

Lorenz 方程中两种尺度的相互作用*

刘 峰^{1)†} 刘式达^{1)‡} 刘 刚^{1)‡} 刘式适¹⁾

1) 北京大学物理学院大气科学系, 北京 100871)

2) 民航中南空中交通管理局气象中心, 广州 510406)

3) 民航南昌空中交通管理中心, 南昌 330114)

(2006 年 5 月 5 日收到, 2007 年 2 月 1 日收到修改稿)

在 Lorenz 方程中的混沌区域, 存在着两种尺度的相互作用. 其中代表大尺度运动的 Rayleigh 数 r 决定空气中小尺度的对流和湍流运动, 而对流和湍流运动又对大尺度运动具有反馈作用, 两者的相互作用最终使 r 值减小, 空气运动进入一种定常状态. 在反馈过程中, 垂直热通量 \overline{xy} 及垂直温度梯度 \bar{z} 的变化是决定 r 变化的主要原因, 并且反馈的最终结果表现出突变的特征.

关键词: Lorenz 方程, 两种尺度, 相互作用

PACC: 0540, 0545

1. 引 言

著名的 Lorenz 方程^[1] 是确定的非线性系统^[2,3] 出现内在随机性混沌的第一个例子. 方程中的控制参数 r 是反映大气热对流强弱的 Rayleigh 数^[4]. Lorenz 方程反映的一个典型的物理过程是太阳加热地面, 造成下层空气和上层空气有一定的温度差 ΔT . 当 ΔT 比较小, 即 r 也比较小时, 此时空气对流不起来, 处在静止状态; 当 ΔT 逐渐增大, 促使 r 数超过一定的临界值时, 下层的热空气就开始上升, 上层的冷空气下沉, 从而产生对流. 此时大气中就出现对流的积云; 温差 ΔT 进一步加大, r 数再增大, 大气中出现剧烈的许许多多的对流单体, 甚至云中出現很强的湍流, 积云就演变成浓积云, 云中雷电交加. 到云中的水凝结到一定的程度后, 就开始下雨.

Lorenz 方程中非线性的含义是 Rayleigh 数 r 是产生对流的动力. 当对流起来后, 热空气向上, 冷空气向下, 使得上下层空气的温度差 ΔT 改变, 从而改变产生对流的 Rayleigh 数 r . 若方程中没有非线性, 那么热空气就只是一直向上的单向流, 而不会产生对流.

这里也含有两种尺度的相互作用. 一种尺度是

造成对流的 Rayleigh 数, 它主要由上下层空气的平均温度造成的温差 ΔT 决定, 它可以看成是较大的尺度; 另一种尺度就是由 Rayleigh 数决定的空气对流和湍流, 它可以看成是较小的尺度. 两种尺度的相互作用表现为给定 Rayleigh 数 r , 可能会产生对流. 反过来, 空气一旦对流起来, 上下热量交换又可能改变原来造成对流的 Rayleigh 数. 应该指出, Lorenz 方程中的内在随机性(即混沌)是造成两种尺度相互作用的基本条件. 因为非线性系统中的内在随机性或混沌就意味着含有多种尺度. 它们在云中形成大大小小不同尺度的对流泡, 造成上层和下层空气的剧烈交换, 才使得上层和下层的温差减小, 进而改变了原先产生混沌的 Rayleigh 数.

本文研究 Lorenz 系统中内在的两种尺度的相互作用或反馈过程, 它的普遍意义在于非线性科学就是研究物理量的非线性相互作用, 并且两种尺度的相互作用就是其中的一种^[5,6]. 应该说明的是, 上述的两种尺度互相作用也是一种反馈. 一方面大尺度决定了小尺度的变化, 另一方面小尺度的信号又反馈给大尺度. 在积云对流中这种反馈过程是自动进行的, 在下述的 Lorenz 方程模型中, 这种反馈并非人为附加的, 而是按照原有模型的规律进行的. 这里的反馈过程和混沌控制中的反馈过程是不同的: 首先,

* 国家自然科学基金(批准号 90511009)资助的课题.

† E-mail: lf188@163.com

‡ 通讯联系人, E-mail: liusd@pku.edu.cn

混沌控制中的反馈控制,为了达到控制目标已经对原动力系统进行了人为的改变,在原动力系统中加上了一个反馈项或人为地加入控制量去改变控制参数^[7-15]。本文中的反馈过程并未改变原有的动力系统,其次,混沌控制中是将混沌状态驱动到事先选定一个控制目标上去^[16-18],而本文中的反馈过程,到 Lorenz 方程中的定常状态,反馈过程就会停止。

2. Lorenz 方程的反馈模式

反映局地热对流的 Lorenz 方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p_r x + p_r y, \\ \frac{dy}{dt} &= rx - xz - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $b = \frac{8}{3}$, $p_r = 10$ 。

方程(1)中的 x 代表对流运动的强度, y 和 z 分别表示上下对流扰动造成的温度差以及和平均温度垂直梯度的偏离^[19],因此方程中 xy 和 xz 这两个非线性项代表对流速度和温度的相互作用。 x 和 y 同号说明下层热空气上升,上层冷空气下沉,而 xy 的平均 \overline{xy} 就代表垂直热通量。

方程(1)中

$$r = \frac{R_a}{(R_a)_c}, \quad (2)$$

r 是 Rayleigh 数 R_a 与 Rayleigh 数的一个临界值 $(R_a)_c$ 之比。其中 $(R_a)_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$, $\left(a = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 。通常 R_a 可以表示为

$$R_a = -p_r R_c^2 R_i = \frac{g\epsilon H^3 \Delta T}{kv}, \quad (3)$$

其中 p_r 为 Prandtl 数, R_c 是 Reynolds 数, R_i 是 Richardson 数^[20]。 g 是重力加速度, ϵ 是热膨胀系数, H 是空气层厚度, ΔT 是上下层温差, k, v 分别是分子热传导系数和分子粘性系数。可以看到, R_a 是浮力与摩擦力之比,表示对流运动的发展除了要求层结不稳定 ($R_i < 0$) 外,还需要克服摩擦和热传导的耗散作用。

Lorenz 已经说明^[21],当 $r > 0$ 时,方程(1)有 3 个定常解(3 个平衡态):

$$O : (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned} C_{1,2} : (x, y, z) &= (\pm \sqrt{b(r-1)}, \\ &\pm \sqrt{b(r-1)}, r-1), \end{aligned} \quad (4)$$

其中,平衡态 O 代表无对流的静止状态,平衡态 $C_{1,2}$ 代表对流状态。Lorenz 已经说明,当 $r < 1$ 时,状态 O 是稳定的;当 $r > 1$ 时,产生两个稳定的平衡状态 $C_{1,2}$,到 $r = 24$ 左右, $C_{1,2}$ 仍稳定。但是 Lorenz 证明当

$$r > 24.74, \quad (5)$$

系统就会进入混沌状态^[22],即相当于积雨云中的湍流状态。

因此,对于方程(1)若给定一个 r 值,就可以算得 x, y, z 的一系列数值,它代表小尺度的湍流状态。

反过来,对方程(1)的第 2 式作时间平均得到

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = r\bar{x} - \bar{x}\bar{z} - \bar{y}, \quad (6)$$

就可以通过 x, y, z 等的平均值求得新的 Rayleigh 数 r ,它代表由 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 算出的大尺度状态。如果将这个新的 r 输入到方程(1)又可求出一系列 x, y, z 数值。将这一系列数值的平均值代入(6)式又可以求得新的 r 值。如此反复,这种反馈过程就代表两种尺度的相互作用过程。

3. 两种尺度的相互作用的结果

首先我们先看大尺度参数 r 控制下的小尺度运动。给定 $r = 28$,我们对方程组(1)用 Runge-kutta 法^[23]求解。时间步长 $h = 0.01$,初值 $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0)$,共计算了 6000 步。计算结果见图 1。

从图 1 中 6000 个点的 y 折线可以看到, y 从初始值 1 快速增加,在第 38 步达到最大后开始快速减小,第 47 步后 y 由正数减小为负数。 y 在第 93 步处减小到第一个最小值后进入一种波动状态。此种波动状态的特点是,虽然波动的振幅逐渐增大,但波动周期变化不大,且 y 全部是负值。第 1655 步开始 y 由负值增大到正值,随后 y 进入一种既有正值又有负值的无周期的混沌状态。

从图 1 中还可以看到 x 的变化情况与 y 的变化情况很相近。通过计算可以得到 6000 步中在同一点上 x 和 y 是同号的有 5465 个,占 91.08%。计算两者相关系数为 0.99,说明 x 的变化和 y 的变化几乎是完全一致的。由于 x 代表对流运动的强度, x 和 y 同号表示暖流体上升或冷流体下沉。因而从图 1 中可

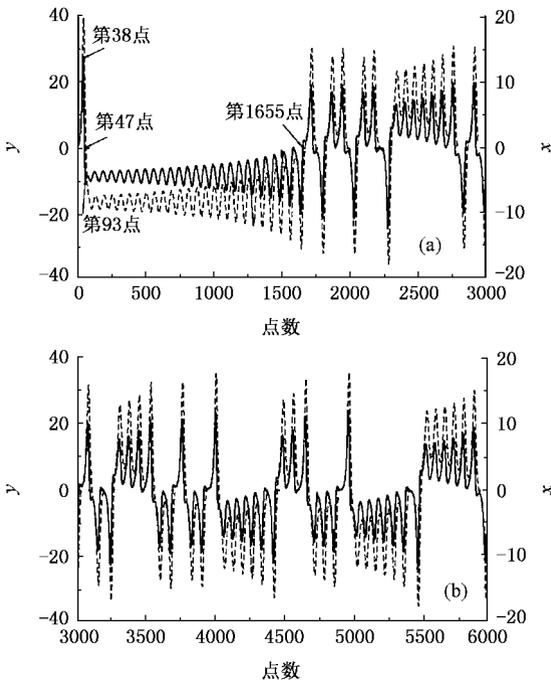


图 1 $r = 28$ 时 6000 个 x (虚线) 和 y (实线) 折线图

以看到, 对流运动强度开始是快速增强, 并且伴随着暖空气上升; 到第 38 步左右, 暖空气到达对流单体的最高点, 虽然仍然是暖空气上升但强度开始减弱; 到第 47 步左右 x 和 y 值都由正值转为负值, 说明对流中出现冷空气的下沉运动, 这种运动的特点是强度逐渐增大, 缓慢波动, 持续时间较长; 第 1655 步左右以后, 进入一种有时是暖空气上升, 有时又是冷空气的下沉, 强度也是有时增强, 有时减弱的状态, 这就是所谓的混沌^[24-25]。

下面来看小尺度的混沌运动对大尺度的反馈作用。

将图 1 算出的 x, y, z 值作时间平均代入(6)式, 就可以算出新的 r 值。重复上述步骤就可以得出两种尺度不断相互作用相互反馈的结果。表 1 列出了反馈 200 次的计算结果。

这 200 次反馈出的 r 值随着反馈次数的变化见图 2。从图 2 中可以看出, 随着反馈次数的增加, r 有三次较为明显的下降: 第 1 次是反馈到第 15 次时, r 值由 28 值突然下降到 27; 第 2 次是到第 100 次时, r 值由 27 值突然下降到 26; 第 3 次是最大的一次下降, 在到第 136 次时, r 值由 26 突然下降到 12 左右, 并且随后一直维持这个数值不再改变。

表 1 反馈 200 次的计算结果

| 反馈次数 (间隔 5 次) | \bar{x} | \bar{y} | \bar{z} | $\frac{d\bar{y}}{dt}$ | r |
|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------------------|---------|
| 1 | -1.8986 | -1.9111 | -51.2743 | 0.0205 | 28.0026 |
| 5 | 2.0498 | 2.0424 | 55.5230 | -0.1625 | 28.0043 |
| 10 | 0.7306 | 0.7252 | 20.0029 | -0.2835 | 27.9840 |
| 15 | -0.0025 | -0.0030 | -0.0687 | 0.0051 | 27.0267 |
| 20 | -0.6046 | -0.6062 | -15.7215 | -0.0122 | 27.0238 |
| 25 | 0.6425 | 0.6176 | 17.2933 | -0.3239 | 27.3728 |
| 30 | -0.4914 | -0.5181 | -12.7610 | -0.1282 | 27.2860 |
| 35 | -0.2946 | -0.2705 | -8.1888 | 0.3712 | 27.4580 |
| 40 | 0.1266 | 0.1451 | 3.0394 | 0.2954 | 27.4973 |
| 45 | -0.3129 | -0.3272 | -8.2264 | -0.0400 | 27.4655 |
| 50 | -0.1792 | -0.1779 | -4.7344 | -0.0367 | 27.6097 |
| 55 | -0.7694 | -0.7704 | -20.3993 | -0.0345 | 27.5590 |
| 60 | 0.3520 | 0.3687 | 9.2447 | 0.0854 | 27.5504 |
| 65 | -0.7911 | -0.7979 | -20.8837 | -0.1031 | 27.5358 |
| 70 | 1.1856 | 1.2168 | 31.1872 | 0.3391 | 27.6173 |
| 75 | 1.1093 | 1.1318 | 29.3830 | 0.0730 | 27.5748 |
| 80 | 0.2380 | 0.2625 | 6.2742 | 0.0152 | 27.5329 |
| 85 | -0.7454 | -0.7620 | -19.6720 | -0.0982 | 27.5454 |
| 90 | 0.3946 | 0.3982 | 10.6098 | -0.1352 | 27.5546 |
| 95 | 0.8636 | 0.8611 | 22.9624 | -0.0659 | 27.5110 |
| 100 | 0.0219 | -0.0082 | 0.8215 | -0.2324 | 26.5577 |
| 105 | 0.0910 | 0.0865 | 2.2982 | -0.0042 | 26.1489 |
| 110 | -0.8031 | -0.8251 | -19.8229 | -0.3398 | 26.1338 |
| 115 | -0.1796 | -0.2191 | -4.0223 | -0.4537 | 26.1451 |
| 120 | -0.6710 | -0.6638 | -17.0013 | 0.1258 | 26.1379 |
| 125 | 1.3501 | 1.3490 | 33.8406 | 0.0941 | 26.1342 |
| 130 | -0.8267 | -0.8101 | -21.0376 | 0.2409 | 26.1356 |
| 135 | 0.0003 | -0.0119 | 0.0710 | -0.0558 | 12.1428 |
| 140 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 145 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 150 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 155 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 160 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 165 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 170 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 175 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 180 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 185 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 190 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 195 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |
| 200 | 5.4507 | 5.4507 | 60.7287 | 0.0000 | 12.1414 |

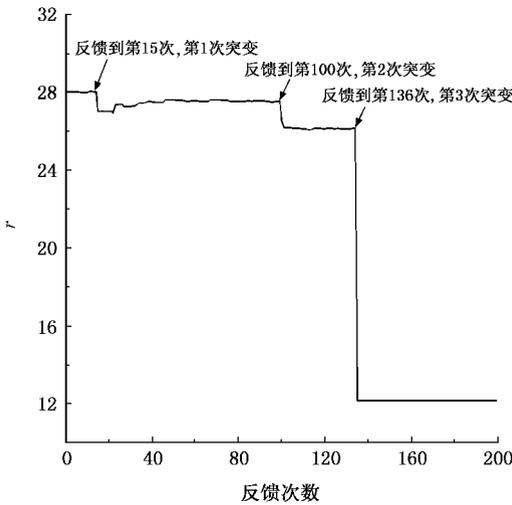


图2 r随反馈次数的变化情况

上面的分析说明,两种尺度的相互作用最终是使 r 减小,因而存在小尺度对大尺度的负反馈作用,

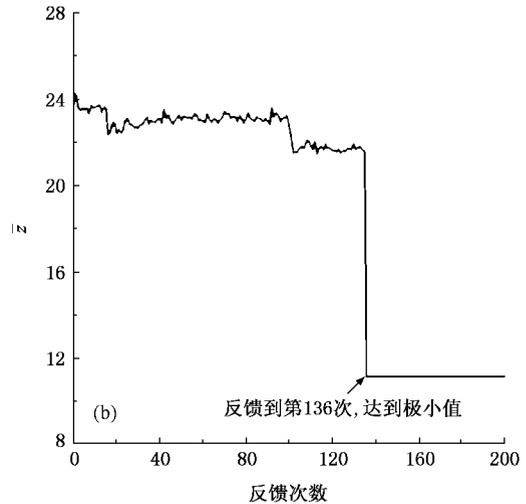
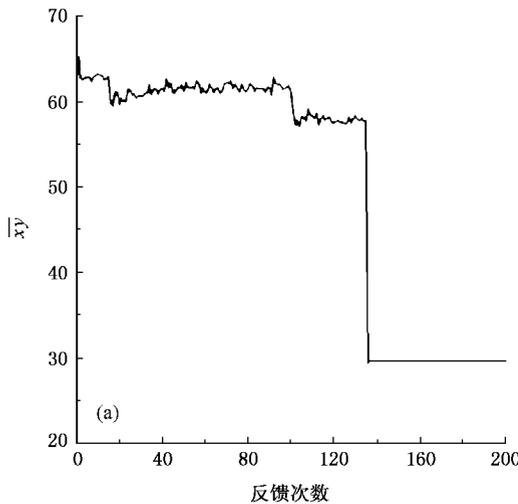


图3 \overline{xy} (a), \overline{z} (b)随反馈次数的变化

对比图2和图3(a),可以看到垂直热通量 \overline{xy} 的三次较大变化与 r 的三次突然变化有很好的对应,说明垂直热通量 \overline{xy} 的变化是决定 r 变化的主要原因. \overline{xy} 的减小表示上下层温差 ΔT 减小,因而 r 下降.当 $r = 12$ 左右时,已经到达Lorenz方程的定常状态 $C_{1,2}$.此时 x 和 y 已经不再随时间变化,因而 \overline{xy} 也不再随时间变化,所以不再有反馈作用, r 也不再变化.

变量 z 反映的是温度垂直廓线同线性分布的偏差.从图3(b)看出, \overline{z} 的变化情况与图2和图3(a)中 r 和 \overline{xy} 的变化情况是一致的,说明热通量 \overline{xy} 的变化

并且有时表现出一种突变的特征^[26,27].

将反馈到第136次时的 $r = 12.1414020849357$ 代入(4)式中的 $(\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)$,得到结果 $(x, y, z) = (\pm 5.4507252324648, \pm 5.4507252324648, 11.1414020849357)$,因此说明由混沌状态而突变到对流状态 $C_{1,2}$,此后就不再有反馈发生.所以小尺度运动对大尺度的作用是最终将不稳定的湍流运动减弱至一个稳定的平衡态.

4. \overline{xy} , \overline{z} 的变化和 r 变化同步

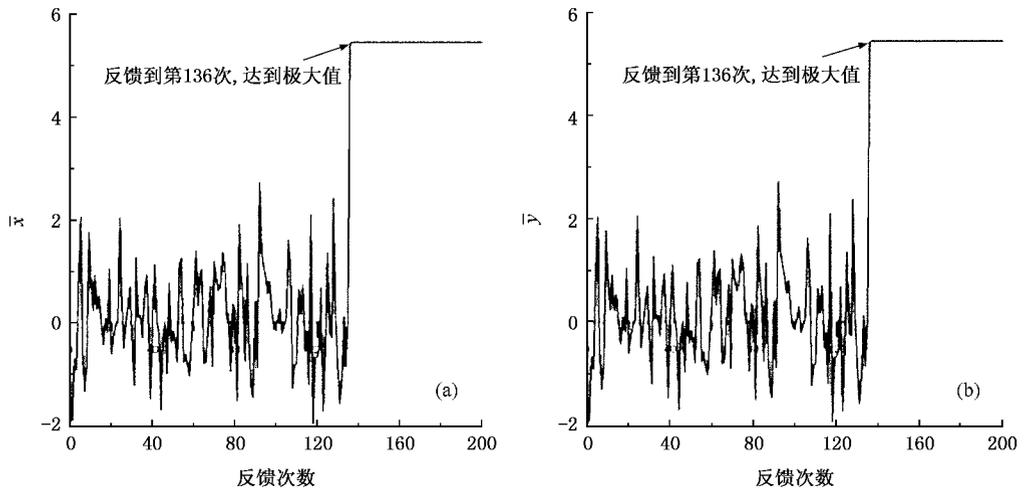
由于 x 表示对流,而 y 表示温差,因此 x 和 y 相乘的平均值 \overline{xy} 就表示上下输送的平均热通量.

另外, z 值表示垂直温度梯度的变化,因此 z 的平均 \overline{z} 也反映上下输送的强弱变化.图3(a)和3(b)是 \overline{xy} 和 \overline{z} 分别随反馈次数的变化图.

导致上下层温差 ΔT 的减小,因而温度的垂直梯度也减小.从图3(b)上还可以看到,在反馈到第136次时, \overline{z} 值达到极小值,并且保持此值不再改变.

5. \overline{x} , \overline{y} , \overline{z} 出现极值是 r 发生突变的条件

图4是平均状态的 x 和 y 随反馈次数的变化,在第二节中说明 x 与 y 是同号变化的.从图4中仍然可以看到平均状态的 x 和 y 也是同号变化的,反映出热空气上升和冷空气下沉的运动形式.并且可

图 4 $\overline{x}, \overline{y}$ 随反馈次数的变化

以看出, 当反馈到第 136 次时, \overline{x} 和 \overline{y} 同步达到极大值。

为什么 $\overline{x}, \overline{y}$ 同步达到极大值时, 可以反映图 1 中的第 3 次 r 值的突变呢?

对方程 (1) 取平均得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{dt} &= -p_r \overline{x} + p_r \overline{y}, \\ \frac{d\overline{y}}{dt} &= r\overline{x} - \overline{xz} - \overline{y}, \\ \frac{d\overline{z}}{dt} &= \overline{xy} - b\overline{z}. \end{aligned} \quad (7)$$

由 (7) 式看出, $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ 出现极值, 意味着 $\frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{d\overline{y}}{dt} = \frac{d\overline{z}}{dt} = 0$ 。但由于 $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ 随时间的变化完全是由 r 随时间变化引起的, 因此有 $\frac{d\overline{x}}{dt} = \frac{d\overline{x}}{dr} \frac{dr}{dt}$ 。因为 $\frac{dr}{dt} \neq 0$ 因此要使 $\frac{d\overline{x}}{dt} = 0$, 应有 $\frac{d\overline{x}}{dr} = 0$ 。同理可得到, 要使 $\frac{d\overline{y}}{dt} = 0, \frac{d\overline{z}}{dt} = 0$, 应有 $\frac{d\overline{y}}{dr} = 0, \frac{d\overline{z}}{dr} = 0$ 。因而方程 (7) 等

于零, 就相当于在反馈过程中, $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ 出现极值。图 4 显示 $\overline{x}, \overline{y}$ 最后出现极大值, 图 3 (b) 显示 \overline{z} 最后出现极小值, 因而 $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ 出现极值是两种尺度相互作用过程中 r 值发生突然下降的条件。

6. 结 论

Lorenz 方程在混沌区内会出现两种尺度的相互作用, 它表现为给定 Rayleigh 数 r 后, 激起了上层空气和下层空气的温差而形成的剧烈对流和湍流状态。相反剧烈对流和湍流状态会造成上下温差和垂直温度梯度的减小, 进而使得造成对流的 r 值减小。两种尺度相互作用, 直到定常态而停止。平均垂直热通量 \overline{xy} 以及平均垂直温度梯度 \overline{z} 的变化和 r 值的变化几乎同步对应。两种尺度相互作用过程中, r 值有时会发生突变。反馈停止前的那一次突变, 对流强度 \overline{x} 温度差变化 \overline{y} 会达到极大值, 而垂直温度梯度变化 \overline{z} 达到极小值。

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [2] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) 刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]
 [3] Guan X P, Peng H P, Li L X, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 28 (in Chinese) 关新平、彭海朋、李丽香、王益群 2001 物理学报 **50** 28]
 [4] Rayleigh L 1916 *Phil. Mag.* **32** 529

- [5] Abraham R H 1976 *Lecture Notes in Mathematics* **525** 10
 [6] Bailleul J 1980 *IEEE Trans. on Circ. Sys.* **27** 990
 [7] Ott E 1990 *Phys. Rev. Lett.* **164** 1196
 [8] Chen G 1997 *Chaos Soliton and Fractals* **8** 1461
 [9] Hubler A, Helv 1989 *Acta Phys.* **62** 343
 [10] Ditto W L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 3211
 [11] Hunt E R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1953

- [12] Tao C H , Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 281 (in Chinese) 陶朝海、陆君安 2003 *物理学报* **52** 281
- [13] Bai L , Zhang R , Weng J Q , Luo X S , Fang J Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 1226
- [14] Zheng Y A 2006 *Chin. Phys.* **15** 2549
- [15] Shinbrot T , Grebogi C , Ott E 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2863
- [16] Chen G 1993 *IEEE Trans. Circuits and Systems* **40** 829
- [17] Chen G 1992 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **2** 407
- [18] Kapitaniak T , Kocarev L 1993 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3** 459
- [19] Soltzman B 1962 *J. Atmos. Sci.* **19** 329
- [20] Jackson E A 1991 *Perspective of Nonlinear Dynamics* I , II (Cambridge : Cambridge University Press) p147
- [21] Sparrow C 1982 *The Lorenz Equation* (New York : Springer) p123
- [22] Franceschini V 1980 *J. Stat. Phys.* **22** 397
- [23] Poincaré H O 1989 *Newton's Method and Dynamical Systems* (Dordrecht : Kluwer Academic Publishers) p68
- [24] Campbell D 1983 *Order in Chaos* (Amsterdam : North-Holland) p212
- [25] Moon F C 1987 *Chaotic Vibrations* (New York : John Wiley) p301
- [26] Abrallum R H 1985 *Chaos , Fractal and Dynamics* (New York : Dekker) p65
- [27] Stewart H B 1986 *Dyn. Stab. Systems* **1** 87

Interaction of two kind scales in Lorenz equation^{*}

Liu Feng^{1,2)†} Liu Shi-Da^{1)‡} Liu Gang^{1)§} Liu Shi-Kuo¹⁾

¹ *Department of Atmospheric Science , School of Physics , Peking University , Beijing 100871 , China*

² *Meteorological Center of Central and Southern Regional Air Traffic Management Bureau of CAAC , Guangzhou 510406 , China*

³ *Nanchang Air Traffic Management Centre of CAAC , Nanchang 330114 , China*

(Received 5 May 2006 ; revised manuscript received 1 February 2007)

Abstract

In the chaos range of Lorenz equation , there is interaction between the smaller and larger scales. On the one hand , the Rayleigh number r determines the convective and turbulent flows in the air. On the other hand , the convective and turbulent flows have a feedback to the larger scale condition. The result of interaction between the scales leads to the decrease of the value of r , until the steady state of Lorenz equations is established. During the feedback process , the variation in vertical thermal flux \overline{xy} and vertical temperature gradient \overline{z} are the main causes that decide the change of number r . Moreover the end result of feedback displays a abrupt change.

Keywords : Lorenz equation , two kinds of scales , interaction

PACC : 0540 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90511009).

[†] E-mail : lf188@163.com

[‡] Corresponding author. E-mail : liusd@pku.edu.cn