

# 随机 Bonhoeffer-Van der Pol 系统的随机混沌控制<sup>\*</sup>

张莹<sup>1)†</sup> 徐伟<sup>1)</sup> 孙晓娟<sup>2)</sup> 方同<sup>3)</sup>

1) (西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

2) (北京航空航天大学理学院, 北京 100083)

3) (西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(2007 年 1 月 18 日收到 2007 年 2 月 6 日收到修改稿)

讨论了具有有界随机参数的随机 Bonhoeffer-Van der Pol 系统的随机混沌现象, 并利用噪声对其进行控制. 首先运用 Chebyshev 多项式逼近的方法, 将随机 Bonhoeffer-Van der Pol 系统转化为等价的确定性系统, 使原系统的随机混沌控制问题转换为等价的确定性系统的确定性混沌控制问题. 继而可用 Lyapunov 指数指标来研究等价确定性系统的确定性混沌现象和控制问题. 数值结果表明, 随机 Bonhoeffer-Van der Pol 系统的随机混沌现象与相应的确定性 Bonhoeffer-Van der Pol 系统极为相似. 利用噪声控制法可将混沌控制到周期轨道, 但是在随机参数及其强度的影响下也呈现出一些特点.

关键词: Chebyshev 多项式, 随机 Bonhoeffer-Van der Pol 系统, 随机混沌, 混沌控制

PACC: 0545

## 1. 引言

Bonhoeffer-Van der Pol (BVP) 系统是一个简单的用来描述电刺激在神经细胞膜上传播的二维模型<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \frac{1}{3}x^3 - y + K(t), \\ \dot{y} &= c(x + a - by), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $K(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t$ ,  $a, b, c, A_0$  和  $A_1$  为常数. BVP 系统作为一个在生物和物理领域中有重要意义的动力系统, 有着丰富的非线性现象<sup>[2-4]</sup>, 如倍周期分岔、Hopf 分岔、魔鬼阶梯和混沌等, 且其混沌控制也已经被 Rajasekar 和 Lakshmanan 进行了充分的研究<sup>[5]</sup>. 然而这些研究都局限于确定性 BVP 系统, 本文将在这些确定性现象的基础上研究随机 BVP (SBVP) 系统的随机混沌现象和控制问题.

对于随机结构分析有 3 种基本的数值方法: Monte-Carlo 方法、随机摄动法和随机系统的正交多项式逼近法. 第三种方法由文献 6, 7 提出, 最后得到 Li 的进一步发展<sup>[8]</sup>, 是一个有效的解析方

法<sup>[9-12]</sup>. 近来, 一些典型动力学模型中的随机分岔和混沌现象已经运用 Chebyshev 多项式逼近方法得到了成功的研究<sup>[13-18]</sup>. 本文将运用同样的策略来研究 SBVP 系统.

我们通过 Chebyshev 多项式逼近的方法把 SBVP 系统的随机混沌控制问题转化为对其等价确定性系统的混沌控制问题. 本文借助外部噪声进行控制, 此方法已经成为一个极其重要的控制方法, 它已拓广应用于众多领域, 例如, 外部随机驱动法可用于对社会系统、经济系统和神经网络系统等进行宏观控制. 在外部噪声的作用下, 能够产生多种外部噪声效应, 噪声在有些情形下对混沌有控制作用, 另一些情形下可能会失控. 就 SBVP 系统而言, 随着噪声强度的增长会出现混沌与有序的多次反复相互转变, 随后才维持在某种有序运动. 也就是说只有适当的噪声强度, 才可能使系统从混沌态转变到持续的有序态, 即达到混沌控制的目的.

本文首先将 SBVP 系统转化为等价的确定性系统, 然后对 SBVP 系统的随机混沌现象进行了分析, 最后运用外部噪声控制法对 SBVP 系统的随机混沌行为进行控制.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10332030, 10472091)和西北工业大学博士论文创新基金(批准号: CX200712)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yingzhang1031@gmail.com

## 2. SBVP 系统的 Chebyshev 多项式逼近

### 2.1. Chebyshev 多项式

当随机参数服从拱形分布时,其概率密度函数的表达式为<sup>[9]</sup>

$$p(\xi) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-\xi^2} & |\xi| \leq 1, \\ 0 & |\xi| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

在正交多项式逼近法中,多项式基的选取与随机的概率密度函数是一一对应的,基于此概率密度函数,选择第 2 类 Chebyshev 多项式作为与其对应的正交多项式基,表达式如下:

$$H_n(\xi) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2\xi)^{n-2k}. \quad (3)$$

第 2 类 Chebyshev 多项式的循环递推公式为

$$\xi H_n(\xi) = \frac{1}{2} [H_{n-1}(\xi) + H_{n+1}(\xi)], \quad (4)$$

其加权正交性可以表示为

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} H_i(\xi) H_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

由于 Chebyshev 多项式的加权正交性,任意的函数  $f(\xi) \in L^2$  均可以表示成如下级数形式:

$$f(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i H_i(\xi), \quad (6)$$

其中

$$c_i = \int_{-1}^1 p(\xi) f(\xi) H_i(\xi) d\xi. \quad (7)$$

在实际中对(6)式只能取有限项,此时  $f(\xi) =$

$\sum_{i=0}^N c_i H_i(\xi)$  是在最小均方残差意义下对(6)式的一个逼近<sup>[19]</sup>.

### 2.2. SBVP 系统的 Chebyshev 多项式逼近

如果在 BVP 系统(1)中,  $b = \bar{b} + \sigma\xi$  是一个随机参数,其中  $\bar{b}$  是  $b$  的均值,  $\xi$  为服从  $[-1, 1]$  上拱形分布的随机变量,  $\sigma$  是  $\xi$  的强度,  $I(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t)$  则具有有界随机参数的 SBVP 系统表示为

$$\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y + K(t), \quad (8)$$

$$\dot{y} = c[x + a - (\bar{b} + \sigma\xi)y].$$

随机系统的响应也是随机的,则系统(8)的响应应该是时间  $t$  和随机变量  $\xi$  的函数,即

$$x = x(t, \xi), y = y(t, \xi). \quad (9)$$

运用正交多项式逼近,响应(9)可表示为如下级数形式:

$$\begin{aligned} x(t, \xi) &= \sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(\xi), \\ y(t, \xi) &= \sum_{i=0}^N y_i(t) H_i(\xi), \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $i$  是 Chebyshev 多项式的序号,  $N$  表示所取多项式的最高阶数. 当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{i=0}^N x_i(t) H_i(\xi)$  和

$\sum_{i=0}^N y_i(t) H_i(\xi)$  分别严格等价于 SBVP 系统的响应  $x(t, \xi)$  和  $y(t, \xi)$ . 本文我们取  $N = 4$  则

$$\begin{aligned} x(t, \xi) &= \sum_{i=0}^4 x_i(t) H_i(\xi), \\ y(t, \xi) &= \sum_{i=0}^4 y_i(t) H_i(\xi). \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式是在最小均方残差意义下的近似解.

将(11)式代入(8)式得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 \dot{x}_i(t) H_i(\xi) &= \sum_{i=0}^4 x_i(t) H_i(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[ \sum_{i=0}^4 x_i(t) H_i(\xi) \right]^3 \\ &\quad - \sum_{i=0}^4 y_i(t) H_i(\xi) + K(t), \\ \sum_{i=0}^4 \dot{y}_i(t) H_i(\xi) &= c \left[ \sum_{i=0}^4 x_i(t) H_i(\xi) + a \right. \\ &\quad \left. - \bar{b} \sum_{i=0}^4 y_i(t) H_i(\xi) \right. \\ &\quad \left. - \sigma\xi \sum_{i=0}^4 y_i(t) H_i(\xi) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

对上式我们运用 Chebyshev 多项式的性质和相关公式,最终将其转化为如下与 SBVP 系统(8)等价的确定性系统<sup>[9]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= -\frac{1}{3}X_0(t) - y_0(t) + x_0(t) + K(t), \\ \dot{y}_0(t) &= cx_0(t) + ac - c\bar{b}y_0(t) - \frac{1}{2}c\sigma y_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{3}X_1(t) - y_1(t) + x_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= cx_1(t) - c\bar{b}y_1(t) - \frac{1}{2}c\sigma[y_0(t) + y_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{3}X_2(t) - y_2(t) + x_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= cx_2(t) - c\bar{b}y_2(t) - \frac{1}{2}c\sigma[y_1(t) + y_3(t)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{x}_3(t) = -\frac{1}{3}X_3(t) - y_3(t) + x_3(t),$$

$$\dot{y}_3(t) = cx_3(t) - c\bar{b}y_3(t) - \frac{1}{2}c\sigma[y_2(t) + y_4(t)],$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{1}{3}X_4(t) - y_4(t) + x_4(t),$$

$$\dot{y}_4(t) = cx_4(t) - c\bar{b}y_4(t) - \frac{1}{2}c\sigma y_3(t).$$

由于在以上转化过程中我们曾对方程关于  $\xi$  取期望<sup>[15]</sup>,因而得到的等价确定性系统(13)是一个加权均值系统,所以等价确定性系统(13)的响应必将呈现原 SBVP 系统(8)的一些均值特性.则 SBVP 系统的集合平均响应可表示为

$$E[x(t, \xi)] = \sum_{i=0}^4 x_i(t) E[H_i(\xi)] = x_0(t),$$

$$E[y(t, \xi)] = \sum_{i=0}^4 y_i(t) E[H_i(\xi)] = y_0(t). \quad (14)$$

当  $\xi \equiv 0$  时, SBVP 系统(8)简化成确定性 BVP 系统:

$$\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y + K(t), \quad (15)$$

$$\dot{y} = c(x + a - \bar{b}y).$$

下文中我们将确定性系统(15)的响应  $x(t)$  和  $y(t)$  记为 DR;等价确定性系统(13)的集合平均响应  $E[x(t, \xi)]$  和  $E[y(t, \xi)]$  记为 EMR.用 EMR 来研究 SBVP 系统的基本非线性现象,通过 DR 和 EMR 的比较观察 SBVP 系统的特点.

### 3. SBVP 系统的随机混沌现象

本节我们通过 SBVP 系统的等价确定性系统(13)和确定性 BVP 系统(15)的最大 Lyapunov 指数来分析其混沌现象<sup>[20]</sup>,参数选取如下<sup>[2,3]</sup>:

$$a = 0.7, \bar{b} = 0.8, c = 0.1, \omega = 1.0,$$

$$A_0 = 0.0, A_1 \in [0.60, 0.85].$$

首先比较  $\sigma = 0.0$  时两系统的最大 Lyapunov 指数,如图 1(a)所示.其最大 Lyapunov 指数表现出显著的一致性.此现象表明 Chebyshev 多项式逼近方法在研究 SBVP 系统的随机混沌行为中是有效的.当随机参数强度  $\sigma$  增加到 0.015 时,从图 1(b)可以见,由于随机因素的影响等价确定性系统(13)的最大 Lyapunov 为正数的参数区间发生扩散,且此区间中等价确定性系统(13)较确定性 BVP 系统(15)在混沌区域的最大 Lyapunov 指数明显增大.

从图 2(a)可看出,随着随机参数强度  $\sigma$  的增加,系统(13)的最大 Lyapunov 指数为正的参数区间,

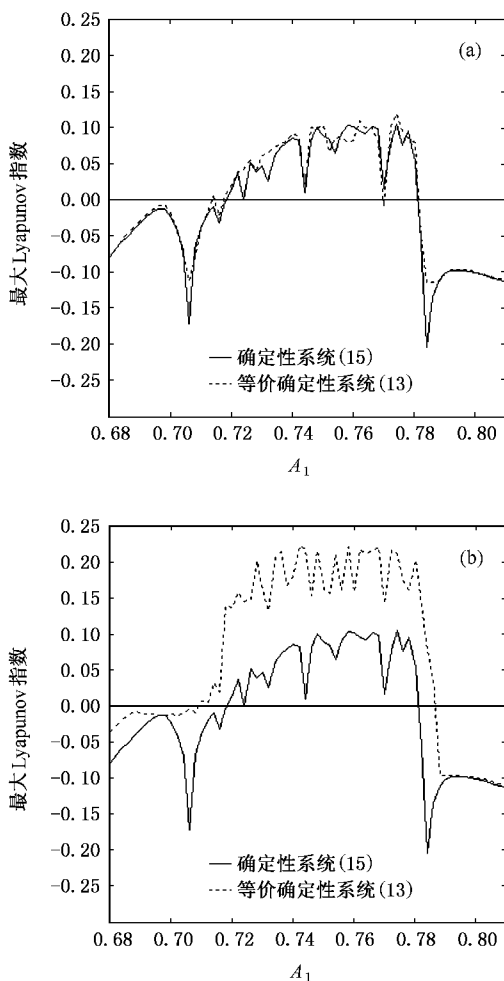


图1 当  $A_1 \in [0.60, 0.85]$  时,系统(15)和(13)的最大 Lyapunov 指数图 (a)  $\sigma = 0.0$ ; (b)  $\sigma = 0.015$

扩散程度不断增加,从进入和离开混沌区域处的最大 Lyapunov 指数局部放大图 2(b)和 2(c)可明显看出这一扩散现象.上述现象说明 SBVP 系统的混沌响应受随机参数及其强度的影响.换句话说,SBVP 系统和确定性 BVP 系统中的混沌行为极为相似,但在随机参数的影响下,最大 Lyapunov 指数为正数的相应参数区间发生扩散,且扩散程度随着随机参数强度的增加而增强.

### 4. SBVP 系统的随机混沌控制

由第 2 节分析可知,系统(13)为 SBVP 系统(8)的等价确定性系统,故可将 SBVP 系统的随机混沌控制化简为对其等价确定性系统(13)的确定性混沌控制,从而实现了对原 SBVP 系统的随机混沌控制.这里采用非反馈的外部噪声控制法,利用白噪声达到

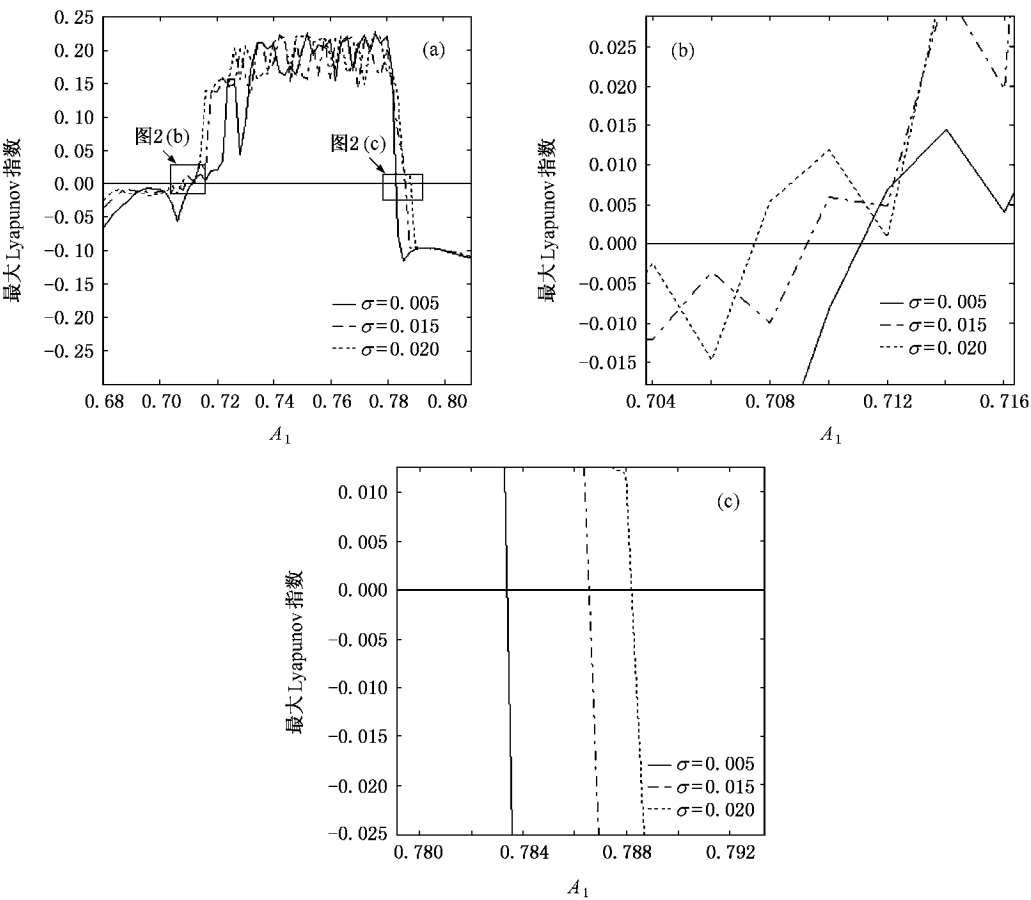


图 2  $A_1 \in [0.60 \ 0.85]$  时不同随机参数强度  $\sigma$  时等价确定性系统 (13) 的最大 Lyapunov 指数

混沌控制的目的.

在系统 (13) 中取外部激励项为  $K(t) + Q\gamma(t)$ ,  $Q\gamma(t)$  为噪声控制器. 则在添加噪声控制器后 SBVP 系统的等价确定性系统 (13) 变为如下受控系统的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= -\frac{1}{3}X_0(t) - y_0(t) + x_0(t) \\ &\quad + K(t) + Q\gamma(t), \\ \dot{y}_0(t) &= cx_0(t) + ac - c\bar{b}y_0(t) - \frac{1}{2}c\sigma y_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{3}X_1(t) - y_1(t) + x_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= cx_1(t) - c\bar{b}y_1(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}c\sigma[y_0(t) + y_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{3}X_2(t) - y_2(t) + x_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= cx_2(t) - c\bar{b}y_2(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}c\sigma[y_1(t) + y_3(t)], \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= -\frac{1}{3}X_3(t) - y_3(t) + x_3(t), \\ \dot{y}_3(t) &= cx_3(t) - c\bar{b}y_3(t) \\ &\quad - \frac{1}{2}c\sigma[y_2(t) + y_4(t)], \\ \dot{x}_4(t) &= -\frac{1}{3}X_4(t) - y_4(t) + x_4(t), \\ \dot{y}_4(t) &= cx_4(t) - c\bar{b}y_4(t) - \frac{1}{2}c\sigma y_3(t), \end{aligned}$$

其中  $Q$  为噪声强度,  $\gamma(t)$  为与随机参数  $b$  独立的高斯白噪声, 满足  $E\gamma(t) = 0, E\gamma(t)\gamma(t + \tau) = \delta(\tau)$ , 其中  $\delta(\tau)$  为 Dirac-Delta 函数.

4.1. 随机参数强度  $\sigma = 0.01$  时的随机混沌控制

首先将讨论在强度恒定的随机参数影响下, SBVP 系统的随机混沌控制问题. 根据 3 节的分析, 受控系统 (16) 参数选取如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.7, \bar{b} = 0.8, c = 0.1, \omega = 1.0, \\ A_0 &= 0.0, A_1 = 0.781, \sigma = 0.01. \end{aligned}$$

当噪声强度  $Q = 0.0$  时, 从图 3 可看出在没有噪声

参与的情况下响应 EMR 是混沌的,其 Lyapunov 指数为 0.19.此时逐渐增加白噪声的强度,从受控系统(16)响应的 EMR 的 Lyapunov 指数计算数据和图 4 可清楚看到,当  $Q$  增加到 0.0006 时 Lyapunov 指数已为负,响应被控制到有序状态.

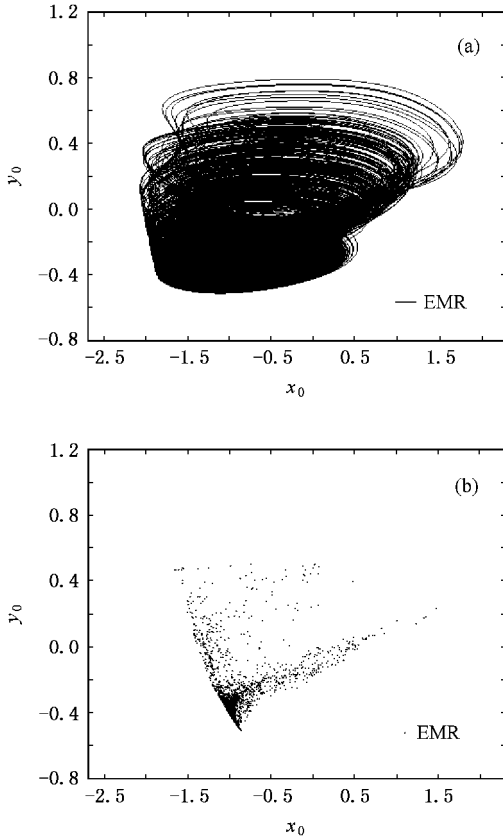


图 3 在受控系统(16)中当  $Q = 0.0$  时 EMR 的相图(a)和 EMR 的 Poincaré 截面(b)

随着噪声强度  $Q$  的继续增加,从图 4(b)中最大 Lyapunov 指数的规律变化可知,混沌和有序状态交替出现,多次反复相互转变,随后才维持在某种有序运动,最大 Lyapunov 指数趋于稳定.分析知此过程经历了四种周期态,从响应 EMR 的时间历程图和相图知它们分别为周期  $4T$  ( $T = 2\pi/\omega$ ) 运动,见图 5(a)和(b);周期  $3T$  运动,见图 5(c)和(d);周期  $2T$  运动,见图 5(e)和(f);周期  $1T$  运动,见图 5(g)和(h).故选择不同的噪声强度  $Q$ ,最初的随机混沌便可以控制到不同周期的轨道上,且随着噪声强度  $Q$  的增加,可被控制到的有序状态的周期数递减.从上面的分析和数值模拟结果可以看出,采用噪声控制法对 SBVP 系统的等价确定性系统进行混沌控制是有效的,也即实现了对 SBVP 系统(8)混沌态的控制.

同时还出现了混沌和有序状态交替出现的现象.

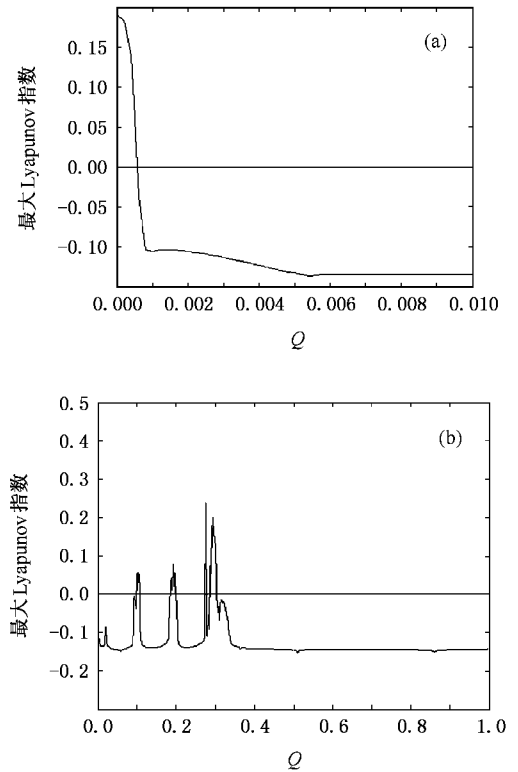


图 4 受控系统(16)的最大 Lyapunov 指数图 (a)  $Q \in [0, 0.01]$  (b)  $Q \in [0, 1]$

#### 4.2. 随机参数强度 $\sigma$ 的变化对 SBVP 系统随机混沌控制效果的影响

4.1 节讨论了  $\sigma = 0.01$  时利用白噪声对 SBVP 系统进行控制的效果,显然 SBVP 系统中随机参数强度  $\sigma$  是可变的,因而除研究随机参数强度恒定情况下的随机混沌控制外,还需对随机参数变化的情况进行相应的分析,从而更清楚地了解 SBVP 系统的混沌控制在随机参数影响下的特点.本小节中系统(16)参数选取如下:

$$a = 0.7, \bar{b} = 0.8, c = 0.1, \omega = 1.0, \\ A_0 = 0.0, A_1 = 0.781,$$

并取  $\sigma = 0.01$ ,  $\sigma = 0.05$  和  $\sigma = 0.1$  为例,分析三者在白噪声控制下最大 Lyapunov 指数的变化特点,如图 6.由图 6 可知,在白噪声作用下对不同的  $\sigma$ ,混沌态都得到了控制,且随噪声强度的增大均出现混沌和有序交替,最后 Lyapunov 指数趋于平稳的现象.说明对于随机参数强度的变化,用噪声控制法对混沌进行控制是有效的.

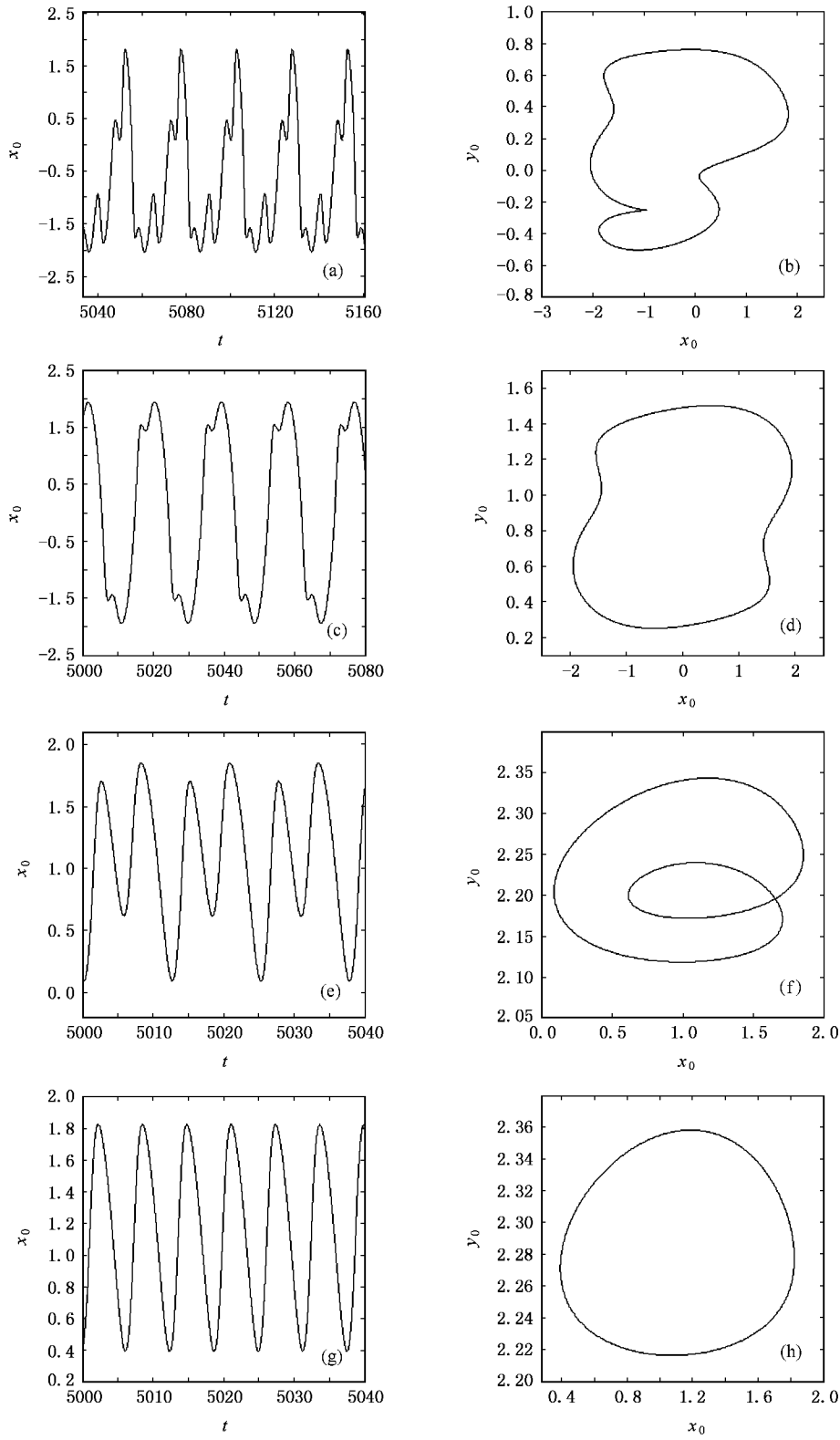


图 5  $Q$  取不同值时受控系统 (16) 中响应 EMR 的时间历程图和相图 (a)(b)  $Q=0.0006$ , 周期  $4T$ ; (c), (d)  $Q=0.15$ , 周期  $3T$ ; (e)(f)  $Q=0.32$ , 周期  $2T$ ; (g)(h)  $Q=3.3$ , 周期  $1T$

从图 6 还可看出对于不同的随机参数强度其控制过程有一定差别. 图 7 为图 6 在  $Q \in [0, 0.1]$  和

$Q \in [0.28, 0.45]$  的局部放大. 图 7(a) 表明, 随机参数的强度越大受控系统第一次进入有序状态所需的

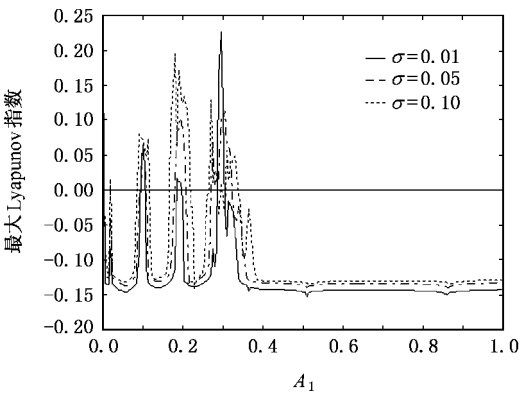


图 6 在  $Q \in [0, 1]$  时受控系统 (16) 的最大 Lyapunov 指数图

噪声强度越大 ;图 7 (b)表明 ,经历了混沌与有序状态的交替后进入稳定状态所需要的控制强度也随着随机参数的强度增大而增大 ,即随机参数强度增大控制点后移 .图 8 给出第一次进入有序状态和最后趋于稳定后某一噪声强度时的时间历程图和相图 ,可见对不同的随机参数强度 ,被控制到周期态时其运动状态相似 .

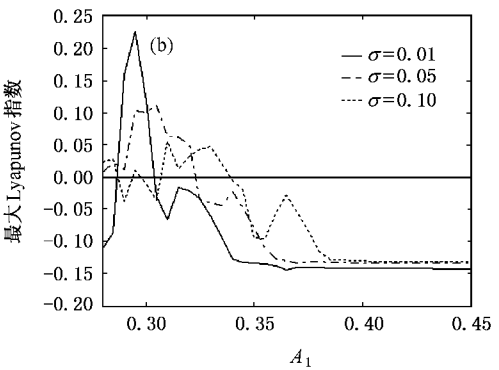
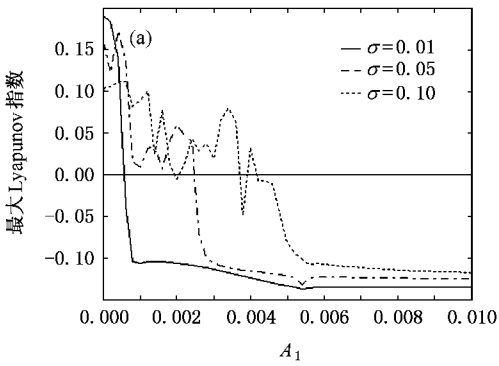


图 7 受控系统 (16) 的最大 Lyapunov 指数图 (a)  $Q \in [0, 0.01]$  ;(b)  $Q \in [0.28, 0.45]$

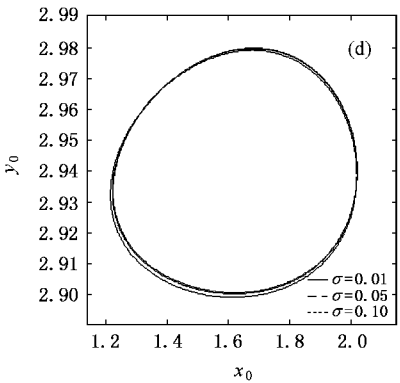
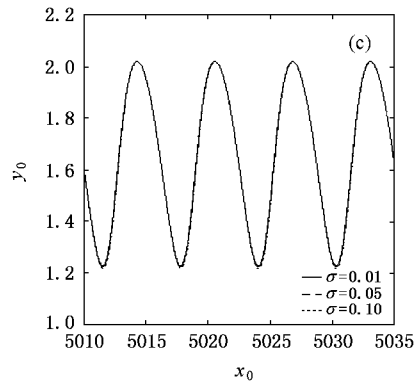
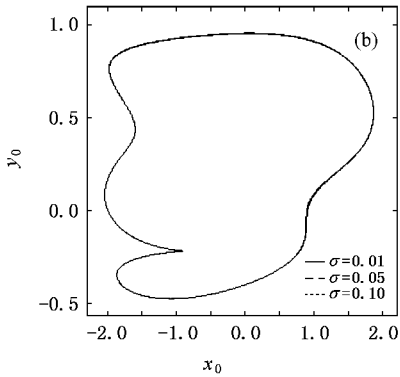
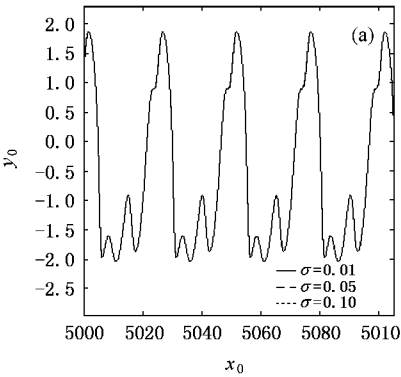


图 8 受控系统 (16) 中响应 EMR 的时间历程图和相图 (a)  $Q = 0.01$  ;(b)  $Q = 0.5$

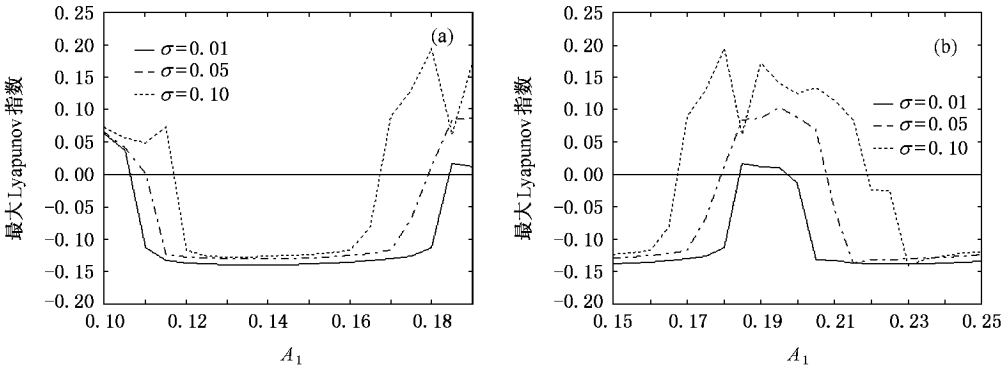


图 9 受控系统(16)的最大 Lyapunov 指数图 (a)  $Q \in [0.10, 0.19]$ ; (b)  $Q \in [0.15, 0.25]$

图 9 为图 6 在  $Q \in [0.10, 0.19]$  和  $Q \in [0.15, 0.25]$  的局部放大, 分别为混沌与有序状态多次反复相互转变过程中的周期和混沌区域. 可见随着随机参数强度的增大, 周期区域缩小混沌区域扩散. 此现象存在于每一个交替的周期和混沌区域中.

5. 结 论

本文讨论了具有有界随机参数的 SBVP 系统的随机混沌现象, 并利用白噪声对其进行控制. 首先运用 Chebyshev 多项式逼近法, 将 SBVP 系统转化为等价确定性系统, 则原系统的随机混沌控制问题转换为等价确定性系统的混沌控制问题, 继而可用 Lyapunov 指数指标来研究等价确定性系统的混沌现

象和混沌控制问题. 数值结果表明, SBVP 系统和确定性 BVP 系统中的混沌行为极为相似, 但在随机参数的影响下, 最大 Lyapunov 指数为正数的相应参数区间发生了扩散现象, 且扩散程度随着随机参数强度的增加而增强. 然后采用非反馈的噪声控制法对 SBVP 系统的等价确定性系统取不同随机参数强度的情况进行混沌控制, 数值结果表明了其有效性, 从而实现了 SBVP 系统的随机混沌控制. 控制过程中还出现了混沌和有序状态多次反复相互转变, 随后才维持在某种有序运动. 该现象在随机参数及其强度的影响下也呈现出一些特点, 即在控制过程中随着随机参数强度的增大控制点后移, 转变过程中周期区域缩小混沌区域扩散.

[ 1 ] Fitzhugh R 1969 *Biological Engineering* ( New York : McGraw-Hill )  
[ 2 ] Rajasekar S , Lakshmanan M 1988 *Phys. D* **32** 146  
[ 3 ] Wei W 1989 *J. Phys. A* **22** L627  
[ 4 ] Barnes B , Grimshaw R 1997 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **7** 2653  
[ 5 ] Rajasekar S , Lakshmanan M 1993 *Phys. D* **67** 282  
[ 6 ] Spanos P D , Ghanem R G 1989 *J. Eng. Mech. Div ASCE* **115** 1035  
[ 7 ] Jensen H , Iwan W D 1992 *J. Eng. Mech.* **118** 1012  
[ 8 ] Li J 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 66 ( in Chinese ) [ 李 杰 1996 力学学报 **28** 66 ]  
[ 9 ] Fang T , Leng X L , Song C Q 2003 *J. Sound Vib.* **266** 198  
[ 10 ] Fang T , Leng X L , Ma X P et al 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 292  
[ 11 ] Ma X P , Leng X L et al 2004 *Prob. Eng. Mech.* **19** 239  
[ 12 ] Leng X L , Fang T , Meng G , Zhang T 2005 *J. Eng. Mech. Div. ASCE* **131** 747  
[ 13 ] Leng X L , Wu C L , Ma X P , Meng G , Fang T 2005 *Nonlinear Dynamics* **42** 185  
[ 14 ] Wu C L , Lei Y M , Fang T 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **27** 459  
[ 15 ] Ma S J , Xu W , Li W , Fang T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1231  
[ 16 ] Ma S J , Xu W , Li W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4013 ( in Chinese ) [ 马少娟、徐 伟、李 伟 2006 物理学报 **55** 4013 ]  
[ 17 ] Sun X J , Xu W , Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 ( in Chinese ) [ 孙晓娟、徐 伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610 ]  
[ 18 ] Wu X L , Ma S J , Sun Z K , Fang T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6253 ( in Chinese ) [ 吴存利、马少娟、孙中奎、方 同 2006 物理学报 **55** 6253 ]  
[ 19 ] Liu S K , Liu S D 1988 *Special Function* ( Beijing : Meteorology Press ) ( in Chinese ) [ 刘式适、刘式达 1988 特殊函数 ( 北京 : 气象出版社 ) ]  
[ 20 ] Zhang Y , Xu W , Fang T 2007 *Appl. Math. and Compu.* **190** 1225



# Stochastic chaos and its control in the stochastic Bonhoeffer-Van der Pol system<sup>\*</sup>

Zhang Ying<sup>1)†</sup> Xu Wei<sup>1)</sup> Sun Xiao-Juan<sup>2)</sup> Fang Tong<sup>3)</sup>

<sup>1</sup> *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

<sup>2</sup> *School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*

<sup>3</sup> *Department of Mechanics, Civil Engineering and Architecture Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

( Received 18 January 2007 ; revised manuscript received 6 February 2007 )

## Abstract

In this paper, the stochastic chaos of the stochastic Bonhoeffer-Van der Pol system with bounded random parameter and its control by noise are investigated. The stochastic Bonhoeffer-Van der Pol system is first transformed into an equivalent deterministic system using the Chebyshev polynomial approximation, so that the problem of controlling stochastic chaos is reduced to the problem of controlling deterministic chaos in the equivalent system. Thus, the top Lyapunov exponent of the equivalent system can be used to examine the chaotic behavior and its control of the responses. The numerical simulations show that the chaos behavior in the stochastic Bonhoeffer-Van der Pol system is by and large similar to that in the equivalent deterministic Bonhoeffer-Van der Pol system. The chaos behavior can be controlled to the periodic states by noise, but under the effect of the random parameter and its intensity, it has certain specific features.

**Keywords :** Chebyshev polynomial, stochastic Bonhoeffer-Van der Pol system, stochastic chaos, chaotic control

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10332030, 10472091 ) and the Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University, China ( Grant No. CX200712 ).

<sup>†</sup> E-mail : yingzhang1031@gmail.com