第 56 卷 第 10 期 2007 年 10 月
1000-3290/2007/56(10)/5635-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 56, No. 10, October, 2007
c 2007 Chin. Phys. Soc.

幂律指数在 1 与 3 之间的一类无标度网络*

郭进利[1)†]　汪丽娜[1)2)]
1) (上海理工大学管理学院,上海　200093)
2) (内蒙古工业大学理学院,呼和浩特　010051)
(2006 年 12 月 29 日收到;2007 年 2 月 10 日收到修改稿)

借助排队系统中顾客批量到达的概念,提出节点批量到达的 Poisson 网络模型. 节点按照到达率为 λ 的 Poisson 过程批量到达系统. 模型 1,批量按照到达批次的幂律非线性增长,其幂律指数为 $\theta(0 \le \theta < +\infty)$. BA 模型是在 $\theta=0$ 时的特例. 利用 Poisson 过程理论和连续化方法进行分析,发现这个网络稳态平均度分布是幂律分布,而且幂律指数在 1 和 3 之间. 模型 2,批量按照节点到达批次的对数非线性增长,得出当批量增长较缓慢时,稳态度分布幂律指数为 3. 因此,节点批量到达的 Poisson 网络模型不仅是 BA 模型的推广,也为许多幂律指数在 1 和 2 之间的现实网络提供了理论依据.

关键词: 复杂网络, 度分布, 无标度
PACC: 0540J, 8980H, 0590, 0175

1. 引　　言

现实世界中个体之间的相互作用可以通过网络来描述,无论是 Internet 网、WWW 网、细胞相互作用网、供应链网络,还是社会关系网,在我们日常生活中大型复杂网络无处不在. 这些现象引起了学者们极大的兴趣[1—14]. 从 20 世纪 90 年代起,由于 Internet 网的飞速发展,人们越来越觉得有必要探讨大型复杂网络的拓扑结构. 计算机技术的发展为人们探讨复杂网络拓扑结构提供了工具. 但是,自 20 世纪 60 年代到 20 世纪末,人们对复杂网络的研究一直停留在以随机图[1]为理论的基础上. 然而,实证结果表明绝大多数现实网络的统计性质与随机图理论的结果并不相同. 不论是以 Internet 为代表的技术网络[8,9],还是以科学家合作网为代表的社会网络[14],都显示出具有近似幂律特征的度分布,而不是随机图理论所给出的泊松分布. 虽然 Price 对科学文献引文网络获得了幂律特征的度分布[15,16],但真正推动近年来复杂网络研究的是 Barabási 和 Albert 等人[2—4].

Barabási 等人的主要贡献是提出了增长和择优连接是形成无标度网络的机制;将连续化方法应用到了复杂网络的研究中,获得了增长网络节点度关于时间的微分方程,为复杂网络研究提供了新的思路. 由此,复杂网络论文如雨后春笋般连年增长. 然而,在目前的绝大部分增长网络模型中,每一时间步都是加入一个新节点,网络规模随时间线性增长. 由于不能对节点连续时间增长的复杂网络进行实证研究,只能按一定的时间间隔进行数据统计. 这样就形成了网络节点批量进入系统的实证研究. 例如在互联网中,在一个单位时间间隔内可能有多个新节点同时被统计,而且随着系统规模的增大被统计的新节点数目也随之增多. 正如摩尔定律所指出的,整个系统的规模按几何级数增长. 由此可见,网络规模可能随时间非线性变化. 本文主要研究节点批量非线性增长的网络具有怎样的拓扑结构.

文献[4]和文献[12]中列出了对现实网络实证的度分布指数(如表 1). 从表 1 可见,这些网络的特征是幂律指数小于 2,而现行无向无标度网络理论结果的幂律指数均大于 2,是否存在幂律指数小于 2 的理论模型,这是一个值得研究的重要问题.

针对上述问题,本文借助排队系统中顾客批量到达的概念,提出了节点批量到达的 Poisson 网络,节点按到达率为 λ 的 Poisson 过程批量到达网络. 模型 1,批量按照节点到达批次数的幂律呈非线性

* 上海市重点学科建设基金(批准号:T0502) 和上海市教育委员会自然科学基金(批准号:05EZ35) 资助的课题.
† E-mail: phd2000cn@yahoo.com.cn

表1 实际网络的度分布指数

网络名称	度分布指数
IP Backbone[12]	1.867
BBS 会员网[12]	1.6—1.9
Y than estuary[4]	1.05
Silwood Park[4]	1.13

的增长,幂律指数为 $\theta(0 \leq \theta < +\infty)$. 利用 Poisson 过程理论和连续化方法分析了这个网络的度分布,得到了节点瞬态度分布和网络稳态平均度分布的解析表达式,获得了在区间(1,3]内的幂律指数. 分析表明这类网络体现了无标度的特性[21]. 模型 2,批量按照节点到达批次数的对数函数增长,我们得出当批量增长较缓慢到与对数函数同阶时,稳态度分布幂律指数与 BA 模型结果相同. 最后我们给出了本文的结论,本文不仅仅是 BA 模型的推广,也为许多幂律指数在 1 和 2 之间的现实网络提供了理论依据.

2. 模型描述与分析

2.1. 节点批量到达的幂指数增长 Poisson 网络

(1) 非线性增长: 网络开始于较少的 m_0 个节点的完全图. 在 t 时刻,按照率为 λ 的 Poisson 过程同时到达 $r[N(t)]^\theta$ 个新节点,且每个新节点各自独立的与 $m(m \leq m_0)$ 个老节点相连,这里,$r>0$,$\theta \geq 0$,$N(t)$ 为 t 时刻节点到达的批次数;

(2) 择优连接: 在选择新节点的连接时,假设新节点连接到节点 i 的概率 Π 取决于节点 i 的度数 g_i,即满足

$$\Pi(g_i) = \frac{g_i}{\sum_j g_j}. \tag{1}$$

注:BA 模型可视为当 $\lambda = 1$,$\theta = 0$ 和 $r = 1$ 时节点批量到达的 Poisson 网络.

因为考察网络长时间的演化过程,可以将 $N(t)$ 视为节点批次的到达过程,则 $N(t)$ 是具有率为 λ 的 Poisson 过程,由 Poisson 过程理论[18]知,在$[0,t)$内到达网络的节点批次的平均数约为

$$\mu(t) = E[N(t)] = \lambda t, \tag{2}$$

t_i 表示第 i 批节点进入网络的时刻,即第 i 批节点的到达时刻. 为了方便起见,我们对第 i 批节点进行编号,令 $k_{ij}(t)$ 表示在时刻 t 第 i 批节点中第 j 个节点的度. 假定 k_{ij} 是连续实值变量,由于 k_{ij} 的变化率正比于概率 $\Pi(k_{ij})$,从而 k_{ij} 满足动态方程

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t} = mr\lambda^\theta t^\theta \lambda \frac{k_{ij}}{\sum_{i,j} k_{ij}}. \tag{3}$$

考虑到 $\sum_{i,j} k_{ij} = \int_0^t 2mr(\lambda t)^\theta \lambda \mathrm{d}t = \frac{2}{1+\theta} mr\lambda^{1+\theta} t^{1+\theta}$,代入(3)式,可得

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t} = \frac{(1+\theta) k_{ij}}{2t}, \tag{4}$$

故方程(4)满足初始条件 $k_{ij}(t_i) = m$ 的解为

$$k_{ij}(t) = m \frac{t^{\frac{1+\theta}{2}}}{t_i^{\frac{1+\theta}{2}}} \tag{5}$$

从(5)式,有

$$P\{k_{ij}(t) \geq k\} = P\left\{t_i \leq \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t\right\}. \tag{6}$$

根据 Poisson 理论[18],我们知道随机变量 t_i 服从 Γ-分布,

$$P\{t_i \leq x\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{(\lambda x)^l}{l!},$$

所以

$$P\{k_{ij}(t) \geq k\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t\right)^l}{l!},$$

$$t \gg t_i. \tag{7}$$

对于任意给定的 $i, h, t > 0$,并且 $i < h$,$t_i < t_h < t$,从(7)式可知,对于任何 $k > m$,有

$$\begin{aligned} P\{k_{ij}(t) \geq k\} &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t\right)^l}{l!} \\ &> 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t} \sum_{l=0}^{h-1} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t\right)^l}{l!} \\ &= P\{k_{hj}(t) \geq k\}. \end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式表明节点批量到达的 Poisson 网络体现了"富者愈富"的现象.

由(7)式,可以得到第 i 批节点中第 j 个节点的瞬态度分布为

$$\begin{aligned} P\{k_{ij}(t) = k\} &\approx \frac{\partial P\{k_{ij}(t) < k\}}{\partial k} \\ &= \frac{2\lambda t m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta) k^{1+\frac{2}{1+\theta}}} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}} t\right)^{i-1}}{(i-1)!}, \end{aligned}$$

$$t \gg t_i, \tag{9}$$

从(9)式,可以得到网络的稳态平均度分布

$$P(k) \approx \lim_{t\to\infty}\frac{1}{E[N(t)]}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{r[N(t)]^{\theta}}\times\sum_{j=1}^{r[N(t)]^{\theta}}p(k_{ij}(t)=k)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}}t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{2}{1+\theta}}t\right)^{i}}{i!}$$

$$=\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}, \tag{10}$$

对于充分大的 $t>0$ 和正整数 k,从(10)式可知节点批量到达的 Poisson 网络的稳态平均度分布的幂律指数为

$$\gamma = 1+\frac{2}{1+\theta}, \tag{11}$$

依此关系,当 $\theta=0$ 时,$\gamma=3$;当 $\theta=1$ 时,$\gamma=2$;当 $\theta\to+\infty$时,$\gamma\to1$. 由此可见,$\gamma\in(1,3]$. 由(8)式和(11)式,知道节点批量到达的幂指数增长 Poisson 网络是无标度网络[21].

下面我们分析网络度分布的矩,记 M_1 和 M_2 是网络度分布一阶矩和二阶矩.

情形 1　当 $0\le\theta<1$ 时,$2<\gamma\le3$,则

$$M_1=\sum_{k=m}^{\infty}kP(k)=\sum_{k=m}^{\infty}k\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}=\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{1+\theta}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{2}{1+\theta}}}<+\infty,$$

$$M_2=\sum_{k=m}^{\infty}k^2P(k)=\sum_{k=m}^{\infty}k^2\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}=\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{1+\theta}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1-\theta}{1+\theta}}}=+\infty,$$

由此可见,度值的均值收敛而方差发散. 说明度值的分布严重不均匀,因此,这类网络存在大量度值很小的节点,也存在数量较少的度值很高的节点(HUB 节点).

情形 2　当 $1\le\theta<+\infty$时,$1<\gamma\le2$,则

$$M_1=\sum_{k=m}^{\infty}kP(k)=\sum_{k=m}^{\infty}k\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}=\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{1+\theta}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{2}{1+\theta}}}=+\infty,$$

$$M_2=\sum_{k=m}^{\infty}k^2P(k)=\sum_{k=m}^{\infty}k^2\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{(1+\theta)k^{1+\frac{2}{1+\theta}}}=\frac{2m^{\frac{2}{1+\theta}}}{1+\theta}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1-\theta}{1+\theta}}}=+\infty,$$

由于情形 2 中均值发散,说明网络中 HUB 节点偏多. 对于技术类网络来说,这意味着建设成本显著提高.

2.2. 节点批量到达的对数增长 Poisson 网络

(1)非线性增长:网络开始于较少的 m_0 个节点的完全图. 在 t 时刻,按照率为 λ 的 Poisson 过程同时到达 $r\ln N(t)$ 个新节点,且每个新节点各自独立的与 $m(m\le m_0)$个老节点相连,这里,$r>0$,$\theta\ge0$,$N(t)$为 t 时刻节点到达的批次数;

(2)择优连接:与节点批量到达幂指数增长 Poisson 网络的择优连接相同.

与 2.1. 节同理,k_{ij}满足动态方程

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t}=mr(\ln\lambda t)\lambda\frac{k_{ij}}{\sum_{i,j}k_{ij}}. \tag{12}$$

由于 $\sum_{i,j}k_{ij}=\int_0^t 2mr(\ln\lambda t)\lambda\mathrm{d}t=2mr\lambda t(\ln\lambda t-1)$,代入(12)式,得

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t}=\frac{k_{ij}}{2t\left(1-\frac{1}{\ln\lambda t}\right)},$$

当 t 充分大时,上述方程可近似为

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{2t}k_{ij}, \tag{13}$$

方程(13)满足初始条件 $k_{ij}(t_i)=m$ 的解为

$$k_{ij}(t)=m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

从(14)式,有

$$P\{k_{ij}(t)\ge k\}=P\left\{t_i\le\left(\frac{m}{k}\right)^2t\right\}. \tag{15}$$

根据 Poisson 理论[18]可以推得

$$P\{k_{ij}(t)\ge k\}=1-e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t\right)^l}{l!}. \tag{16}$$

对于任意给定的 $i,h,t>0$,并且 $i<h$,$t_i<t_h<t$ 从(16)式可知对于任何 $k>m$,我们有

$$P\{k_{ij}(t)\ge k\}=1-e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t}\sum_{l=0}^{i-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t\right)^l}{l!}>1-e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t}\sum_{l=0}^{h-1}\frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2t\right)^l}{l!}$$

$$= P\{k_{hj}(t) \geq k\}. \tag{17}$$

这同样体现了"富者愈富"的现象.

由(16)式,可以得到第 i 批节点中第 j 个节点的瞬态度分布为

$$P\{k_{ij}(t) = k\} \approx \frac{\partial P\{k_{ij}(t) < k\}}{\partial k}$$

$$= \frac{2\lambda t m^2}{k^3} e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2 t} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right)^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{18}$$

由此可得该网络的稳态平均度分布为

$$P(k) \approx \lim_{t\to\infty} \frac{1}{E[N(t)]} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r[\ln N(t)]} \times \sum_{j=1}^{r[\ln N(t)]} p(k_{ij}(t) = k)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2m^2}{k^3} e^{-\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2 t} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda\left(\frac{m}{k}\right)^2 t\right)^{i}}{i!}$$

$$= \frac{2m^2}{k^3}, \tag{19}$$

对于充分大的 $t > 0$ 和正整数 k,从(19)式可知稳态平均度分布的幂律指数为

$$\gamma = 3. \tag{20}$$

从2.2节的分析我们发现当每次新加入节点个数增长缓慢到与对数函数同阶时,所得网络稳态度分布幂律指数为 $\gamma = 3$,与BA模型结果相同.

3. 结 论

文献[20]分析了两个大型语义网络HowNet和WordNet的全局意义结构,发现两者都是具有小世界和无标度特征的复杂网络.但是它们都具有一些独特的属性,两者连接度分布的幂律指数介于1和2之间,并不像现行理论结果分析的许多常见无标度网络的幂律指数介于2和3之间.本文结果表明,节点批量到达的幂指数增长Poisson网络其幂律指数介于1和3之间.由此可见,节点批量到达的幂指数增长Poisson网络模型不仅是BA模型的推广,而且它将无标度网络模型的理论幂律指数从区间(2,3]扩展到区间(1,3]上.$\theta = 1$ 是网络类的临界值,它将网络类分成一类是HUB节点偏多的网络,一类是HUB节点存在数量较少的网络.而对于节点批量到达的对数增长Poisson网络,我们发现当批量增长较缓慢时,其幂律指数为3,与BA模型结果相同.然而对于网络节点批量增长速度达到什么程度时,破坏网络的无标度性,是值得进一步研究的问题.

[1] Erdos P, Renyi A 1960 *Publications of the Mathematica Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **5** 17
[2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
[3] Barabási A L, Albert R, Jeong H 1999 *Physica* A **272** 173
[4] Albert R, Barabási A L 2002 *Phys. Rev. Mod.* **74** 47
[5] Lü H, Yu X H, Chen G R 2004 *Physica* A **334** 281
[6] Lü H, Chen G R 2005 *IEEE Trans. on Auto. Contr.* **50** 841
[7] Guo J L 2007 *Chin. Phys.* **16** 1239
[8] Faloutsos M, Faloutsos P, Faloutsos C 1999 *Comput. Commun. Rev.* **29** 251
[9] Pastor Satorras R, Vázquez A, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 258
[10] Dorogovtsev S N, Mendes J F F 2001 *Phys. Rev.* E **63** 50
[11] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4633
[12] Kou Z B, Zhang C S 2003 *Phys. Rev.* E **67** 361171
[13] Newman M E J 2003 *SIAM Rev.* **45** 167
[14] Newman M E J 2001 *PNAS* **98** 404
[15] Price D de S 1965 *Science* **149** 510
[16] Price D de S 1976 *J. Amer. Soc. Inform. Sci.* **27** 292
[17] Li Y, Shan X M, Ren Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3695 (in Chinese) [李 炅、山秀明、任 勇 2004 物理学报 **53** 3695]
[18] Ross S M 1983 *Stochastic Processes* (New York: John Wiley & Sons, Inc.)
[19] Li J, Wang B H, Jiang P Q, Zhou T, Wang W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3695 (in Chinese) [李 季、汪秉宏、蒋品群、周涛、王文旭 2006 物理学报 **55** 3695]
[20] Tang L, Zhang Y G, Fu X 2006 *J. of Southeast Univ.* (English Edition) **22** 413
[21] Guo J L, Wang C P 2007 *J. of Univ. of Shanghai for Sci. and Techn.* **27** (in Chinese) [郭进利、王翠萍 2007 上海理工大学学报 **27**]

Scale-free networks with the power-law exponent between 1 and 3 *

Guo Jin-Li[1)†]　Wang Li-Na[1)2)]

1) (Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

2) (College of Sciences, Inner Mongolian University of Technology, Hohhot 010051, China)

(Received 29 December 2007; revised manuscript received 10 February 2007)

Abstract

Basing on the batch arrival concept in the queue theory, this paper proposes a Poisson network model with node batch arrival. The Nodes arrive the system as a Poisson process with rate λ. In the first model, the batch is a power function of the batch number with exponent $\theta(0 \le \theta < +\infty)$. Using Poisson process theory and continuum approach, we found that the stationary mean degree distribution of this model is a power-law distribution, and its power-law exponent is between 1 and 3. In the second model, the batch is a log function of the batch number and we obtained that the power-law exponent of stationary mean degree distribution is 3 when the batch rises more slowly. So our model is not only the extension of the BA model, but also a theoretical foundation of many real networks of which the power-law exponent is between 1 and 2.

Keywords: complex network, degree distribution, scale-free

PACC: 0540J, 8980H, 0590, 0175

* Project supported by the Foundation of Priority Academic Discipline of Shanghai, China (Grant No. T0502) and the Natural Science Foundation of Education Committee of Shanghai, China (Grant No. 05EZ35).

† E-mail: phd2000cn@yahoo.com.cn