

# 小世界神经网络的二次超谐波随机共振<sup>\*</sup>

周小荣 罗晓曙<sup>†</sup> 蒋品群 袁五届

(广西师范大学物理与电子工程学院, 桂林 541004)

(2006 年 11 月 6 日收到, 2007 年 2 月 11 日收到修改稿)

随机共振现象是非线性系统中普遍存在的自然现象. 主要通过研究小世界生物神经网络中的输出信噪比与反映小世界效应的重连概率  $p$ 、耦合强度  $c$  以及输入信号振幅  $A$  之间的关系, 来揭示小世界生物神经网络的二次超谐波随机共振的一些规律. 发现对于 Hodgkin-Huxley 小世界神经网络, 并不是信号越强, 信噪比越大, 而是输入信号的振幅  $A$  存在一个最优值  $A_0$ , 此时网络信噪比最大.

关键词: 随机共振, 二次超谐波, 小世界网络, 信噪比

PACC: 0590

## 1. 引言

随机共振一直是非线性科学一个有意义且与应用有关的课题, 它研究的主题是非线性随机问题. 随机共振的概念是由 Benzi 等<sup>[1, 2]</sup>于 1981 年提出, 用以解释古气象学中冰川期与暖气候期周期性交替出现的现象. 随机共振的内涵是: 参数一定的非线性系统, 在周期性弱信号和随机噪声的共同激励下, 当系统与随机噪声达到某种最佳匹配时, 随机噪声可以协助该系统对周期性弱信号进行放大而不是淹没. 随机共振现象的发现对噪声只会淹没信号的传统观念提出了挑战, 揭示了噪声的正面作用<sup>[3, 4]</sup>, 即可以帮助检测弱信号. 之后, 随机共振现象在许多非线性系统中被广泛研究, 如光学系统<sup>[5, 6]</sup>、电路系统、神经网络等, 尤其是神经系统, 不管是单个神经元还是耦合神经元, 随机共振均被用各种理论模型来研究, 如 integrate-and-fire (IF) 模型<sup>[7-11]</sup>、FitzHugh-Nagum (FN) 模型<sup>[12-15]</sup>和 Hodgkin-Huxley (HH) 模型<sup>[16-20]</sup>等. 但是上述文献只限于研究主频的随机共振, 并未涉及到倍频, 而且它们所用的模型也不是小世界耦合网络. 由于在非线性和耦合系统中, 输出信号产生输入信号的各种谐波是很普遍的物理现象, 因此, 研究非线性神经网络中的谐波共振可以进一步丰富随机共振理论及

其应用.

谐波分析一直是信号处理的基本方法之一, 噪声中谐波的检测则是信号处理领域经常遇到的一类问题. 如果外在周期力的角频率为  $\omega_0$ , 则输出信号在角频率  $\omega = \omega_0$  处的共振叫主共振, 而发生在  $\omega = k\omega_0$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) 处的共振叫超谐波共振. 本文研究的是发生在  $\omega = 2\omega_0$  处的二次超谐波随机共振, 因为二次超谐波输出信号的幅度比其他超谐波的幅度要大得多, 其影响也比其他超谐波要大.

著名的 HH 方程是定量描述枪乌贼巨轴突中动作电位发放的数学模型, 也是一个与实际动作电位发放最接近的一个生物模型. 由于目前神经生理学和复杂网络的研究结果表明<sup>[21-23]</sup>, 人脑真实的生物神经网络系统是小世界网络结构, 所以本文将反映神经元放电的 HH 模型作为节点构造了小世界连接的人工生物神经网络, 然后研究这个网络的二次超谐波随机共振现象.

## 2. 模型和评价方法

### 2.1. 神经网络模型

本文采用的 HH 神经网络模型<sup>[23]</sup>, 可用下列方程描述:

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 70571017, 10247005, 10547004)和广西研究生教育创新计划资助项目(批准号: 2006106020809M36)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: lxs@mailbox.gxnu.edu.cn

$$C_m \frac{dV_i}{dt} = I_{K(\text{ion})} + I_{K(\text{syn})} + I_{K(\text{ext})} + \frac{c}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j, \quad (1)$$

$$\frac{dm_i}{dt} = \alpha_{mi}(V_i)(1 - m_i) - \beta_{mi}(V_i)m_i, \quad (2)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = \alpha_{hi}(V_i)(1 - h_i) - \beta_{hi}(V_i)h_i, \quad (3)$$

$$\frac{dn_i}{dt} = \alpha_{ni}(V_i)(1 - n_i) - \beta_{ni}(V_i)n_i, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

方程(1)左边的  $C_m$  是膜电容,  $V_i$  是第  $i$  个神经元的跨膜电位, 右边前三项  $I_{K(\text{ion})}$ ,  $I_{K(\text{syn})}$ ,  $I_{K(\text{ext})}$  分别是细胞内离子电流、细胞的突触电流和外加刺激电流. 其中细胞内离子电流  $I_{K(\text{ion})}$  满足

$$I_{K(\text{ion})} = -g_{\text{Na}} m_i^3 h_i (V_i - V_{\text{Na}}) - g_{\text{K}} n_i^4 (V_i - V_{\text{K}}) - g_{\text{L}} (V_i - V_{\text{L}}), \quad (5)$$

式中  $V_{\text{Na}}$ ,  $V_{\text{K}}$  分别是  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$  的平衡电位,  $V_{\text{L}}$  是氯和其他一些离子泄漏电流为零时的电位.  $g_{\text{Na}}$ ,  $g_{\text{K}}$ ,  $g_{\text{L}}$  分别是各离子通道的最大电导,  $m_i$  是  $\text{Na}^+$  通道中每个门开通的概率(这样的门有三个),  $h_i$  是  $\text{Na}^+$  通道中另一种门开通的概率(这样的门只有一个), 而  $n_i$  则是  $\text{K}^+$  通道中每个门开通的概率(这样的门有四个).

细胞的突触电流  $I_{K(\text{syn})}$  满足

$$\tau_c \frac{dI_{K(\text{syn})}}{dt} = -I_{K(\text{syn})} + \sqrt{2D}\xi_i, \quad (6)$$

式中  $\xi_i$  是满足均值为零, 且  $\langle \xi_i(t)\xi_j(s) \rangle \geq D\delta_{ij}\delta(t-s)$  的高斯白噪声;  $D$  为功率, 表示噪声的强度;  $\tau_c$  是 Ornstein-Uhlenbeck 噪声的相关时间, 这里我们取  $\tau_c = 2.0 \text{ ms}$ .

而外加刺激电流  $I_{K(\text{ext})} = A \sin(\omega_0 t)$ ,  $A$ ,  $\omega_0$  分别是正弦信号的振幅和角频率.

方程(1)右边的最后一项  $\frac{c}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j$  为耦合项,  $c$  为耦合强度,  $a_{ij}$  为复杂网络的耦合矩阵元: 当神经元  $i$  与  $j$  相连时  $a_{ij} = 1$ ; 否则  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ); 且  $a_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}$ . 本模型采用 WS 型小世界网络<sup>[21]</sup>, 此网络的构造如下: 1) 从具有  $N$  个节点(即  $N$  个神经元)的环行网络开始, 其中每一节点都与它初始的  $K$  个最近邻节点相连(在每一边有  $K/2$  个,  $K$  为偶数) 2) 以概率  $p$  随机地重新连接网络中的每条边,

即将边的一个端点保持不变, 而另一个端点取为网络中随机选择的一个节点, 同时保证没有自连接和重复边.

方程(2)–(4)中的  $\alpha_{mi}$ ,  $\beta_{mi}$ ,  $\alpha_{hi}$ ,  $\beta_{hi}$ ,  $\alpha_{ni}$ ,  $\beta_{ni}$  均是与离子的浓度、温度以及跨膜电位有关的量. 有关参数的选取, 与文献[24, 25]相同.

## 2.2. 评价方法

信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)是一种传统的刻画随机共振的方法, 反映的是非线性系统从噪声中检测信号的能力, 信噪比越大, 检测信号的能力越强. 信噪比的定义为<sup>[26]</sup>

$$SNR = 10 \lg(S(\omega_0)/B(\omega_0)), \quad (7)$$

其中  $S(\omega_0)$ ,  $B(\omega_0)$  分别代表在功率谱密度中对应输入信号频率位置上的信号峰值和平均背景噪声强度. 实际计算中先对若干次计算得到的功率谱密度进行累加平均, 然后再用来计算信噪比.

同理, 二次超谐波信噪比的计算公式为

$$SNR = 10 \lg(S(2\omega_0)/B(2\omega_0)), \quad (8)$$

其中  $S(2\omega_0)$ ,  $B(2\omega_0)$  分别代表在功率谱密度中对应输入信号 2 倍频率位置上的信号峰值和平均背景噪声强度. 本文求解非线性随机微分方程采用四阶龙格库塔算法, 计算步长为  $0.01 \text{ s}$ , 信噪比的计算采用(8)式.

## 3. 数值模拟结果与分析

在重连概率  $p$  取不同值的条件下, 输出信噪比 SNR 随噪声强度  $D$  变化的关系如图 1 所示. 从图 1 中可以看到, 在不同强度的噪声下, 神经元的输出信噪比有一个最大值, 这种存在优化噪声强度的情况便是典型的随机共振现象. 从图 1 中还可看出优化噪声有较宽的范围 ( $14 < D < 28$ ), 在此范围内信噪比的值几乎不变, 而且  $p$  值的变化对信噪比影响不大.

图 2 是输出信号的功率谱  $P(\omega)$  (取对数) 与输出角频率  $\omega$  的关系曲线. 图 2(a) 的  $D$  在优化噪声范围外取值 ( $D = 8$ ), 图 2(b) 的  $D$  在优化噪声范围内取值 ( $D = 20$ ), 比较图 2(a) 和 (b) 可知, 噪声强度  $D$  取值不合适时, 超谐波信号被淹没在噪声中, 几乎看不出任何超谐波信息(图 2(a)); 而  $D$  取合适值时, 超谐波信号显著增强, 其尖峰出现在  $\omega = k\omega_0$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) 处, 表明合适的噪声强度可以帮助

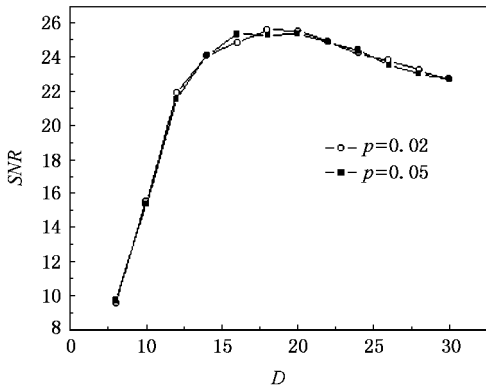


图 1  $A = 7.0 \mu A/cm^2$ ,  $\omega_0 = 1.30 \text{ rad/ms}$ ,  $c = 0.1$ ,  $N = 100$ ,  $K = 6$  重连概率  $p$  取不同值时, 输出信噪比 SNR 随噪声强度  $D$  变化的曲线

神经系统检测微弱超谐波信号(图 3(b)).

图 3 研究的是耦合强度  $c$  取不同值时, 输出信噪比随噪声强度变化的关系. 由图 3(a)可见, 随着耦合强度  $c$  的增大, 输出信噪比曲线下降. 图 3(b) 则是最佳信噪比  $R_s$  (输出信噪比的最大值) 随耦合强度  $c$  变化的曲线, 可看出最佳信噪比随耦合强度单调下降. 这说明随着耦合强度的增大, 神经系统检测微弱超谐波信号的能力下降.

图 4 是在不同的噪声强度下输出信噪比随输入信号振幅变化的曲线. 从图 4 可以看出, 对于 HH 小世界神经网络, 并不是信号越强, 信噪比越大, 而是输入信号的振幅  $A$  存在一个最优值  $A_0$ , 此时网络信噪比最大, 说明了在最优振幅  $A_0$  处系统对信号的

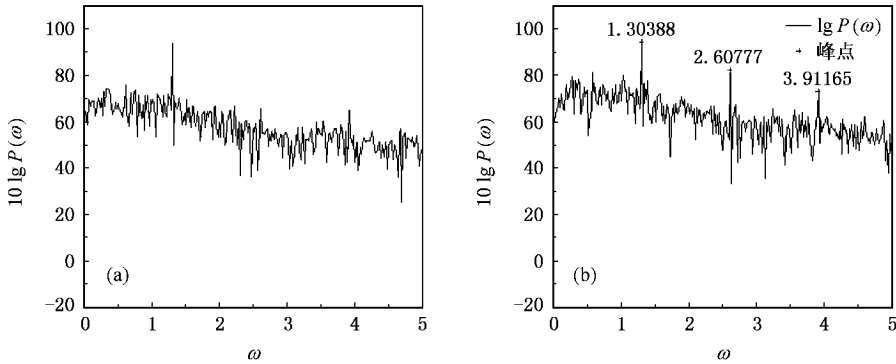


图 2 输出信号的功率谱  $A = 7.0 \mu A/cm^2$ ,  $\omega = 1.30 \text{ rad/ms}$ ,  $p = 0.05$ ,  $c = 0.1$  (a)  $D = 8$ ; (b)  $D = 20$

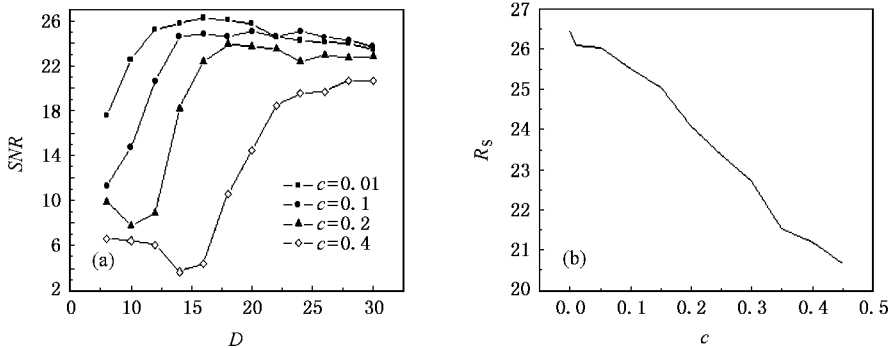


图 3 (a)  $A = 7.0 \mu A/cm^2$ ,  $p = 0.05$ ,  $\omega = 1.30 \text{ rad/ms}$  耦合强度  $c$  取不同值时, 输出信噪比 SNR 随噪声强度  $D$  变化的曲线 (b) 最佳信噪比  $R_s$  (输出信噪比的最大值) 与耦合强度  $c$  的关系曲线

检测能力最强.

上述数值模拟结果表明, 本文构造的小世界生物神经网络模型在一定强度的外部周期信号和噪声激励下, 出现了显著的二次超谐波随机共振现象. 下面对该现象出现的物理机理给出简要的分析.

根据随机共振理论<sup>[1]</sup>, 随机共振模型都包含三个必要要素, 即具有双稳或多稳态的非线性系统, 输入信号, 噪声. 通过对单个 HH 方程无外加激励信号时的定态解考察可知, 在一定参数条件下, 该方程可以有多个稳态. 那么以单个 HH 方程为节点的动力

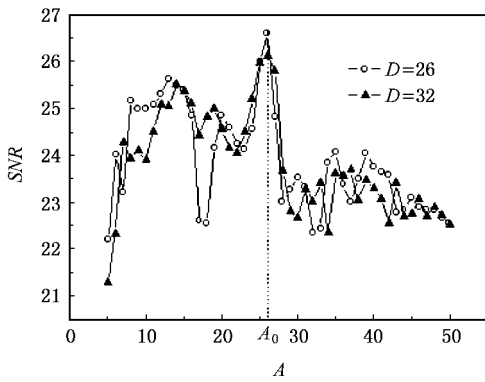


图4  $\omega = 1.30 \text{ rad/ms}$ ,  $p = 0.05$ ,  $c = 0.1$  噪声强度  $D$  不同时, 输出信噪比  $SNR$  随输入信号振幅  $A$  变化的曲线

学方程, 构造成复杂的小世界网络, 则该网络成为超高维的非线性动力学系统, 因此, 网络在无外加激励信号时的定态解数目必然大于单个 HH 方程无外加激励信号时的定态解数目. 在一定参数条件下, 该网络的方程可以存在多个稳态, 在此条件下, 只要外

部输入适当的信号和噪声, 则本文构造的小世界人工生物神经网络包含了产生随机共振的三个必备要素, 可以出现随机共振现象.

## 4. 结 论

本文以 HH 小世界神经网络为研究对象, 研究了它的二次超谐波共振现象, 数值模拟结果表明: (1) 当连接概率  $p$ , 输入信号的频率  $\omega$ , 振幅  $A$  均不变时, 随着耦合强度  $c$  的增大, 输出信噪比曲线下降, 最佳二次超谐波信噪比也随之下降. 这说明随着耦合强度的增大, 神经系统检测微弱超谐波信号的能力下降. (2) 当噪声强度  $D$  一定 ( $p, c, \omega$  也不变) 时, 对于 HH 小世界神经网络, 并不是信号越强, 信噪比越大, 而是输入信号的振幅  $A$  存在一个最优值  $A_0$ , 此时网络信噪比最大, 说明了在最优振幅  $A_0$  处, 系统对信号的检测能力最强. 这些研究结果进一步丰富了随机共振的理论和应用.

- [ 1 ] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [ 2 ] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A 1982 *Tellus* **34** 11
- [ 3 ] Shao Y Z, Zhong W R, Lin G M, Li J C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3157 ( in Chinese ) [ 邵元智、钟伟荣、林光明、李坚灿 2004 物理学报 **53** 3157 ]
- [ 4 ] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 ( in Chinese ) [ 祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404 ]
- [ 5 ] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 ( in Chinese ) [ 康艳梅、徐建学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712 ]
- [ 6 ] Zhang L Y, Cao L, Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 ( in Chinese ) [ 张良英、曹 力、吴犬进 2003 物理学报 **52** 1174 ]
- [ 7 ] Bulsara A R, Elston T C, Doering C R, Lowen S B, Lindenberg K 1996 *Phys. Rev. E* **53** 3958
- [ 8 ] Shimokawa T, Pakdaman K, Sato S 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3427
- [ 9 ] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **25** 165
- [ 10 ] Shimokawa T, Rogel A, Pakdaman K, Sato S 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3461
- [ 11 ] Lindner B, Schimansky-Geier L 2001 *Phys. Rev. Lett* **86** 2934
- [ 12 ] Patel A, Kosko B 2005 *Neural Networks* **18** 467
- [ 13 ] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T 1995 *Nature* **376** 236
- [ 14 ] Stocks N G, Mannella R 2001 *Phys. Rev. E* **64** 30902
- [ 15 ] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 557 ( in Chinese ) [ 张广军、徐建学 2005 物理学报 **54** 557 ]
- [ 16 ] Lee S G, Kim S 1999 *Phys. Rev. E* **60** 826
- [ 17 ] Chik D T W, Wang Y, Wang Z D 2001 *Phys. Rev. E* **64** 021913
- [ 18 ] Hasefawa H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 021902
- [ 19 ] Tanabe S, Sato S, Pakdaman K 1999 *Phys. Rev. E* **60** 7235
- [ 20 ] Liu F, Hu B, Wang W 2000 *Phys. Rev. E* **63** 31907
- [ 21 ] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [ 22 ] Lin M, Chen T L 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016133
- [ 23 ] Kwon O, Moon H T 2002 *Phys. Lett. A* **298** 319
- [ 24 ] Bazzo F, Zalanyi L, Csardi G 2003 *Phys. Lett. A* **311** 13
- [ 25 ] Casado J M 2003 *Phys. Lett. A* **310** 400
- [ 26 ] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 ( in Chinese ) [ 秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360 ]

# The second super-harmonic stochastic resonance in the neural networks with small-world character<sup>\*</sup>

Zhou Xiao-Rong   Luo Xiao-Shu<sup>†</sup>   Jiang Pin-Qun   Yuan Wu-Jie

( College of Physics and Eletronic Engineering , Guangxi Normal University , Guilin 541004 ,China )

( Received 6 November 2006 ; revised manuscript received 11 February 2007 )

## Abstract

Stochastic resonance is a common natural phenomenon in nonlinear systems. By studying the relations between the out put signal-to-noise ratio ( SNR ) of the biologic neural network with small-world character and the rewiring probability  $p$  which reflects the effect of small-world ,the coupling strength  $c$  , amplitude  $A$  of input signal , we revealed some regularities of the second super-harmonic stochastic resonance in the biologic neural network , and found that the out put SNR doesn 't monotonically increase as the forcing amplitude  $A$  increases , but there exists an optimal value  $A_0$  for the Hodgkin-Huxley ( HH ) neural network with small-world character. The out put SNR reaches its maximum when  $A$  is equal to  $A_0$ .

**Keywords** : stochastic resonance , second super-harmonic , small-world network , signal-to-noise ration ( SNR )

**PACC** : 0590

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 70571017 ,10247005 ,10547004 ) and Innovation Project of Guangxi Graduate Education ,China ( Grant No.2006106020809M36 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : lxs@mailbox.gxnu.edu.cn