

玻色凝聚原子云的二次干涉及其放大效应*

徐志君† 李鹏华

(浙江工业大学应用物理系 杭州 320032)

(2007 年 1 月 18 日收到 2007 年 2 月 6 日收到修改稿)

捕限在三维轴对称谐振势阱叠加一维光晶格势的组合势中的玻色凝聚气体, 取消磁阱和光晶格势后, 将形成沿轴向向两侧运动的干涉边峰. 提出一个新的实验方案, 使这样的干涉边峰再次相遇叠加, 以探讨物质波的二次干涉效应. 研究表明, 在干涉边峰相干加强的区域, 玻色凝聚原子云的密度会得到有效放大. 基于现有的实验技术, 这个新实验是可以实现的, 这种效应也是可以观测得到的.

关键词: 玻色凝聚气体, 光晶格势, 干涉边峰, 干涉

PACC: 0375, 3280P, 4250

1. 引 言

近年来, 光晶格势(optical lattice potential)实验技术^[1]已成为研究玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)宏观量子性质的一个重要而有效的工具. 捕限在轴对称弱磁阱(axially symmetric weaker magnetic trap)中的玻色凝聚气体, 叠加上光晶格势后, 将形成许多小的子凝聚原子云, 这些子凝聚原子云可看成许多相干的物质波波源. 当突然取消组合势后, 子凝聚原子云将膨胀、叠加而形成清晰的、沿轴向向两侧运动的干涉边峰. 对这一相干物质波干涉图样的形成已从理论上^[2-10]和实验上^[11-23]开展了深入的研究. 本文以这些干涉峰为研究对象, 提出一个新的实验方案, 使它们再次相遇叠加, 探讨物质波的二次干涉效应. 根据现有的实验技术, 这种效应是可以观测得到的.

2. 理论模型和实验方案

捕限在轴对称弱磁阱和叠加在轴向的一维光晶格势中的玻色凝聚气体及其干涉演化的实验方案, 文献^[18]已有详细的描述. 平均场 Gross-Pitaevskii (G-P)方程是研究这一实验系统的有效理论^[6-10]. 捕限在组合势中的玻色凝聚气体, 当系统温度下降到玻色-爱因斯坦凝聚临界温度 T_c 以下时, 其宏观

波函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (或称之为序参量)满足平均场 G-P 方程^[24], 即

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} m[\omega_x^2 x^2 + \omega_\perp^2 (y^2 + z^2)] + V_{\text{latt}} + U|\Psi|^2 \right] \Psi, \quad (1)$$

其中 ω_x 和 ω_\perp 分别表示轴向和径向磁阱谐振角频率, 实验上常用选择 $\omega_\perp \gg \omega_x$, 即“雪茄型”(cigar shaped trap)磁阱. $U = 4\pi\hbar^2 a/m$ 为耦合常数, a 为原子的 s 波散射波长, m 为原子质量. V_{latt} 为叠加在磁阱轴向的一维光晶格势, 由波矢为 $k_L = 2\pi/\lambda$, 以夹角 θ 相交入射的两激光束叠加形成, 其表达式为^[22]

$$V_{\text{latt}} = V_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (2)$$

方程(2)中的 $d = \pi/[k_L \sin(\theta/2)]$ 为光晶格势的空间周期, 可以通过调节两激光束间的夹角 θ 方便地改变光晶格势的空间周期结构. 光晶格势的强度 V_0 由入射的激光束强度决定, 通常以原子反冲能 $E_r = \hbar^2 k_L^2/2m$ 为单位来表示, 即 $V_0 = \alpha E_r$, α 为表征光晶格势深度的一个无量纲参数, 实验上可方便地进行调节.

对于在超流条件下的玻色凝聚气体, 组合势中玻色凝聚气体沿轴向(x 方向)的初始波函数 $\Psi(x, t=0)$ 可表示为^[7]

$$\Psi(x, t=0) = A_n \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left(1 - \frac{\hbar^2 k^2}{k_m^2}\right) \cdot \exp(-ik\Delta\phi)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10605020)资助的课题.

† E-mail: xzj@zjut.edu.cn

$$\times \exp[-(x - kd)^2/2\sigma^2], \quad (3)$$

其中 k 表示沿 x 方向第 k 个光晶格子, 系统的光晶格子总数为 $2k_m + 1$. 方程 (3) 中的因子 $(1 - k^2/k_m^2)$ 是由于磁阱的存在而导致各子凝聚原子云的平均原子数分布不均匀的结果^[18]. 各子凝聚原子云在轴向上的分布用高斯函数来近似, 其中高斯宽度 σ 是一个变分参数, 可将方程 (3) 作为试探函数, 根据系统能量最小原理求得. 如当 $\alpha = 5$ 时, 通过数值计算得到子凝聚原子云的宽度为 $0.25d$ ^[18]. 在方程 (3) 中, 我们还在相邻子凝聚原子云间引入相对位相差 $\Delta\phi$. 如果 $\Delta\phi$ 是个随机量, 显然各子凝聚云无相位相干性. 如果 $\Delta\phi$ 是一个确定值, 则相干性得到保证. 实验上通过关闭磁阱而将光晶格势在重力场中保持一小段时间 t_{hold} 可以成功地调节 $\Delta\phi$ 值, 即 $\Delta\phi = mgdt_{\text{hold}}/\hbar$ ^[13, 14], 其中 g 为重力加速度. 归一化常数 $A_n = \frac{\sqrt{N_0}}{\sqrt{(16k_m^4 - 1)15k_m^3\pi^{1/4}\sigma^{1/2}}}$, 其中 N_0 为 $k = 0$ 时中心光晶格势中子凝聚原子云的平均原子数.

取消组合势后, 各子凝聚原子云将膨胀、叠加, 其波函数随时间的演化可运用传播子方法求得^[7]

$$\Psi(x, t) = \frac{A_n}{\sqrt{1 + i\Theta}} \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left(1 - \frac{k^2}{k_m^2}\right) \times \exp\left[-ik\Delta\phi - \frac{(x - dk)^2}{2\sigma^2(1 + i\Theta)}\right], \quad (4)$$

这里 $\Theta = \hbar t/(m\sigma^2)$ 为无量纲参数. 已知任意时刻物质波的波函数, 便可求得玻色凝聚气体的密度分布, 即 $n(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$, 从而得到物质波干涉图样.

对坐标空间的波函数 (4) 进行傅里叶变换, 可求得动量空间的波函数, 从而得到干涉峰值向两侧运动的速度, 即 $v = \hbar/dm$, 其中 \hbar 是普朗克常数, $n = l + \Delta\phi/2\pi$ (l 为整数) 是干涉峰的有效级次. 如果相邻光晶格势间的相对相位差 $\Delta\phi = 0$, 则 n 为整数, $n = 0$ 为中央静止的最大干涉峰, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ 为向两侧运动的干涉边峰. 对一般实验所选用的参数, 只能观测到 $n = \pm 1$ 级^[18]. 如果 $\Delta\phi = \pi$, 则干涉峰的有效级次 $n = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$, 此时没有静止的干涉峰, 实验上可观测到关于中心对称的两个干涉峰 ($n = \pm 1/2$) 向两侧运动^[14]. 这些干涉峰可视为以一定速度运动的原子波包, 其德布如意波波长 $\lambda_{\text{db}} = \hbar/p = d/n$, 波包的宽度约为 $(2k_m + 1)d$. 原子波包在坐标空间运动, 其相位在运动方向上落后, 可用经典的规律来描述, 即 $\Delta\varphi = 2\pi x/\lambda_{\text{db}} = 2\pi nx/d$.

基于上述的实验和理论研究, 我们提出一个新的实验方案, 即在原来的实验装置基础上, 沿轴向再加上一个相同的实验系统, 构成一维双光晶格势实验系统, 如图 1 所示. 这在实验上是容易实现的, 即在现有的双磁阱^[11]实验基础上, 沿轴向叠加一驻波激光场便可. 当系统温度下降到临界凝聚温度以下时, 同时关闭磁阱和驻波激光场, 左右光晶格势系统中的子凝聚原子云经膨胀、叠加, 首先各自形成如图 2(a) 所示的干涉图样. 由于干涉边峰以速度 v 向两侧运动, 因此, 这些干涉边峰经过一段时间后将发生叠加, 从而实现不同级次干涉峰之间的二次干涉.

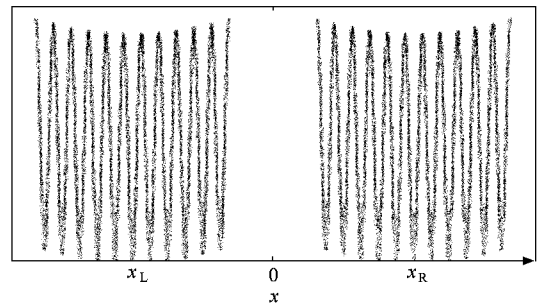


图 1 一维双光晶格势系统实验示意图 x_L 和 x_R 分别表示左右光晶格势系统的中心位置, 0 为轴向坐标原点

为研究不同级次干涉峰的二次干涉现象, 我们在同一坐标系中分别写出左右光晶格势系统玻色凝聚原子云随时间演化的波函数 $\Psi_L(x, t)$ 和 $\Psi_R(x, t)$. 设左边光晶格势系统的中心位于 $x_L = -dk_L$, 右边系统的中心位于 $x_R = dk_R$, 并将空间坐标 x 进行无量纲变换, 即 $x \rightarrow x/d$. 则有

$$\Psi_L(x, t) = \frac{A_n}{\sqrt{1 + i\Theta}} \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left(1 - \frac{k^2}{k_m^2}\right) \times \exp\left[-i\Delta\phi \times k - \frac{d^2(x - k + k_L)^2}{2\sigma^2(1 + i\Theta)}\right], \quad (5)$$

$$\Psi_R(x, t) = \frac{A_n}{\sqrt{1 + i\Theta}} \sum_{k=-k_m}^{k_m} \left(1 - \frac{k^2}{k_m^2}\right) \times \exp\left[-i\Delta\phi \times k - \frac{d^2(x - k - k_R)^2}{2\sigma^2(1 + i\Theta)}\right]. \quad (6)$$

那么整个系统的波函数 $\Psi_w(x, t)$ 可表示为

$$\Psi_w(x, t) = \Psi_L(x, t) \exp[i\delta - i2\pi n_L(x + k_L)] + \Psi_R(x, t) \exp[i2\pi n_R(x - k_R)], \quad (7)$$

方程 (7) 中引入的 δ 因子为描述左右光晶格系统间的初始相位差, 以讨论当左右光晶格势系统形成的

干涉边峰之间存在初始相位差时对相干叠加结果的影响. 而 n_L 和 n_R 分别表示左右光晶格势系统干涉峰的有效干涉级次. 得到了整个系统随时间演化的波函数 $\Psi_w(x, t)$, 便可以讨论干涉边峰相遇时的叠加结果.

3. 物质波的二次干涉及放大效应

从方程(7)中难以直接看出二次干涉的特点. 为此我们选用典型的实验的参数^[18]进行计算, 即磁阱参数 $\omega_x = 2\pi \times 9$ Hz, $\omega_\perp = 2\pi \times 92$ Hz, 光晶格势参数 $d = 795/2$ nm, $\sigma = 0.25d$, $k_m = 100$ 和凝聚原子⁸⁷Rb. 画出系统的密度分布 $|\Psi_w(x, t)|^2$ 随时间的演化. 为了便于下面的讨论, 我们对称地设置参量 $k_L = k_R = 400$, 并引入时间参量 $\tau_0 = md^2/2\pi\hbar$, 即 $n = 1$ 的干涉边峰运动一个光晶格势的空间距离所用的时间. 下面分两种情况进行讨论.

3.1. $\Delta\phi = 0$ 时, 干涉边峰的二次干涉

图2表明了取消光晶格势后不同时间 t , $n = \pm 1$ 级干涉峰的运动与叠加情况($\delta = 0$). 本文以下

图中的点虚线是 $|\Psi_L(x, t)|^2$ 的分布, 虚线是 $|\Psi_R(x, t)|^2$ 的分布, 而实线则是 $|\Psi_w(x, t)|^2$ 的分布. 表示玻色凝聚气体密度的纵坐标 $n(x, t)$ 以 A_n^2 为单位, 横坐标以光晶格势周期 d 为单位; 图中的箭头方向表示干涉边峰的运动方向. 图2表明, 当 $t = 250\tau_0$ 时, 左右光晶格势系统形成的 $n = \pm 1$ 的干涉峰向两侧运动, 还没有叠加, 如图2(a)所示; 当 $t = 350\tau_0$ 时, $n_L = 1$ 和 $n_R = -1$ 的干涉峰相遇并发生部分叠加, 如图2(b)所示; 当 $t = 400\tau_0$ 时, 两干涉峰中心完全重叠, 其强度为原干涉边峰强度的4倍, 出现干涉放大效应, 其中心密度 $n(x, t)$ 可达0.14 (以 A_n^2 为单位), 如图2(c)所示. 而此时, 除了 $n_L = 1$ 和 $n_R = -1$ 的干涉边峰发生叠加外, $n_L = 0$ 和 $n_R = -2$ 以及 $n_L = 2$ 和 $n_R = 0$ 的干涉峰也恰好叠加, 但由于 $n = \pm 2$ ($n_L = 2$ 和 $n_R = -2$) 的峰比起中心峰 ($n = 0$), 其相对强度为 $\exp(-4\pi^2 n^2 \sigma^2 / d^2) \approx 5 \times 10^{-5}$ (见文献[18]) 因此叠加结果只起微小的变化. 随着演化时间的进一步增加, 如图2(d)所示, 干涉峰由于运动而分离, 与叠加前一样向两侧运动, 满足波的叠加原理.

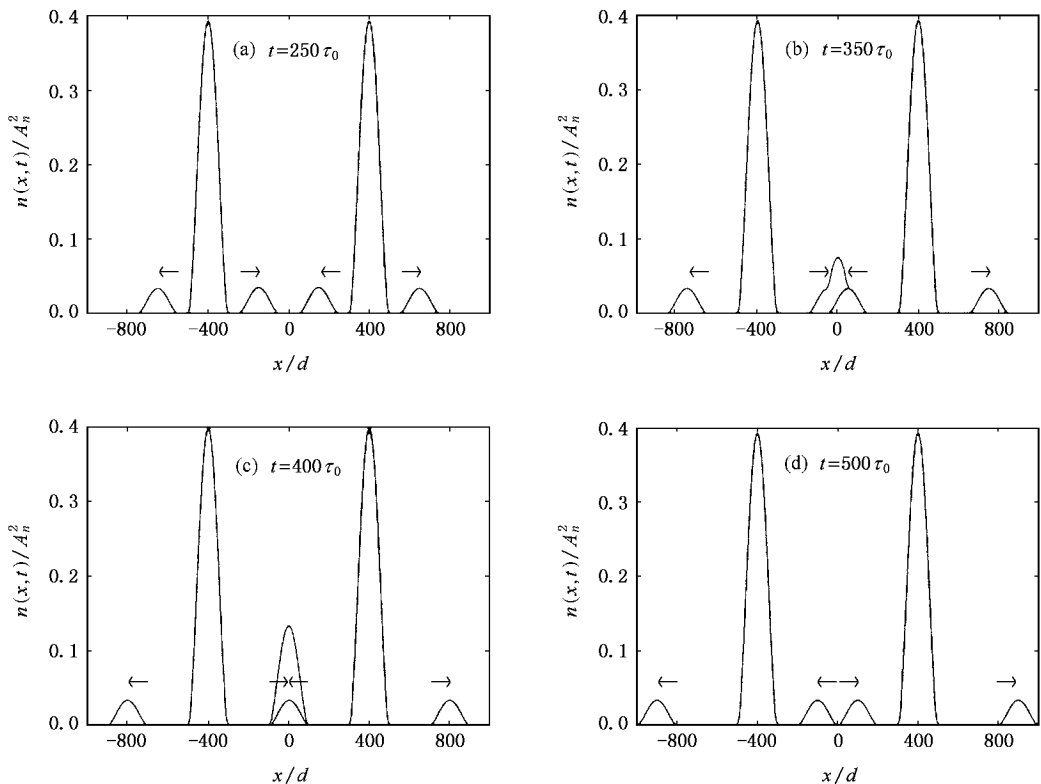


图2 当 $\Delta\phi = 0$ 和 $\delta = 0$ 时, 左右光晶格势系统形成的 $n = \pm 1$ 级干涉边峰的二次干涉过程

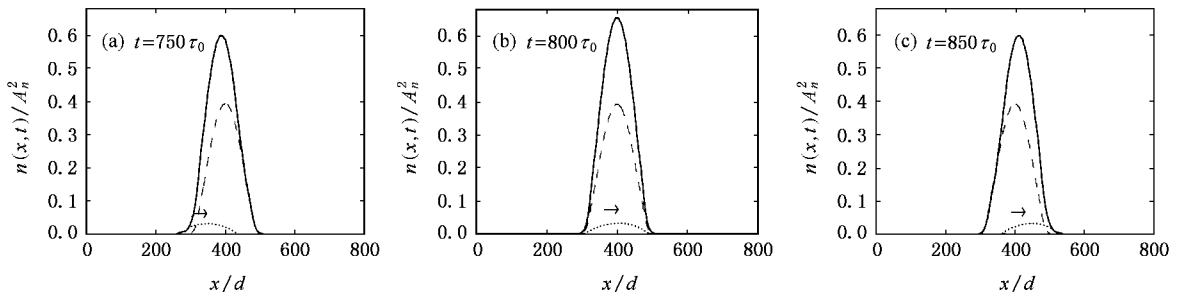


图 3 当 $\Delta\phi=0$ 和 $\delta=0$ 时, $n_L=-1$ 和 $n_R=0$ 干涉峰的二次干涉过程 (b) 为两原子波包完全重叠 (a) 和 (c) 为两波包部分重叠

图 3 展示了 $n_L=1$ 和 $n_R=0$ 的干涉峰的叠加过程. 由于 $n_R=0$ 的干涉峰静止不动, $n_L=1$ 的干涉边峰需要运动 $800\tau_0$ 的时间, $n_L=1$ 和 $n_R=0$ 的干涉峰才会完全重叠, 如图 3(b) 所示. 图 3(a) 和图 3(c) 为两干涉峰中心间距为 $50d$ 时的干涉加强的情况. 图 4 展示了左右光晶格势系统间存在不同的相位差 δ 时, $n_L=1$ 和 $n_R=-1$ 的干涉边峰相干叠加

的情况. 其中图 4(a)—4(e) 为 $t=400\tau_0$ 时 (干涉峰完全重叠) 物质波的干涉效应随相位差 δ 的变化. 当 δ 从 0 增加到 π 时, 干涉相消效应逐步加强. 当 $\delta=0$ 时, 相干加强, 如图 4(a) 所示; 当 $\delta=\pi$ 时, 出现相消, 如图 4(e) 所示. 而图 4(f) 为 $\delta=\pi$ 时, 两干涉峰中心部分重叠 ($t=450\tau_0$, 两干涉峰中心间距为 $100d$) 时相干相消的结果.

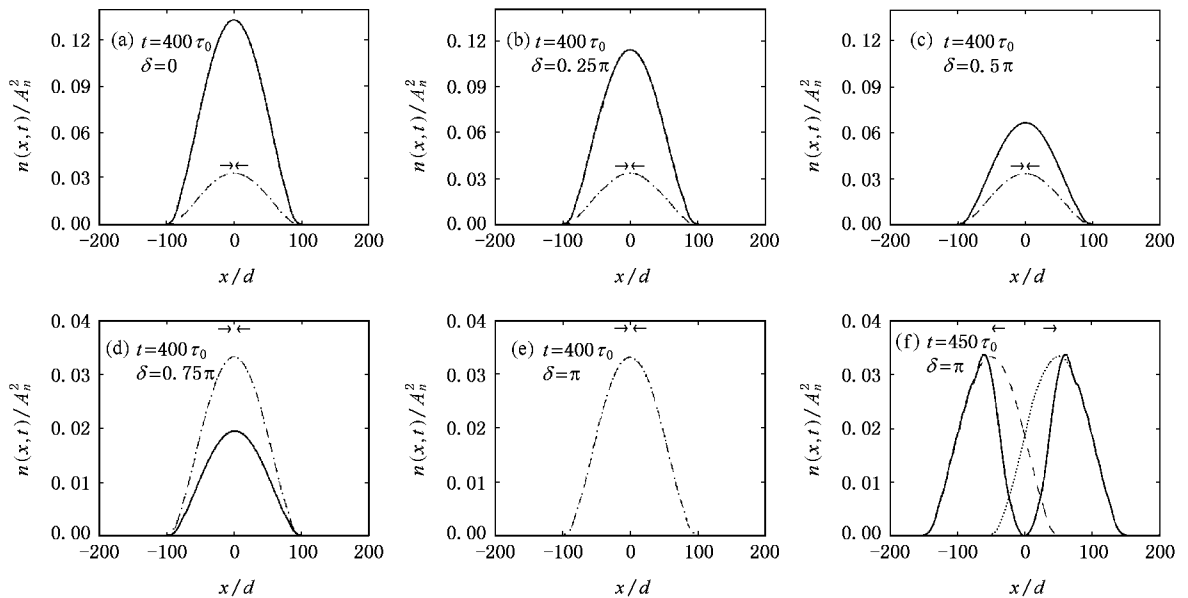


图 4 左右光晶格系统存在初始相位差 δ 时 ($\Delta\phi=0$), $n_L=1$ 和 $n_R=-1$ 干涉峰的二次干涉. 当 $t=400\tau_0$ 时, 两干涉峰中心位置完全重叠, 物质波的二次干涉相消效应随相位差 δ 的增加而变大. 当 $\delta=0$ 时, 相干加强; 当 $\delta=\pi$ 时出现完全相消. (f) 为部分重叠时相干相消的情况

3.2. $\Delta\phi=\pi$ 时, 干涉边峰的二次干涉

当相邻子凝聚原子云间存在相对相位差 π 时, 左右光晶格势系统都将出现两个对称且以速度 $v=nh/dm$ 向两侧运动的干涉边峰. 图 5 展示了这些对称的干涉峰叠加时的情况 ($\delta=0$). 当 $t=300\tau_0$ 时, 可以看到左右光晶格势系统形成的 $n=\pm 1/2$ 和

$\pm 3/2$ 干涉边峰分别向两侧运动, 如图 5(a) 所示, 但由于 $n=\pm 3/2$ 的干涉峰的密度比 $n=\pm 1/2$ 的干涉峰要小得多, 实验上一般只能观察到 $n=\pm 1/2$ 的干涉峰. 当 $t=400\tau_0$ 时, $n_L=1/2$ 和 $n_R=-3/2$ 以及 $n_L=3/2$ 和 $n_R=-1/2$ 的边峰中心完全重叠, 如图 5(b) 所示. 同样由于 $n_R=-3/2$ 和 $n_L=3/2$ 峰的相对密度非常小, 叠加放大效应不明显. 当 $t=700\tau_0$

时, $n_L = 1/2$ 和 $n_R = -1/2$ 的边峰部分重叠(约占波包宽度的 $1/2$),如图 5(c)所示. 当 $t = 800\tau_0$ 时, $n_L = 1/2$ 和 $n_R = -1/2$ 的边峰中心(同时 $n_L = -1/2$ 和 $n_R = -3/2$ 以及 $n_L = 3/2$ 和 $n_R = 1/2$ 的边峰)完全重叠,叠加干涉放大效应显著,此时中心密度 n

($x=0$) 可达 0.84 (以 A_n^2 为单位),如图 5(d)所示,与图 5(c) $n = \pm 1$ 的干涉边峰的相干效应相比,显然, $n = \pm 1/2$ 干涉峰的叠加,可以得到更大的凝聚原子云团. 同样,如果左右光晶格势系统间存在的初始相位差 $\delta \neq 0$,可得到与图 4 相同的相干相消结果.

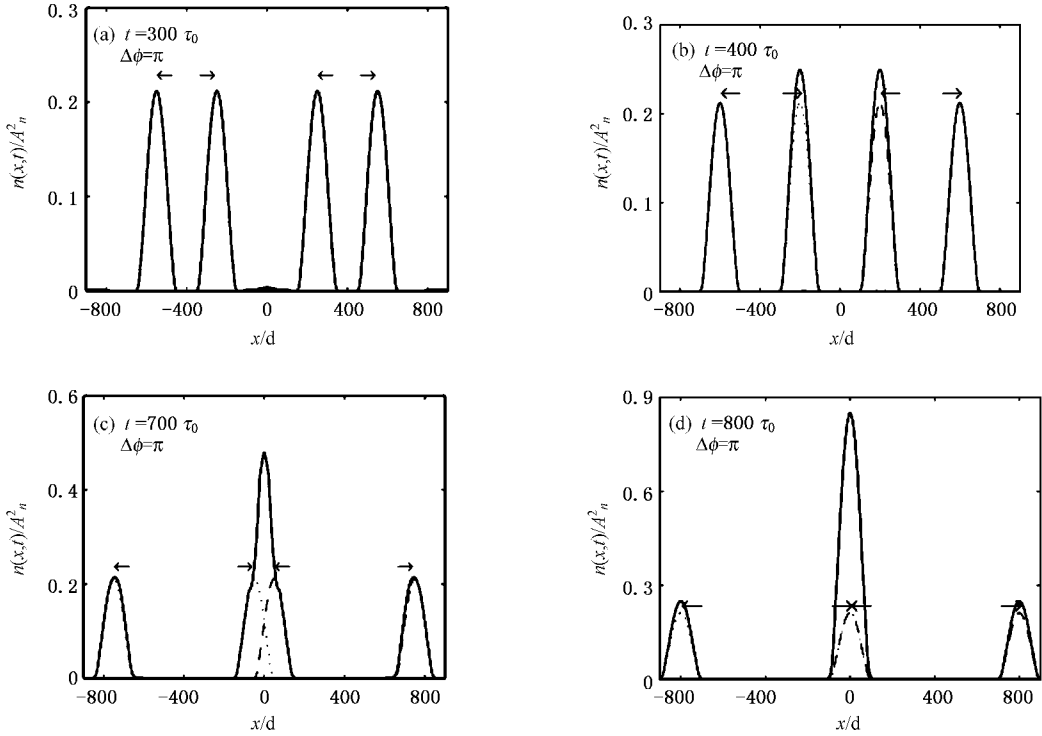


图 5 当两光晶格势系统中的相邻子凝聚原子云间存在相对相位差 $\Delta\phi = \pi$ 时 ($\delta = 0$),干涉边峰的二次干涉情况

4. 结 论

综上所述,本文提出了一个通过现有实验技术可以实现的新的实验方案,实现物质波的二次干涉. 并基于 G-P 方程和传播子方法,从理论上分析了物质波二次干涉现象,得出当干涉边峰相遇叠加时,通过选择左右两个光晶格势实验系统间的初始相位差

δ ,可以实现干涉边峰的二次干涉. 在理想的情况下,当 $\delta = 0$ 时,出现相干加强,可以得到四倍于原干涉边峰密度的凝聚原子云团,从而实现物质波的二次干涉放大效应. 特别是当各光晶格势系统中相邻子凝聚原子云间的相对相位差 $\Delta\phi = \pi$ 时,可以得到凝聚原子云密度更大的干涉边峰,使这些干涉边峰相遇叠加,可以获得显著放大的凝聚原子云团. 当 $\delta = \pi$ 时,干涉边峰相遇叠加,出现相干相消现象.

- [1] Prentiss M G 1993 *Science* **260** 1078
 [2] Liu W M, Fan W B, Zheng W M, Liang J Q, Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
 [3] Liu W M, Wu B, Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
 [4] Wu Y, Yang X X 2003 *Phys. Rev. A* **68** 013608.
 [5] Huang G X, Makarov V A, Velarde M G 2003 *Phys. Rev. A* **67** 023604
 [6] Xiong H W, Liu S J, Huang G X, Xu Z X 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033609

- [7] Xiong H W, Liu S J, Huang G X, Xu Z J 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 4863
 [8] Liu S J, Xiong H W, Xu Z J, Huang G X 2003 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36** 2083
 [9] Xu Z J, Cheng C, Yang H S, Wu Q, Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 (in Chinese) [徐志君、程成、杨欢、武强、熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835]
 [10] Adhikari S K 2004 *Nucl. Phys. A* **737** 289

- [11] Andrews M R , Townsend C G , Miesner H J , Durfee D S , Kum D M , Ketterle W 1997 *Science* **275** 637
- [12] Mewes M O , Andrews M R , Kurn D M , Durfee D S , Townsend C G , Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [13] Anderson B P , Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [14] Orzel C , Tuchman A K , Fenselau M L , Yasuda M , Kasevich M A 2001 *Science* **291** 2386
- [15] Hagley E W , Deng L , Kozuma M , Wen J , Helmerson K , Rolston S L , Phillips W D 1999 *Science* **283** 1706
- [16] Bloch I , Hänsch T W , Esslinger T 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3008
- [17] Cataliotti F S , Burger S , Fort C , Maddaloni P , Minardi F , Trombettoni A , Smerzi A , Inguscio M 2001 *Science* **293** 843
- [18] Pedri P , Pitaevskii L , Stringari S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401
- [19] Jaksch D , Bruder C , Cirac J I , Gardiner C W , Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3108
- [20] Greiner M , Mandel O , Esslinger T , Hänsch T W , Immanuel B 2002 *Nature* **415** 39
- [21] Greiner M , Mandel O , Hänsch T W , Bloch I 2002 *Nature* **419** 51
- [22] Peil S , Porto J V , Laburthe Tolra B , Obrecht J M , King B E , Subbotin M , Rolston S L , Phillips W D 2003 *Phys. Rev. A* **67** 051603(R)
- [23] Cao H Y , Chen J W , Xie H L , Cheng M , Xiao T Q , Zhu P P , Xu Z Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1696 (in Chinese) [高鸿奕、陈建文、谢红兰、陈敏、肖体乔、朱佩平、徐至展 2002 物理学报 **51** 1696]
- [24] Gross E P 1963 *J. Math. Phys.* **4** 195

Second interference and amplification effect of a Bose-condensed gas^{*}

Xu Zhi-Jun[†] Li Peng-Hua

(Department of Applied Physics , Zhejiang University of Technology , Hangzhou 320032 , China)

(Received 18 January 2007 ; revised manuscript received 6 February 2007)

Abstract

For a Bose-condensed gas in a combined potential consisting of an axially-symmetric harmonic magnetic trap and one-dimensional (1D) optical lattices, the motional interference side peaks along the axis direction are formed after the combined potential is switched off. Based on this physical system, we make a new experimental suggestion which can be realized with current experimental technique to investigate the side peak superposition and discuss the second interference and amplification effect of a Bose condensate. In the region where the side peaks undergo constructive interference, the density of condensed atomic cloud will be amplified effectively.

Keywords : Bose-condensed gas , optical lattice potential , interference side peaks , interference

PACC : 0375 , 3280P , 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10605020).

[†] E-mail : xzj@zjut.edu.cn