$$3A_{-1} B_{-1}^2 Dh_0 = 0,$$

$$B_{-1}^2 Ch_0 + 6A_{-1} B_0 B_{-1} Dh_0 + 3A_0 B_{-1}^2 Dh_0 = 0,$$

$$A_{-1}^3 D + 2AA_{-1} h_0 + 2B_0 B_{-1} Ch_0 + 3A_{-1} B_0^2 Dh_0 + 6A_0 B_0 B_{-1} Dh_0 + 6A_{-1} B_1 B_{-1} Dh_0 + 3A_1 B_{-1}^2 Dh_0 + 3A_{-1} B_{-1}^2 Dh_2 = 0,$$

$$A_{-1}^2 C + 3A_0 A_{-1}^2 D + B_0^2 Ch_0 + 2B_1 B_{-1} Ch_0 + 3A_0 B_0^2 Dh_0 + 6A_{-1} B_0 B_1 Dh_0 + 6A_1 B_0 B_{-1} Dh_0 + 6A_0 B_1 B_{-1} Dh_0 + B_{-1}^2 Ch_2 + 6A_{-1} B_0 B_{-1} Dh_2 + 3A_0 B_{-1}^2 Dh_2 = 0,$$

$$A_{-1} B + 2A_0 A_{-1} C + 3A_0^2 A_{-1} D + 3A_1 A_{-1}^2 D + 2B_0 B_1 Ch_0 + 3A_1 B_0^2 Dh_0 + 6A_0 B_0 B_1 Dh_0 + 3A_{-1} B_1^2 Dh_0 + 6A_1 B_1 B_{-1} Dh_0 + AA_{-1} h_2 + 2B_0 B_{-1} Ch_2 + 3A_{-1} B_0^2 Dh_2 + 6A_0 B_0 B_{-1} Dh_2 + 6A_{-1} B_1 B_{-1} Dh_2 + 3A_1 B_{-1}^2 Dh_2 + 3A_{-1} B_{-1}^2 Dh_4 = 0,$$

$$A_1 B + 2A_0 A_1 C + 3A_0^2 A_1 D + 3A_1^2 A_{-1} D + 3A_1 B_1^2 Dh_0 + AA_1 h_2 + 2B_0 B_1 Ch_2 + 3A_1 B_0^2 Dh_2 + 6A_0 B_0 B_1 Dh_2 + 3A_{-1} B_1^2 Dh_2 + 6A_1 B_1 B_{-1} Dh_2 + 2B_0 B_{-1} Ch_4 + 3A_{-1} B_0^2 Dh_4 + 6A_0 B_0 B_{-1} Dh_4 + 6A_{-1} B_1 B_{-1} Dh_4 + 3A_1 B_{-1}^2 Dh_4 = 0,$$

$$A_1^2 C + 3A_0 A_1^2 D + B_1^2 Ch_2 + 6A_1 B_0 B_1 Dh_2 + 3A_0 B_1^2 Dh_2 + B_0^2 Ch_4 + 2B_1 B_{-1} Ch_4 + 3A_0 B_0^2 Dh_4 + 6A_{-1} B_0 B_1 Dh_4 + 6A_1 B_0 B_{-1} Dh_4 + 6A_0 B_1 B_{-1} Dh_4 = 0,$$

$$A_1^3 D + 3A_1 B_1^2 Dh_2 + 2AA_1 h_4 + 2B_0 B_1 Ch_4 + 3A_1 B_0^2 Dh_4 + 6A_0 B_0 B_1 Dh_4 + 3A_{-1} B_1^2 Dh_4 + 6A_1 B_1 B_{-1} Dh_4 = 0,$$

$$B_1^2 Ch_4 + 6A_1 B_0 B_1 Dh_4 + 3A_0 B_1^2 Dh_4 = 0,$$

$$3A_1 B_1^2 Dh_4 = 0,$$

$$BB_1 + 2A_1 B_0 C + 2A_0 B_1 C + 6A_0 A_1 B_0 D + 3A_0^2 B_1 D + 6A_1 A_{-1} B_1 D + 3A_1^2 B_{-1} D + B_1^3 Dh_0 + AB_1 h_2 + 3B_0^2 B_1 Dh_2 + 3B_1^2 B_{-1} Dh_2 + 3B_0^2 B_{-1} Dh_4 + 3B_1 B_{-1}^2 Dh_4 = 0,$$

$$B_{-1}^3 Dh_0 = 0,$$

$$3B_0 B_{-1}^2 Dh_0 = 0,$$

$$3A_{-1}^2 B_{-1} D + 6AB_{-1} h_0 + 3B_0^2 B_{-1} Dh_0 + 3B_1 B_{-1}^2 Dh_0 + B_{-1}^3 Dh_2 = 0,$$

$$2A_{-1} B_{-1} C + 3A_{-1}^2 B_0 D + 6A_0 A_{-1} B_{-1} D + 2AB_0 h_0 + B_0^3 Dh_0 + 6B_0 B_1 B_{-1} Dh_0 + 3B_0 B_{-1}^2 Dh_2 = 0,$$

$$BB_{-1} + 2A_{-1} B_0 C + 2A_0 B_{-1} C + 6A_0 A_{-1} B_0 D + 3A_{-1}^2 B_1 D + 3A_0^2 B_{-1} D + 6A_1 A_{-1} B_{-1} D + 3B_0^2 B_1 Dh_0 + 3B_1^2 B_{-1} Dh_0 + AB_{-1} h_2 + 3B_0^2 B_{-1} Dh_2 + 3B_1 B_{-1}^2 Dh_2 + B_{-1}^3 Dh_4 = 0,$$

$$BB_0 + 2A_0 B_0 C + 2A_{-1} B_1 C + 2A_1 B_{-1} C + 3A_0^2 B_0 D + 6A_1 A_{-1} B_0 D + 6A_0 A_{-1} B_1 D + 6A_0 A_1 B_{-1} D + 3B_0 B_1^2 Dh_0 + B_0^3 Dh_2 + 6B_0 B_1 B_{-1} Dh_2 + 3B_0 B_{-1}^2 Dh_4 = 0,$$

$$2A_1 B_1 C + 3A_1^2 B_0 D + 6A_0 A_1 B_1 D + 3B_0 B_1^2 Dh_2 + 2AB_0 h_4 + B_0^3 Dh_4 + 6B_0 B_1 B_{-1} Dh_4 = 0,$$

$$3A_1^2 B_1 D + B_1^3 Dh_2 + 6AB_1 h_4 + 3B_0^2 B_1 Dh_4 + 3B_1^2 B_{-1} Dh_4 = 0,$$

$$3B_0 B_1^2 Dh_4 = 0,$$

$$B_1^3 D h_4 = 0. \tag{12}$$

解方程组(12)可以得到以下解:

情形 1

$$A_0 = -\frac{C}{3D},\ A_1 = \pm\sqrt{-\frac{2Ah_4}{D}},$$

$$A_{-1} = 0, B_0 = 0, B_1 = 0, B_{-1} = 0,$$

$$B = A\left(\frac{C^2}{3AD} - h_2\right),$$

$$9C_0 D = AC\left(3h_2 - \frac{C^2}{3AD}\right),$$

$$ADh_4 < 0. \tag{13}$$

情形 2

$$A_0 = -\frac{C}{3D},\ A_1 = 0, A_{-1} = \pm\sqrt{-\frac{2Ah_0}{D}},$$

$$B_0 = 0, B_1 = 0, B_{-1} = 0, B = A\left(\frac{C^2}{3AD} - h_2\right),$$

$$9C_0 D = AC\left(3h_2 - \frac{C^2}{3AD}\right), ADh_0 < 0. \tag{14}$$

情形 3

$$A_0 = -\frac{C}{3D},$$

$$A_1 = \pm\frac{1}{18}\sqrt{-\frac{2}{AD^3 h_0}}(3BD + 3ADh_2 - C^2),$$

$$A_{-1} = \pm\sqrt{-\frac{2Ah_0}{D}}, B_0 = 0, B_1 = 0, B_{-1} = 0,$$

$$9DC_0 = C\left(\frac{2C^2}{3D} - 3B\right),$$

$$B^2 + AB\left(2h_2 - \frac{2C^2}{3AD}\right) = A^2\left(-\frac{C^4}{9A^2D^2} + \frac{2C^2 h_2}{3AD} - h_2^2 + 36h_0 h_4\right),\ ADh_0 < 0. \tag{15}$$

情形 4

$$A_0 = -\frac{C}{3D},$$

$$A_1 = \frac{1}{36}\sqrt{-\frac{2}{AD^3 h_0}}(2C^2 - 6BD + 3ADh_2),$$

$$A_{-1} = -\sqrt{-\frac{Ah_0}{2D}},$$

$$B_0 = \pm\sqrt{-\frac{A}{2D}},\ B_1 = 0,\ B_{-1} = 0,$$

$$36DC_0 = C\left(\frac{8C^2}{3D} - 12B\right),$$

$$4B^2 - B\left(\frac{8C^2}{3D} + 4Ah_2\right) = 36A^2 h_0 h_4 - \frac{4C^4}{9D^2} - \frac{4AC^2 h_2}{3D} - A^2 h_2^2,$$

$$AD < 0, h_0 > 0. \tag{16}$$

将(13)—(16)式代入(11)式便可得到组合 KdV-mKdV 方程(7)的 Jacobi 椭圆函数解. 以情形 4 为例,下面具体计算一些 Jacobi 椭圆函数展开解.

1)若 $h_0 = 1/4, h_2 = (m^2+1)/2, h_4 = (1-m^2)^2/4$,则

$$f(\xi) = \mathrm{sn}\xi/(\mathrm{dn}\xi + \mathrm{cn}\xi),$$

由(16)式,可得

$$u(\xi) = -\frac{C}{3D} - \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{\mathrm{dn}\xi + \mathrm{cn}\xi}{\mathrm{sn}\xi} + \frac{1}{18}\sqrt{-\frac{2}{AD^3}}\left[2C^2 - 6BD + \frac{3}{2}AD(m^2+1)\right] \times \frac{\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi + \mathrm{cn}\xi} + \sqrt{-\frac{A}{2D}}\mathrm{ns}\xi. \tag{17}$$

上式中 $A = k_1^3\gamma, B = k_2, C = k_1\alpha/2, D = k_1\beta/3$,下文同. 若取 $k_1 = 2, k_2 = 1, \alpha = 0.4072, \beta = 0.1, \gamma = -0.05$,有 $m = 0.2695$. 这里 $m\,(0<m<1)$ 是 Jacobi 椭圆函数的模数,下文同. 取 $t = 0$,由(17)式,可作出图 1. 从图 1 可见,方程的解为周期解,在 $x = 0$ 处出现了奇点,而且在其光滑的曲线上出现了尖峰.

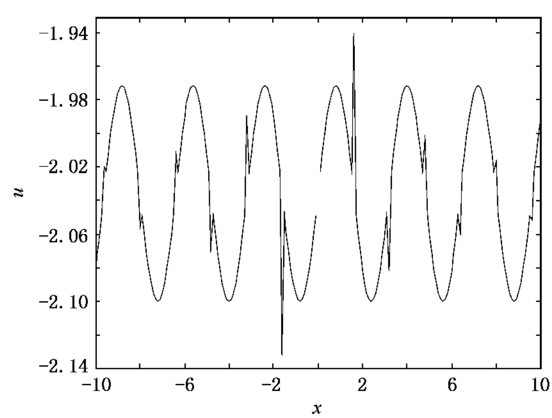

图 1　取 $t = 0$,(17)式的 x-u 图

2)若 $h_0 = m^2/4, h_2 = (m^2-2)/2, h_4 = m^2/4$,则

$$f(\xi) = \mathrm{dn}\xi/(\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sn}\xi + \mathrm{cn}\xi),$$

由(16)式,可得

$$u(\xi) = -\frac{C}{3D} - \frac{m}{2}\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sn}\xi + \mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi} + \frac{1}{18m}\sqrt{-\frac{2}{AD^3}}\left[2C^2 - 6BD + \frac{3}{2}AD(m^2-2)\right]\frac{\mathrm{dn}\xi}{\sqrt{1-m^2}\,\mathrm{sn}\xi + \mathrm{cn}\xi}$$

$$-\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{\sqrt{1-m^2}\mathrm{cn}\xi-\mathrm{sn}\xi[m^2-1]}{\mathrm{dn}\xi[\sqrt{1-m^2}\mathrm{sn}\xi+\mathrm{cn}\xi]}. \quad (18)$$

若取 $k_1=2$，$k_2=1$，$\alpha=0.0462$，$\beta=0.01$，$\gamma=-0.5$，有 $m=0.5260$. 取 $t=0$，由(18)式，可作出图 2. 从图 2 可见，方程的解具有非对称性，各尖峰围绕成两条包络的曲线.

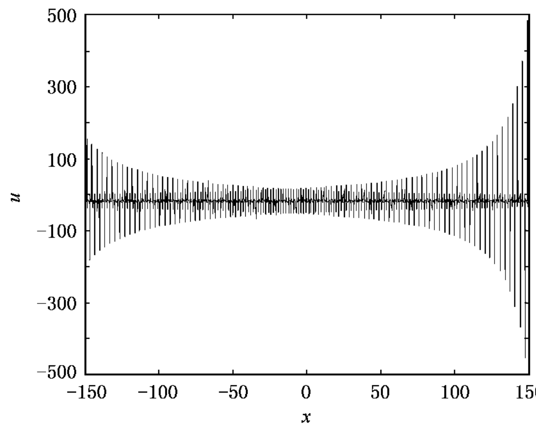

图 2 取 $t=0$，(18)式的 x-u 图

3) 若 $h_0=4m'$，$h_2=1+m'^2+6m'$，$h_4=(1+m')^2$，则

$$f(\xi)=2\sqrt{m'}\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi/(cn^2\xi-m'\mathrm{sn}^2\xi),$$

其中 $m'=\sqrt{1-m^2}$，由(16)式，可得

$$u(\xi)=-\frac{C}{3D}-2\sqrt{-\frac{Am'}{2D}}\frac{\mathrm{cn}^2\xi-m'\mathrm{sn}^2\xi}{2\sqrt{m'}\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi}+\frac{1}{72}\sqrt{-\frac{2}{AD^3m'}}\times[2C^2-6BD+3AD(1+m'^2+6m')]\frac{2\sqrt{m'}\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{cn}^2\xi-m'\mathrm{sn}^2\xi}-\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{2\sqrt{m'}\mathrm{dn}\xi(1-2\mathrm{sn}^2\xi)(\mathrm{cn}^2\xi-m'\mathrm{sn}^2\xi)-4\sqrt{m'}\mathrm{sn}^2\xi\mathrm{cn}^2\xi\mathrm{dn}\xi(-1-m')}{2\sqrt{m'}\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi(\mathrm{cn}^2\xi-m'\mathrm{sn}^2\xi)}. \quad (19)$$

若取 $k_1=2$，$k_2=1$，$\alpha=3.4712$，$\beta=0.1$，$\gamma=-0.5$，有 $m=0.3799$. 取 $t=0$，由(19)式，可作出图 3. 从图 3 可见，方程的解为周期解，在 $x=0$ 处出现了奇点，其结构内部尖峰围绕成两条包络的曲线.

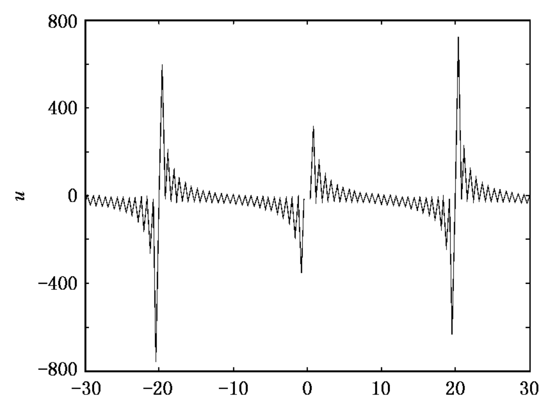

图 3 取 $t=0$，(19)式的 x-u 图

4) 若 $h_0=(1+m')^2/4$，$h_2=(1+6m'+m'^2)/4$，$h_4=m'$，则

$$f(\xi)=(1+m')\mathrm{sn}\xi/\sqrt{2[\mathrm{cn}^2\xi+\mathrm{dn}\xi+m'\mathrm{sn}^2\xi]},$$

其中 $m'=\sqrt{1-m^2}$，由(16)式，可得

$$u(\xi)=-\frac{C}{3D}-\frac{1+m'}{2}\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{\sqrt{2[\mathrm{cn}^2\xi+\mathrm{dn}\xi+m'\mathrm{sn}^2\xi]}}{(1+m')\mathrm{sn}\xi}+\frac{1}{18(1+m')}\sqrt{-\frac{2}{AD^3}}\left[2C^2-6BD+\frac{3}{4}AD(1+6m'+m'^2)\right]\frac{(1+m')\mathrm{sn}\xi}{\sqrt{2[\mathrm{cn}^2\xi+\mathrm{dn}\xi+m'\mathrm{sn}^2\xi]}}+\sqrt{-\frac{A}{2D}}\frac{2(1+m')\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi(\mathrm{cn}^2\xi+\mathrm{dn}\xi+m'\mathrm{sn}^2\xi)-(1+m')\mathrm{sn}^2\xi\mathrm{cn}\xi(-2\mathrm{dn}\xi-m^2+2m'\mathrm{dn}\xi)}{2(1+m')\mathrm{sn}\xi(\mathrm{cn}^2\xi+\mathrm{dn}\xi+m'\mathrm{sn}^2\xi)}. \quad (20)$$

若取 $k_1 = 3.5$，$k_2 = 1$，$\alpha = 3.0071$，$\beta = 0.1$，$\gamma = -0.5$，有 $m = 0.4145$. 取 $t = 0$，由(20)式，可作出图4. 从图4可见，方程的解为周期解，曲线出现了一些尖峰，在 $x = 0$ 处出现了奇点.

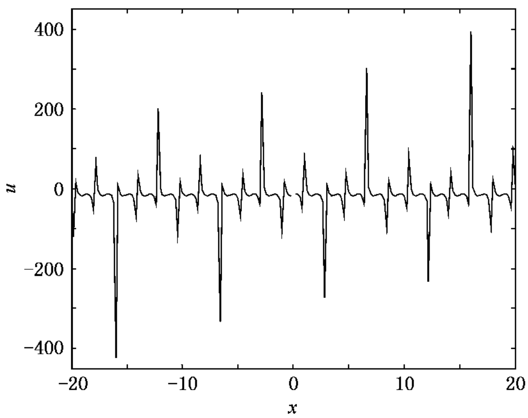

图4　取 $t = 0$，(20)式的 x-u 图

函数 $f(\xi)$ 的更多取法可参阅文献[29,30]. 组合 KdV-mKdV 方程其余的 Jacobi 椭圆函数解可同上讨论，这里不一一计算，从略.

4. 结　　论

本文对第一类椭圆方程进行新形式的函数展开，构造出非线性波动方程新的 Jacobi 椭圆函数解. 由于函数 $f(\xi)$ 不拘于具体的表达式，通过选择合适的参数，应用该方法可以寻找更多的解. 本文就是利用这一特点，将该方法应用于组合 KdV-mKdV 方程，并得到方程新的 Jacobi 椭圆函数解. 这个方法还可以用去寻找其他非线性波动方程的 Jacobi 椭圆函数解.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Wang M L，Zhou Y B，Li Z B 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67

[3] Zhang J L，Wang Y M，Wang M L，Fang Z D 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 245

[4] Fan E G，Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[5] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[6] Yang L，Liu J，Yang K 2001 *Phys*. *Lett*. A **278** 267

[7] Parkes E J，Duffy B R 1997 *Phys*. *Lett*. A **229** 217

[8] Fan E G 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 212

[9] Yan C 1996 *Phys*. *Lett*. A **224** 77

[10] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[11] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]

[12] Fu Z T，Liu S K，Liu S D，Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **290** 72

[13] Fu Z T，Liu S K，Liu S D 2002 *Phys*. *Lett*. A **299** 507

[14] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 10]

[15] Liu S D，Fu Z T，Liu S K，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

[16] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 1923]

[17] Zhang S Q，Li Z B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1066 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[18] Guo G P，Zhang J F 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2660 (in Chinese) [郭冠平、张解放 2003 物理学报 **52** 2660]

[19] Shen S F，Pan Z L，Zhang J，Ye C E 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2056 (in Chinese) [沈守枫、潘祖梁、张　隽、叶彩儿 2004 物理学报 **53** 2056]

[20] Shi Y R，Guo P，Lü K P，Duan W S 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3265 (in Chinese) [石玉仁、郭　鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]

[21] Lü D Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4501 (in Chinese) [吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501]

[22] Liu G T，Fan T Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 676 (in Chinese) [刘官厅、范天佑 2004 物理学报 **53** 676]

[23] Han Z X 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1481 (in Chinese) [韩兆秀 2005 物理学报 **54** 1481]

[24] Zhu J M，Ma Z Y，Fang J P，Zheng C L，Zhang J F 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 798

[25] Peng Y Z 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **43** 205

[26] Huang D J，Li D S，Zhang H Q 2005 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **44** 969

[27] Malfliet W 1992 *Am*. *J*. *Phys*. **60** 650

[28] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing：Peking University Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京 北京大学出版社)]

[29] Lou S Y，Ni G J 1989 *J*. *Math*. *Phys*. **30** 1614

[30] Li H M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1111
Li H M 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 251

Jacobi elliptic function solutions to the coupled KdV-mKdV equation*

Pan Jun-Ting Gong Lun-Xun†
(*School of Science*, *Guizhou Normal University*, *Guiyang* 550001, *China*)
(Received 6 September 2006; revised manuscript received 30 January 2007)

Abstract

Based on the new expansion of the first kind of elliptic function, a method for constructing Jacobi elliptic function solutions to nonlinear wave equations is proposed. The method is applied to the coupled KdV-mKdV equation and some new Jacobi elliptic function solutions to the equation are obtained. Some specific kinds of solutions and their relevant figures are also presented.

Keywords: elliptic function of the first kind, Jacobi elliptic functions, coupled KdV-mKdV equation, travelling wave solutions
PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Science and Technology Foundation of Guizhou Province, China (Grant No. 20072009).

† Corresponding author. E-mail: glx3097@sina.com