

# 色噪声驱动的双奇异随机系统随时间演化的熵变化率上界\*

郭永峰<sup>†</sup> 徐 伟 李东喜

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

(2007 年 1 月 22 日收到, 2007 年 2 月 6 日收到修改稿)

通过变换的方法讨论了一类高斯色噪声驱动的双奇异随机系统所对应的 Fokker-Planck 方程, 并结合 Shannon 信息熵的定义及 Schwartz 不等式原理给出了经变换后该系统随时间演化的熵变化率上界的精确表达式. 分析了奇异性强度参数、噪声相关时间与耗散参数对熵变化率上界的显著影响.

关键词: 信息熵, 熵变化率上界, 高斯色噪声, 双奇异随机系统

PACC: 0520, 0570L, 6550

## 1. 引 言

熵的概念最先由 Clausius 于 1865 年引入, 以孤立系统熵增加定律的形式表述热力学第二定律, 继而 Boltzmann 和 Planck 给出熵的微观统计公式, 用熵代表系统的无序度, 为熵的重要地位的确立及其发展奠定了基础. 1948 年 Shannon<sup>[1]</sup> 将统计熵作为基本组成部分推广用于信息理论中, 给熵以新的意义, 以表示系统的不确定性; 在此基础上 Jaynes<sup>[2]</sup> 提出最大信息熵原理, 用以确定各种系统的随机态变量的概率分布函数. 这样, 熵不仅是物理学中极为重要的概念和物理量, 而且在数学、物理学、化学、宇宙学、生物学、信息论、控制论、经济学、社会学及各种工程科学等领域得到广泛应用<sup>[3-12]</sup>. 为区别起见, 通常可将统计物理中的统计熵叫物理熵, 而将信息理论中的统计熵叫信息熵. 近些年, 随着复杂性广受重视, 人们又把信息熵与各种物理和非物理系统状态的复杂性相联系, 并研究其随时间的变化<sup>[4, 5]</sup>.

现有的发展较为成熟的 Shannon 统计信息理论仍限于与时空无关的静态或平衡态. 实际上, 无论从信息传递的角度或从动力学系统有序度和无序度的角度来看, 信息和信息熵总是随时空过程变化的<sup>[3-5]</sup>. 邢修三<sup>[4, 5]</sup> 建立了信息熵密度在时间和态

变量空间变化的非线性演化方程, 指出了非线性信息熵密度的变化是由漂移、扩散和产生三者共同引起的. 原则上非线性演化方程是可以求解的, 但严格的求解却很困难, 因而很难直观的认识信息熵是如何随时间变化而演化的. 而 Bag 等<sup>[6-10]</sup> 探讨了色噪声或关联白噪声驱动的动力学系统中噪声性质及系统的耗散参数对 Shannon 信息熵流、熵产生和熵变化率上界(以下简称熵变上界)的影响, 并考虑了经变换后 Fokker-Planck(FPK)方程可精确求解的几类典型动力学系统, 得到了 Shannon 信息熵流、熵产生和熵变上界随时间演化的精确表达式. 谢文贤等<sup>[11]</sup> 对色噪声驱动的双奇异随机系统的熵流与熵产生进行了探讨. 目前, 关于色噪声驱动的双奇异随机系统随时间演化的熵变上界及其相关性质的问题尚未见报道. 本文将结合文献[9-12]的变换方法将高斯色噪声驱动的双奇异随机系统所对应的二维 FPK 方程化为一维, 并结合 Shannon 信息熵的定义及 Schwartz 不等式原理给出了经变换后该系统随时间演化的熵变上界的精确表达式. 分析了奇异性强度参数、噪声相关时间与耗散参数对熵变上界的显著影响.

## 2. 色噪声驱动的双奇异随机系统

有关噪声驱动的双奇异随机动力学系统问题的

\* 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030, 10502042)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn

研究,在文献 [11,12] 中给出了相关性质的探讨,研究表明,系统确定性力和随机力的奇异性会对系统的性质产生较大的影响.基于以往的研究本文考虑下述高斯色噪声驱动的双奇异随机动力学系统,其 Langevin 方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x + |x|^{\beta} \eta(t) \quad (\gamma > 0), \\ \eta(t) &= 0, \\ \eta(t)\eta(t') &= \frac{D}{\tau} \exp(-|t-t'|/\tau). \end{aligned} \quad (1)$$

上式中,  $x=0$  既是确定性力的奇点,又是随机力的奇点,所以叫作双奇异随机动力系统<sup>[12]</sup>. (1) 式中  $\beta$  为标度随机力在原点的奇异程度的参数,  $\tau$  与  $D$  分别是高斯色噪声  $\eta(t)$  的相关时间与噪声强度.  $\eta(t)$  与高斯白噪声  $\xi(t)$  满足下列关系:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= -\frac{\eta(t)}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \xi(t), \\ \xi(t) &= 0, \\ \xi(t)\xi(t') &= 2\delta(t-t'). \end{aligned} \quad (2)$$

令  $X_1 = x$ ,  $X_2 = \eta$ , 可将 (1) (2) 式等效地变为

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= -\gamma X_1 + |X_1|^{\beta} X_2, \\ \dot{X}_2 &= -\frac{X_2}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \xi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

本文主要研究非平凡的双奇异情形,即  $\beta < 1$  的情形.

可以通过如下变换<sup>[12]</sup>:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \begin{cases} |X_1|^{1-\beta} & (X_1 > 0), \\ -|X_1|^{1-\beta} & (X_1 < 0), \end{cases} \\ Y_2 &= X_2, \end{aligned} \quad (4)$$

将 (3) 式化为

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= -\chi(1-\beta)Y_1 + (1-\beta)Y_2, \\ \dot{Y}_2 &= -\frac{Y_2}{\tau} + \frac{\sqrt{D}}{\tau} \xi(t). \end{aligned} \quad (5)$$

(5) 式的等效 FPK 方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(Y_1, Y_2, t)}{\partial t} &= \chi(1-\beta) \frac{\partial Y_1 \rho}{\partial Y_1} - (1-\beta) Y_2 \frac{\partial \rho}{\partial Y_1} \\ &+ \frac{1}{\tau} \frac{\partial Y_2 \rho}{\partial Y_2} + \frac{D}{\tau^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial Y_2^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\rho(Y_1, Y_2, t)$  是经 (4) 式变换后相空间的概率密度函数.

为精确求解 (6) 式,令  $U = aY_1 + Y_2$ <sup>[10]</sup>, 则 (6) 式化为一维 FPK 方程:

$$\frac{\partial \rho(U, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F_1 \rho}{\partial U} + D_1 \frac{\partial^2 \rho}{\partial U^2}, \quad (7)$$

式中

$$F_1 = -\lambda U, \quad D_1 = \frac{D}{\tau^2}, \quad (8)$$

$$\lambda U = \gamma a(1-\beta)X_1 - a(1-\beta)X_2 + \frac{X_2}{\tau}. \quad (9)$$

这里  $\lambda$  和  $a$  是待定常数,把  $U = aY_1 + Y_2$  代入 (9) 式可得到

$$\lambda = \chi(1-\beta), \quad a = \frac{1 - \chi(1-\beta)\tau}{(1-\beta)\tau}. \quad (10)$$

接下来将推广文献 [8,9] 的方法得到双奇异随机系统经 (4) 变换后的熵变上界.

### 3. 双奇异随机系统的熵变上界

FPK 方程 (7) 可写成下述形式:

$$\frac{\partial \rho(U, t)}{\partial t} = -\nabla_U \cdot j, \quad (11)$$

其中  $\nabla_U$  表示相空间的散度,

$$j = F_1 \rho - D_1 \frac{\partial \rho}{\partial U}. \quad (12)$$

具有连续概率分布的 Shannon 信息熵为

$$S = -\int \rho(U, t) \ln \rho(U, t) dU. \quad (13)$$

由 (11)–(13) 式可得信息熵  $S$  的时间演化方程为

$$\frac{dS}{dt} = \int \nabla_U \cdot j \ln \rho dU. \quad (14)$$

对 (14) 式右边进行部分积分,并利用边界条件<sup>[13]</sup>:

$$j|_{\text{boundary}} = 0, \quad j \ln \rho|_{\text{boundary}} = 0.$$

可得到

$$\frac{dS}{dt} = -\int \frac{1}{\rho} j \cdot \nabla_U \rho dU. \quad (15)$$

对 (15) 式运用 Schwartz 不等式可得

$$\frac{dS}{dt} \leq U_B(t), \quad (16)$$

这里

$$U_B(t) = \left( \int \frac{j^2}{\rho} dU \right)^{1/2} \left( \int \frac{(\nabla_U \rho)^2}{\rho} dU \right)^{1/2}. \quad (17)$$

其中上式右边乘积的第二个因子为 Fisher 信息的平方根<sup>[14]</sup>.

按照文献 [6–9] 的推导,综合 (7)–(17) 式可得双奇异随机系统的熵变上界表达式为

$$U_B(t) = \frac{(2\lambda^2 \alpha(t)^2 \rho(t) + \lambda^2 \alpha(t)^2 + 4D_1^2 - 4D_1 \lambda \alpha(t))^2}{\alpha(t)}, \quad (18)$$

其中

$$\alpha(t) = \alpha(0)\exp(-\lambda t),$$

$$\alpha(t) = \frac{2D_1[1 - \exp(-2\lambda t)]}{\lambda} + \alpha(0)\exp(-2\lambda t),$$

$$\lambda = \chi(1 - \beta),$$

$$D_1 = \frac{D}{\tau^2}.$$

下面分析奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  与耗散参数  $\gamma$  对熵变上界的影响(所有计算值均为无量纲)。

取定  $D = 1.0, \sigma(0) = 0.0, \alpha(0) = 1.0$ . 图 1—3 分别给出了在奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  与耗散参数  $\gamma$  取不同值时,熵变上界  $U_B(t)$  随时间  $t$  的变化情况. 在图 1 中,当  $t \leq 1.02$  时,  $U_B(t)$  随着奇异性强度参数  $\beta$  的增加而减小;当  $t \geq 1.45$  时,  $U_B(t)$  随着奇异性强度参数  $\beta$  的增加而增加;且当时间继续增大时,  $\beta$  越小,  $U_B(t)$  趋于零的速度越快,弛豫时间越短. 在图 2 中,  $U_B(t)$  随着噪声相关时间  $\tau$  的增加而增加,  $\tau$  越小,  $U_B(t)$  趋于零的速度越快,弛豫时间越短,并且  $\tau$  对  $U_B(t)$  的影响是与时间  $t$  无关的. 在图 3 中,当  $t \leq 1.15$  时,  $U_B(t)$  在  $\gamma = 2.0$  时是最大的;当  $t \geq 1.45$  时,  $U_B(t)$  随着耗散参数  $\gamma$  的增加而减小;且当时间继续增大时,  $\gamma$  越大,  $U_B(t)$  趋于零的速度越快,弛豫时间越短. 在图 1—3 中对不同的奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  与耗散参数  $\gamma$ ,熵变上界  $U_B(t)$  随时间  $t$  的增加都是单调递减的,并且当时间  $t$  不断增大时系统将最终达到稳定态,此时  $U_B(t) = 0 (t \rightarrow \infty)$ ,亦即  $dS/dt = 0$ .

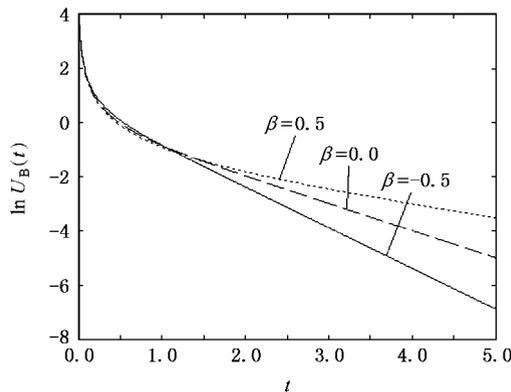


图 1 熵变上界  $U_B(t)$  在  $\tau = 1.0, \gamma = 1.0$  时随时间  $t$  的变化

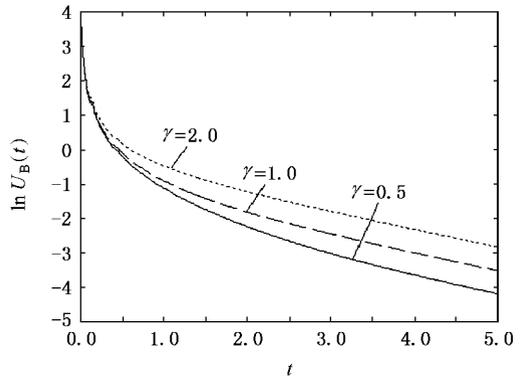


图 2 熵变上界  $U_B(t)$  在  $\beta = 0.5, \tau = 1.0$  时随时间  $t$  的变化

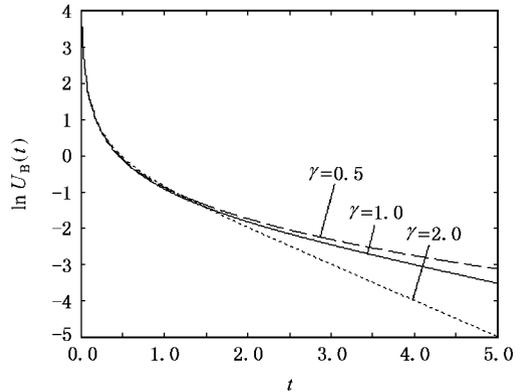


图 3 熵变上界  $U_B(t)$  在  $\beta = 0.5, \tau = 1.0$  时随时间  $t$  的变化

变上界  $U_B(t)$  随噪声相关时间  $\tau$  的变化情况,从图中可以看出,随着噪声相关时间  $\tau$  的增加,熵变上界  $U_B(t)$  单调递增远离稳定态,且奇异性强度参数  $\beta$  越大,系统偏离稳定态的速度越快.

图 5 描述了在奇异性强度参数  $\beta$  取不同值时熵

图 4 描述了在奇异性强度参数  $\beta$  取不同值时熵

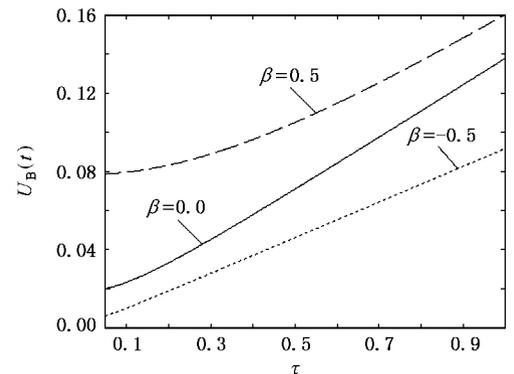


图 4 熵变上界  $U_B(t)$  在  $t = 2.0, \gamma = 1.0$  时随噪声相关时间  $\tau$  的变化

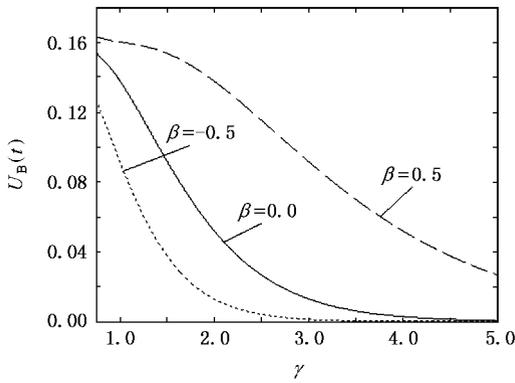


图5 熵变上界  $U_B(t)$  在  $t=2.0, \tau=1.0$  时随系统耗散参数  $\gamma$  的变化

变上界  $U_B(t)$  随耗散参数  $\gamma$  的变化情况,从图中可以看出,随着耗散参数  $\gamma$  的增加,熵变上界  $U_B(t)$  单调递减趋于稳定态,且奇异性强度参数  $\beta$  越小,系统达到稳定态的速度越快.

### 4. 非平衡约束下的熵变上界

下面考虑非平衡约束对系统的熵变上界的作用,亦即在方程(5)的第一式中加入常数外力  $f_c$ ,则相应的 FPK 方程(7)中的漂移系数变为

$$F_1 = -\lambda U + af_c. \tag{19}$$

其中参数  $\lambda$  和  $a$  的表达式同(10)式,类似文献[8]的推导,可求得非平衡约束下的熵变上界为

$$U_B(t) = \frac{(2\lambda^2 \alpha(t)^2 \alpha(t) - 4af_c \lambda \alpha(t) \alpha(t) + 2a^2 f_c^2 \alpha(t) + \lambda^2 \alpha(t)^2 + 4D_1^2 - 4D_1 \lambda \alpha(t))^2}{\alpha(t)}, \tag{20}$$

其中

$$\alpha(t) = \frac{af_c}{\lambda} [1 - \exp(-\lambda t)] + \alpha(0) \exp(-\lambda t),$$

$$\alpha(t) = \frac{2D_1}{\lambda} [1 - \exp(-2\lambda t)] + \alpha(0) \exp(-2\lambda t),$$

$$\lambda = \gamma(1 - \beta),$$

$$a = \frac{1 - \gamma(1 - \beta)\tau}{(1 - \beta)\tau},$$

$$D_1 = \frac{D}{\tau^2}.$$

取非平衡约束力为常数力  $f_c = 1.0$  以及  $D = 1.0, \alpha(0) = 0.0, \alpha(0) = 1.0$  保持不变,奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  与耗散参数  $\gamma$  分别取不同值时熵变上界  $U_B(t)$  随时间  $t$  的变化关系与图 1—3 一致,不再给出.图 6 描述了在非平衡约束下奇异性强度参数  $\beta$  取不同值时熵变上界  $U_B(t)$  随噪声相关时间  $\tau$  的变化情况,从图中可以看出,随着噪声相关时间  $\tau$  的增大熵变上界  $U_B(t)$  首先减小到达极小值,然后逐渐增大,系统偏离稳定态;且随着奇异性强度参数  $\beta$  的减小,极小值减小,极值位置左移.图 7 描述了在非平衡约束下奇异性强度参数  $\beta$  取不同值时熵变上界  $U_B(t)$  随耗散参数  $\gamma$  的变化情况.从图 7 中可以看出随着耗散参数  $\gamma$  的增加,熵变上界  $U_B(t)$  先快速减小到极小值,然后增加到极大值,最后又单调减小直到系统达到稳定态;随着奇异性强度参数  $\beta$  的减小,极小值变小,极大值变大,极值

位置左移,系统达到稳定态的速度变快.

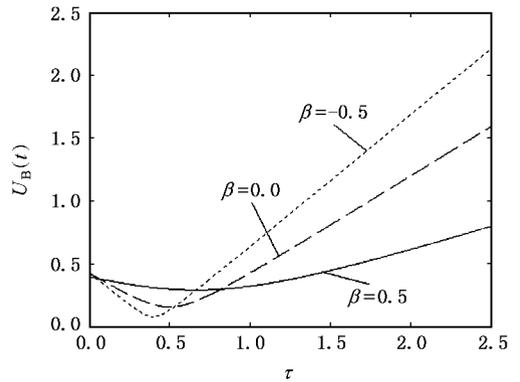


图6 非平衡约束下熵变上界  $U_B(t)$  在  $t=1.0, \gamma=1.0$  时随噪声相关时间  $\tau$  的变化

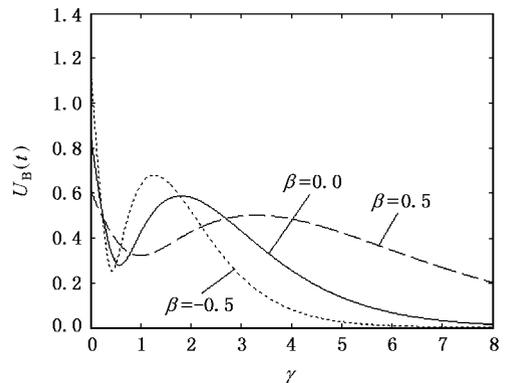


图7 非平衡约束下熵变上界  $U_B(t)$  在  $t=1.0, \tau=1.0$  时随系统耗散参数  $\gamma$  的变化

由此可见, 当加入非平衡约束力后, 噪声的相关时间  $\tau$  或耗散参数  $\gamma$  对系统的影响作用发生了明显的变化.

## 5. 结 论

本文通过变换的方法将高斯色噪声驱动的双奇异随机系统所对应的二维 Fokker-Planck 方程化为一

维, 并结合 Shannon 信息熵的定义及 Schwartz 不等式原理推导了经变换后该系统随时间  $t$  演化的熵变化率上界  $U_B(t)$  的精确表达式. 借此分析了奇异性强度参数  $\beta$ 、噪声相关时间  $\tau$  与耗散参数  $\gamma$  对熵变化率上界的影响. 值得注意的是当加入非平衡约束力后, 熵变化率上界  $U_B(t)$  随噪声相关时间  $\tau$  或耗散参数  $\gamma$  的演化均呈现极值现象.

- [ 1 ] Shannon C E 1948 *Bell. Sys. Tech. J.* **27** 379
- [ 2 ] Jaynes E T 1957 *Phys. Rev.* **106** 620
- [ 3 ] Chang J 1993 *Elements of Information Theory* ( Beijing : Tsinghua University Press ) ( in Chinese ) [ 常 迥 1993 信息理论基础( 北京 : 清华大学出版社 ) ]
- [ 4 ] Xing X S 2001 *Science in China ( Series A )* **31** 77 ( in Chinese ) [ 邢修三 2001 中国科学( A 辑 ) **31** 77 ]
- [ 5 ] Xing X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2852 ( in Chinese ) [ 邢修三 2004 物理学报 **53** 2852 ]
- [ 6 ] Bag B C , Banik S K , Ray D S 2001 *Phys. Rev. E* **64** 26110
- [ 7 ] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 26112
- [ 8 ] Bag B C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 46118
- [ 9 ] Goswami G , Mukherjee B , Bag B C 2005 *J. Phys. A : Math. Gen.* **38** 1659
- [ 10 ] Kramers H A 1940 *Physica* **7** 284
- [ 11 ] Xie W X , Xu W , Cai L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1639 ( in Chinese ) [ 谢文贤、徐 伟、蔡 力 2006 物理学报 **55** 1639 ]
- [ 12 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) ( in Chinese ) [ 胡 岗 1994 随机力与非线性系统( 上海 : 上海科技教育出版社 ) ]
- [ 13 ] Brody D , Meister B 1995 *Phys. Lett. A* **204** 93
- [ 14 ] Nikolov B , Frieden B R 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4815
- [ 15 ] Li J H , Huang Z Q 1996 *Phys. Rev. E* **53** 3315
- [ 16 ] Li J H , Huang Z Q 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3917

# Upper bound of the rate of entropy change of a stochastic system with double singularities driven by colored noise<sup>\*</sup>

Guo Yong-Feng<sup>†</sup> Xu Wei Li Dong-Xi

( Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi ' an 710072 , China )

( Received 22 January 2007 ; revised manuscript received 6 February 2007 )

## Abstract

Based on the method of transformation , this paper studies the Fokker-Planck equation of a stochastic system with double singularities driven by Gaussian colored noise. According to the definition of Shannon 's information entropy and the Schwartz inequality principle , the explicit time dependence of the upper bound of the rate of entropy change is obtained for the first time. The relationship between the properties of double singularities , noise correlation time and dissipative parameter and their effect on the upper bound of the rate of entropy change are discussed.

**Keywords :** information entropy , upper bound of the rate of entropy change , Gaussian colored noise , stochastic system with double singularities

**PACC :** 0520 , 0570L , 6550

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10472091 , 10332030 , 10502042 ).

<sup>†</sup> E-mail : guoyongfeng@mail.nwpu.edu.cn