

色散渐减光纤中 Ginzburg-Landau 方程 的自相似脉冲演化的解析解^{*}

冯 杰¹⁾ 徐文成^{2)†} 李书贤²⁾ 陈伟成²⁾ 宋 方²⁾ 申民常²⁾ 刘颂豪²⁾

1) 华南师范大学物理与电信工程学院 广州 510006)

2) 光子信息技术广东省高校重点实验室, 华南师范大学光电子科技学院 广州 510006)

(2007 年 4 月 7 日收到, 2007 年 5 月 20 日收到修改稿)

采用对称约简的分析方法, 得出了变系数 Ginzburg-Landau 方程的抛物渐近自相似脉冲解析解的一般表达式. 给出了二阶色散系数纵向双曲型变化和纵向指数型变化的色散渐减光纤中自相似脉冲的振幅、啁啾以及脉冲宽度的具体形式, 并与数值解进行了对比, 其结果符合得很好. 从而证实了稀土元素掺杂的色散渐减光纤中, 在增益色散因子的影响下, 脉冲的演化具有抛物型自相似特性.

关键词: Ginzburg-Landau 方程, 自相似脉冲, 色散渐减光纤, 正常 GVD

PACC: 4265, 4265S, 4255N, 4225B

1. 引 言

目前, 采用高掺杂浓度、高增益的光纤产生高功率、高能量的超短光脉冲已经成为光纤光学领域的一个研究热点. 自相似 (self-similar, SS) 光脉冲是广义的非线性薛定谔方程 (generation nonlinear Schrödinger equation, GNLS) 的一簇解, 近十年才引起光学领域的关注. 理论分析、数值模拟和实验研究表明, 自相似脉冲有三个显著特点^[1-5], 其一, 自相似特性只由入射脉冲的能量和光纤参数决定, 而与初始脉冲的形状无关; 其二, 自相似脉冲在高功率传播时, 其形状不改变, 具有抵御光波分裂的能力; 其三, 自相似脉冲具有严格的线性啁啾, 易于进行高效的脉冲压缩, 获得高功率、无基座的近似变换极限的飞秒量级光脉冲. 因此自相似脉冲在光纤通信、非线性光学、超快光学和瞬态光学等领域中具有非常广泛的应用前景. 实验上主要研究了在纵向恒定分布参数的增益光纤、光纤中的受激拉曼效应、色散渐减光纤、光纤布拉格光栅以及光子晶体中产生自相似脉冲的特性^[6-14]. 理论上主要是基于在光纤正色散区域带有增益的恒定系数或变系数的非线性薛定谔方程 (nonlinear Schrödinger equation, NLSE) 的自相似

解的特性^[13-22]. 但是, 这些研究都没有涉及光纤掺杂元素的真实时间响应对脉冲演化的具体影响. 光纤中, 如果信号脉冲宽度 T_0 小于掺杂元素偶极子的弛豫时间 T_2 ($T_0 \leq T_2$), 则描述掺杂光纤中脉冲信号的传输演化, 应当采用布洛赫方程 (Maxwell-Bloch equation, MBE)^[23]. 而在 $T_0 > T_2$ 的条件下, 应当采用 Ginzburg-Landau 方程 (G-LE). 文献^[23] 在 $T_0 > T_2$ 的条件下, 给出了恒定系数的 G-LE 的孤波解, 没有给出 G-LE 自相似条件下的解析解, 变系数条件下 G-LE 自相似解的研究也未见报道.

本文考虑光纤掺杂元素弛豫时间的真实响应和光纤变参数条件, 求解了变系数 G-LE 的自相似脉冲演化的一般解析解. 在此基础上, 讨论两种类型色散渐减光纤中, 由于正的二阶群速度色散和掺杂稀土元素的弛豫时间的影响, 其自相似脉冲存在的具体参数条件以及啁啾特性, 最后, 将其分析结果与数值模拟结果进行了对比.

2. 抛物渐近自相似脉冲解析解

三价稀土元素掺杂光纤增益介质可以用二能级系统的布洛赫方程进行处理. 如果信号脉冲脉宽 T_0

* 广东省自然科学基金 (批准号 D4010397) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xuwc@snu.edu.cn

为皮秒量级,增益介质的荧光持续时间 T_1 为毫秒量级,而掺杂元素偶极子的弛豫时间 T_2 为百飞秒量级,忽略双光子吸收和损耗的条件下,则描述掺杂光纤中的脉冲信号传输演化方程为简化的 G-LE^[2,3]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{i}{2}(\beta_2 + igT_2^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} = i\gamma |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2}g\Psi, \quad (1)$$

其中, Ψ 是脉冲包络的复振幅, $\beta_2 = \beta_2(z)$ 是光纤的二阶正常群速度色散(GVD), $T = t - \beta_1 z$ 为延迟时间, $\beta_2 + igT_2^2$ 称为“增益色散(gain dispersion, GD)”, gT_2^2 为增益色散因子,其物理意义是掺杂元素对信号脉冲提供一种依赖于频率的增益效果; g 是掺杂光纤的增益系数, T_2 为掺杂元素偶极子的弛豫时间,方程(1)较完整地描述了稀土元素掺杂光纤中自相似抛物渐近脉冲的演化行为.考虑增益系数 $g = g(z)$, GVD 系数 $\beta_2 = \beta_2(z) > 0$ 和非线性系数 $\gamma = \gamma(z)$ 为演化距离 z 的函数的情况下,假设 G-LE(1) 具有下列形式的试探解^[2,3]:

$$\Psi(z, T) = A(z, T) \exp(i\Phi(z, T)), \quad (2)$$

$$\Phi(z, T) = \varphi(z) + \alpha(z)T^2.$$

将方程(2)代入方程(1),并比较其实部和虚部,得到振幅函数和相位函数的耦合方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A}{\partial z} - \beta_2(z) \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial T} - \frac{1}{2}\beta_2(z)A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \\ & - \frac{1}{2}g(z)T_2^2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{1}{2}Ag(z)T_2^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)^2 \\ & = \frac{1}{2}g(z)A, \\ & A \frac{\partial \Phi}{\partial z} - g(z)T_2^2 \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial \Phi}{\partial T} - \frac{1}{2}Ag(z)T_2^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \\ & - \frac{1}{2}A\beta_2(z) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)^2 + \frac{1}{2}\beta_2(z) \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} \\ & = \gamma(z) |A|^2 A. \end{aligned} \quad (3)$$

为进一步分离变量,设

$$A(z, T) = \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{T_p(z)}} F(T) \exp\left[\frac{1}{2}\alpha(z)\right], \quad (4)$$

$$\Phi(z, T) = \varphi(z) + \alpha(z)T^2, \quad (5)$$

其中, E_0 是脉冲的初始能量, $T_p(z)$ 是脉冲演化的有效宽度, $F(T)$ 是脉冲演化的自相似振幅瞬时包络函数,其与演化距离 z 和演化时间 T 有关, $\alpha(z)$ 与光纤增益系数 $g(z)$ 的关系为 $\alpha(z) = \int_0^z g(z') dz'$.

$\varphi(z)$ 是脉冲演化的自相似相位补偿函数, $\alpha(z)$ 是脉冲演化的啁啾因子.

由方程(4)(5),注意到 $\frac{\partial T_p(z)}{\partial T} = 0$, $\frac{\partial T_p(z)}{\partial z} \neq 0$, 求出方程组(3)中的各阶导数如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} &= -\frac{\sqrt{E_0} F(T) e^{\frac{1}{2}\alpha(z)}}{2\sqrt{T_p(z)}} \frac{1}{T_p(z)} \frac{\partial T_p(z)}{\partial z} \\ &+ \frac{\sqrt{E_0} e^{\frac{1}{2}\alpha(z)}}{\sqrt{T_p(z)}} \frac{\partial F(T)}{\partial z} \\ &+ \frac{\sqrt{E_0} e^{\frac{1}{2}\alpha(z)}}{\sqrt{T_p(z)}} F(T) \frac{g(z)}{2} \\ &= A(z, T) \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{T_p(z)} \frac{\partial T_p(z)}{\partial z} \right. \\ &\left. + \frac{1}{F} \frac{\partial F(T)}{\partial z} + \frac{g(z)}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A(z, T)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ A(z, T) \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{T_p(z)} \frac{\partial T_p(z)}{\partial z} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{F} \frac{\partial F(T)}{\partial z} + \frac{g(z)}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(z, T)}{\partial T} &= \frac{\sqrt{E_0} e^{\frac{1}{2}\alpha(z)}}{\sqrt{T_p(z)}} \frac{\partial F(T)}{\partial T} \\ &= \frac{A(z, T)}{F(z)} \frac{\partial F(T)}{\partial T} \\ &= A(z, T) \partial_T \ln F(T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(z, T)}{\partial T^2} &= \frac{\partial}{\partial T} [A(z, T) \partial_T \ln F(T)] \\ &= A(z, T) \frac{\partial^2 F(T)}{\partial T^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi(z, T)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} + \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} T^2,$$

$$\frac{\partial \Phi(z, T)}{\partial T} = 2\alpha(z)T,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(z, T)}{\partial T^2} = 2\alpha(z).$$

将以上各式代入方程组(3),得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2T_p(z)} \frac{\partial T_p(z)}{\partial z} + [1 - 2\alpha(z)\beta_2(z)] \frac{1}{F(T)} \\ & \times \frac{\partial F(T)}{\partial z} - \alpha(z)\beta_2(z) \\ & = \frac{g(z)T_2^2}{T_p^2(z)} \frac{\partial^2 F(T)}{\partial T^2} - 2\alpha^2(z)\beta_2(z)g(z)T_2^2, \\ & \left[\frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - \alpha(z)g(z)T_2^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\alpha(z)g(z)T_2^2 \frac{1}{F(T)} \frac{\partial F(T)}{\partial T} T \\
 & + \left[\frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - 2c^2(z)\beta_2(z) \right] T^2 \\
 = & -\frac{\beta_2(z)}{2F(T)} \frac{\partial^2 F(T)}{\partial T^2} \\
 & + \chi(z) \frac{E_0 F^2(T) \exp[\alpha(z)]}{T_p(z)}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

由方程组(6)第二式得

$$\begin{aligned}
 F^2(T) = & \frac{T_p(z) \exp[-\alpha(z)]}{E_0 \chi(z)} \left\{ \left[\frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - \alpha(z)g(z)T_2^2 \right] \right. \\
 & - 2\alpha(z)g(z)T_2^2 \frac{1}{F(T)} \frac{\partial F(T)}{\partial T} T \\
 & + \left[\frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - 2c^2(z)\beta_2(z) \right] T^2 \\
 & \left. + \frac{\beta_2(z)}{2} \frac{1}{F(T)} \frac{\partial^2 F(T)}{\partial T^2} \right\}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

方程(7)中,考虑 $\frac{1}{F(T)} \frac{\partial^2 F(T)}{\partial T^2} \rightarrow 0$ 并设

$$\begin{cases} P = \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - \alpha(z)g(z)T_2^2, \\ QP = \frac{2\alpha(z)g(z)T_2^2}{F(T)} \frac{\partial F(T)}{\partial T}, \\ RP = \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} - 2c^2(z)\beta_2(z), \end{cases} \quad (8)$$

以及 $\sqrt{\frac{PT_p(z)}{\chi(z) \exp[\alpha(z)]}} = F_0$. 其中 γ 是非线性系数, P , Q 和 R 是与光纤参数有关的待定系数. 因为方程组(8)是一个变系数的微分方程, 所以, 方程组(8)第二式表明 Q 与 T 存在一定的制约关系, 则得到脉冲演化的抛物振幅瞬时包络函数的形式为

$$F(T) = F_0(1 - QT + RT^2)^{1/2}. \quad (9)$$

将方程(9)代入方程(4)得

$$\begin{aligned}
 A(z, T) = & \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{T_p(z)}} F(T) \exp\left[\frac{1}{2}\alpha(z)\right] \\
 = & \frac{\sqrt{E_0} \exp\left[\frac{1}{2}\alpha(z)\right]}{\sqrt{T_p(z)}} F_0 [1 - QT + RT^2]^{1/2} \\
 = & \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\chi(z)}} [1 - QT + RT^2]^{1/2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

三价稀土元素掺杂光纤中, 演化脉冲从增益介质中不断获得能量, 因而其振幅逐渐增大, 所以将方程(10)与方程(4)比较, 应当有

$$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{\chi(z)}} = \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{T_p(0)}} \exp\left[\frac{1}{2}\alpha(z)\right],$$

则可以得到

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{\chi(z)E_0}{T_p(0)} \exp[\alpha(z)] \\
 = & \frac{\chi(z)E_0}{T_p(0)} \exp\left[\int_0^z g(z') dz'\right] \\
 = & \chi(z)A_0^2 \exp\left[\int_0^z g(z') dz'\right], \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中, $A_0 = \sqrt{E_0/T_p(0)}$, 是自相似脉冲的初始振幅, $T_p(0)$ 是自相似脉冲的初始有效宽度.

2.1. 啁啾参数 $\alpha(z)$

在方程组(8)的第三式中, 待定系数 R 是光纤参数和演化距离 z 的函数, 其函数形式为

$$R = \frac{1}{P} \frac{(\gamma'g - \gamma g')g^2 T_2^2 A_0^2 + 2\gamma^2 A_0^2 (3\beta_2 g - 3\beta_2 g' - g^2 \beta)}{(6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2)}, \quad (12)$$

其中, $g(z)T_2^2 \neq 6\beta_2(z)\gamma(z)$, $\gamma' = \frac{d\chi(z)}{dz}$, $\beta' = \frac{d\beta(z)}{dz}$, $g' = \frac{dg(z)}{dz}$. P 由方程(11)决定. 将方程(11)和方程(12)代入方程组(8)的第三式中, 则可以得到自相似脉冲的啁啾参数

$$\alpha(z) = -\frac{\gamma g A_0^2}{6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2}. \quad (13)$$

方程(13)不含有时间, 只是光纤参数的函数, 在变系数的情况下, 其是脉冲演化距离 z 的函数. 由此, 再根据方程(5)可知, 脉冲的啁啾是演化时间的线性函数. 啁啾参数是自相似脉冲的一个重要特征量, 是自相似脉冲产生线性啁啾的必要条件.

2.2. 脉冲的相位函数 $\Phi(z, T)$ 和啁啾函数 $\omega_c(z, T)$

由方程组(8)第一式、方程(11)和方程(13), 可以得到自相似脉冲的相位补偿函数,

$$\begin{aligned}
 \varphi(z) = & \int_0^z [P + \alpha(z')gT_2^2] dz' \\
 = & \int_0^z \left[\gamma A_0^2 \exp(\alpha(z')) - \frac{\gamma g^2 T_2^2 A_0^2}{6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2} \right] dz',
 \end{aligned}$$

则其相位函数为

$$\begin{aligned}
 \Phi(z, T) = & \int_0^z \left[\gamma A_0^2 \exp(\alpha(z')) - \frac{\gamma g^2 T_2^2 A_0^2}{6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2} \right] dz' \\
 & - \frac{\gamma g A_0^2}{6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2} T^2 \quad |T| \leq T_p(z). \quad (14)
 \end{aligned}$$

由方程(14)可以得到自相似脉冲的啁啾函数为

$$\omega_c = -\frac{\partial \Phi(z, T)}{\partial T} = \frac{2\gamma g A_0^2}{6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2} T$$

$$|T| \leq T_p(z). \quad (15)$$

方程(15)表明,脉冲的啁啾不仅是光纤参数和脉冲演化距离的函数,而且是脉冲演化时间的线性函数.线性啁啾是自相似脉冲在增益介质中传输获得高能量、不会分裂的原因,也是自相似脉冲便于压缩获得高功率输出的保证.

2.3. 振幅瞬时包络函数 $F(T)$ 和脉冲的有效宽度 $T_p(z)$

联立方程组(8)第二式和方程(9),可以得到

$$Q = \frac{2cgT_2^2 R}{P + cgT_2^2} T. \quad (16)$$

(16)式表明, $P \neq -cgT_2^2$, 反映了脉冲的演化特性和掺杂光纤增益色散因子 gT_2^2 的作用.将方程(16)代入方程(9)得

$$F(T) = F_0 \left\{ 1 - \left[\frac{(cgT_2^2 - P)R}{P + cgT_2^2} \right] T^2 \right\}^{1/2}. \quad (17)$$

定义脉冲演化的有效宽度为

$$T_p(z) = \left[\frac{P + cgT_2^2}{(cgT_2^2 - P)R} \right]^{1/2}. \quad (18)$$

将方程(11)(12)和(13)代入方程(18),可以得到脉冲演化的有效宽度 $T_p(z)$ 一般形式

$$T_p(z) = \left[\frac{(g^2 T_2^2 P - 6\gamma\beta PA_0^2 + \gamma g^2 T_2^2 A_0^2)(6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2)P}{(\gamma g^2 T_2^2 A_0^2 + 6\gamma\beta PA_0^2 - g^2 T_2^2 P)(\gamma'g - \gamma g')g^2 T_2^2 A_0^2 + 2\gamma^2 A_0^4(3\beta'g - 3\beta g' - g^2\beta)} \right]^{1/2}. \quad (19)$$

当 $P \gg \gamma A_0^2$, 有

$$T_p(z) = \left[\frac{(6\gamma\beta A_0^2 - g^2 T_2^2)\gamma}{(\gamma g' - \gamma'g)g^2 T_2^2 - (6\beta'g - 6\beta g' - 2g^2\beta)\gamma^2 A_0^2} \right]^{1/2} \exp\left[\frac{1}{4} \int_0^z g(z') dz' \right]. \quad (20)$$

方程(19)综合反映了增益光纤中自相似脉冲时域宽度的演化特性.从简化的方程(20)可以看出,增益色散因子 gT_2^2 减小了自相似脉冲的时域宽度.即一方面,自相似脉冲的时域宽度随演化距离 z 按指数规律增加,另一方面,增益色散因子通过非线性效应和自相位调制等有效地减小了脉冲的时域宽度,这就是具有一定驰豫时间 T_2 的掺杂元素构成的增益介质能够维持自相似脉冲的一个物理机理.

由 $z=0, T_2=0$ 得脉冲的时域初始有效宽度

$$T_p(0)|_{T_2=0} = \left\{ \frac{36\gamma\beta^2 A_0^2}{2\beta g^2 + 6\beta g' - 6\beta'g} \right\}^{1/2} \Big|_{z=0}. \quad (21)$$

方程(21)表明,首先,必须有 $\beta > 0$;其次,脉冲的初始宽度与入射信号脉冲的类型无关,仅仅由掺杂光纤参数的初始取值和入射信号脉冲的能量决定,这是自相似脉冲的重要特征之一.此结论与文献[3]相同.

2.4. 脉冲的振幅函数 $A(z, T)$

将方程(17)代入方程(4)并考虑方程(11)和方程(18),则可以得到脉冲演化的振幅函数 $A(z, T)$ 一般形式

$$A(z, T) = \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{T_p(0)}} \left[1 - \frac{T^2}{T_p^2(z)} \right]^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} gz \right)$$

$$= A_0 \left[1 - \frac{T^2}{T_p^2(z)} \right]^{1/2} \exp\left(\frac{1}{2} gz \right) \quad |T| \leq T_p(z). \quad (22)$$

方程(22)表明,其一,演化脉冲的振幅形状是抛物渐近自相似型的;其次,演化脉冲振幅随演化距离按指数规律增大.由于脉冲演化的有效宽度也是随演化距离按指数规律增加(方程(20)),因此,自相似抛物渐近在演化过程中可以获得很高的能量.

自相似脉冲的能量满足方程

$$\begin{aligned} U(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(z, T)|^2 dT \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2(z, T) dT \\ &= \int_{-T_p}^{+T_p} A_0^2 \exp\left(\frac{2}{3} gz \right) \left(1 - \frac{T^2}{T_p^2} \right) dT. \end{aligned} \quad (23)$$

由方程(23)可以得到信号脉冲的入射能量与自相似脉冲初始振幅 A_0 的关系,即在 $z=0$ 时,有

$$U_{in} = U(0) = \int_{-T_p(0)}^{+T_p(0)} A_0^2 \left(1 - \frac{T^2}{T_p^2(0)} \right) dT = \frac{4}{3} A_0^2 T_p(0),$$

再由脉冲有效宽度的初始值 $T_p(0)$,可以得到

$$A_0 = \left\{ \frac{[\beta_0 g^2 + 3\beta_0 \partial g / \partial z - 3g \partial \beta / \partial z]}{32\gamma_0 \beta_0^2} \Big|_{z=0} U_{in} \right\}^{1/6}. \quad (24)$$

方程(24)表明,光纤参数以及信号脉冲的入射能量

决定了自相似脉冲的初始振幅 A_0 . 综合考虑方程 (13) (22) 和 (23) 可知, 自相似脉冲的振幅随演化距离持续增加, 即其功率持续有效地增大, 而且保持线性的啁啾, 使脉冲不发生分裂, 这是自相似脉冲的重要特性.

综合方程 (14) (15) (19) (22) 和 (24) 可以得到抛物渐近自相似脉冲的振幅函数和相位函数的完整描述.

以上结论, 在掺杂光纤是常数参数的条件下, 如果不考虑增益色散因子 gT_2^2 , 其结果与文献 [3] 的相关结论相同, 但是方程 (14) (20) 和方程 (22) 表明, 变系数 G-LE 存在自相似脉冲的理论解, 而形成自相似光脉冲的原因是真实掺杂元素光纤中色散 β_2 、非线性 γ 与增益 g 以及增益色散 gT_2^2 之间的制约关系. 下面将上述解析解模型具体应用到色散渐减光纤中, 并与数值解进行对比.

3. 色散渐减光纤中自相似脉冲演化的特征

3.1. 纵向距离指数型 DDF

假设在稀土元素掺杂的色散渐减光纤 (DDF) 中, 二阶色散随演化距离指数纵向变化, 即 $\beta(z) = \beta_0 \exp(-\sigma z)$, 其中 $\sigma > 0$ 为常数, $\gamma(z) = \gamma_0$, $g(z) = g$, 则有 $\gamma' = 0$, $g' = 0$ 和 $\beta' = -\sigma\beta$, 由方程 (15) 和 (19) 可以得到该情况下自相似脉冲演化的线性啁啾函数

$$\omega_c = -\frac{\partial\Phi(z, T)}{\partial T} = \frac{2\gamma_0 g A_0^2}{6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 \exp(-\sigma z) - g^2 T_2^2} T \quad |T| \leq T_p(z), \quad (15a)$$

即增益色散因子 gT_2^2 增大了自相似脉冲的线性啁啾. 脉冲有效宽度为

$$T_p(z) = \left\{ \left[\frac{6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 e^{(g-\sigma)z}}{6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 e^{(g-\sigma)z} + (1 - e^{gz})g^2 T_2^2} \right] \times \frac{[6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 e^{-\sigma z} - g^2 T_2^2]}{2\gamma_0 \beta_0 A_0^2 (3\sigma + g)g} \right\}^{1/2} \times \exp\left[\frac{1}{2}(g + \sigma)z\right]. \quad (19a)$$

初始有效宽度为

$$T_p(0) = \left\{ \left[\frac{6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 - 2g^2 T_2^2}{6\gamma_0 A_0^2 \beta_0} \right] \frac{[6\gamma_0 A_0^2 \beta_0 - g^2 T_2^2]}{2\gamma_0 \beta_0 A_0^2 (3\sigma + g)g} \right\}^{1/2},$$

可见, 增益色散因子 gT_2^2 减小了该情况下自相似脉冲演化的有效宽度; 在 $T_2 = 0$ 以及 $\sigma = 0$ 的情况下,

$T_p(0) = \frac{6A_0}{g} \sqrt{\frac{\gamma\beta}{2}}$, 此结果与文献 [3] 的结论完全相同.

为了验证基于 G-LE 的色散渐减光纤中自相似脉冲特性, 我们数值求解了 G-LE (1), 并将其与解析解进行对比.

设输入脉冲是一阶高斯脉冲, 入射能量为 $U_{in} = 50$ pJ, 初始脉冲宽度为 $T_0 = 370$ fs, 增益介质 (DDF) 的掺杂元素偶极子的弛豫时间 $T_2 = 30$ fs, 掺

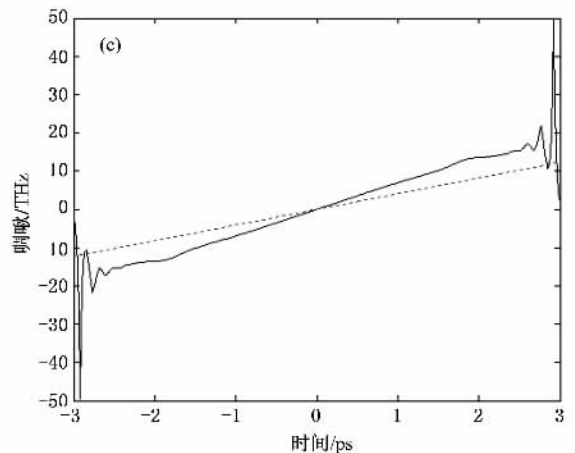
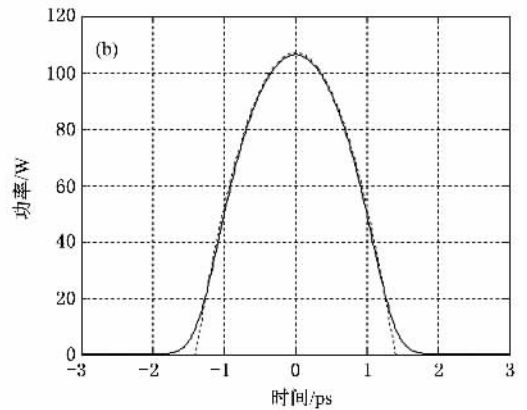
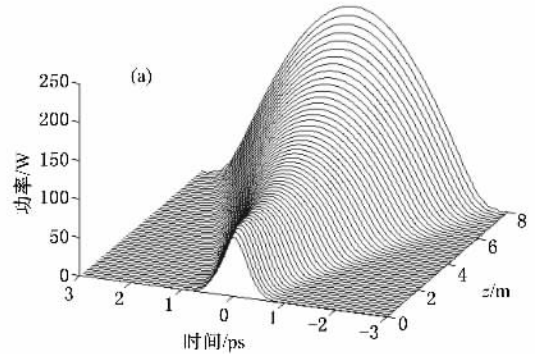


图 1 纵向指数型 DDF 的数值解与自相似解析解的对比 (a) G-LE 自相似脉冲演化 (b) 抛物自相似脉冲的形状对比 (c) 抛物自相似脉冲的啁啾对比

杂光纤长度为 $L = 8 \text{ m}$, 光纤增益系数为 $g = 0.35 \text{ m}^{-1}$, $\beta_0 = 52.0 \times 10^{-3} \text{ ps}^2 \text{ m}^{-1}$, 其色散渐减系数 $\sigma = 0.15$, $\gamma = 10.0 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$. 图 1(a) 给出了二阶散指数纵向变化的 G-LE 自相似脉冲演化情况, 可以看出脉冲振幅和脉宽都随着传输距离的增加而增大. 为了进一步证实演化脉冲是否具有自相似特性, 我们选取光纤长度 $L = 4 \text{ m}$ 时脉冲的波形, 如图 1(b) 所示, 其中实线是数值模拟结果, 虚线是解析式 (21) 的解. 可以看出除了在脉冲前后沿附近之外, 脉冲时域强度(功率谱)的数值结果与解析解符合得很好. 因为解析解有一定的演化范围, 即 $|T| \leq T_p(z)$ ——有效宽度 T_p , 超出这个范围, 抛物自相似脉冲的振幅为零, 所以, 解析解的强度在 $|T| > T_p(z)$ 的范围等于零; 图 1(c) 是脉冲的啁啾曲线, 图中显示 G-LE 的演化脉冲具有严格的线性啁啾(实线). 但是, 线性啁啾曲线的数值模拟与解析解只是基本符合, 原因是“对称约简的自相似方法”的解析过程有一定的近似. 尽管如此, 可以确定纵向变化的色散渐减光纤中的 G-LE 具有抛物自相似解.

3.2. 双曲线型 DDF

在稀土元素掺杂的双曲线型 DDF 中, 假设有 $\chi(z) = \gamma_0$, $g(z) = g$ 和 $\beta(z) = \frac{\beta_0}{1 + \alpha z}$, 其中色散渐减系数 $\alpha > 0$ 为常数, 则 $\gamma' = 0$, $g' = 0$ 和 $\beta' = -\frac{\alpha\beta_0}{(1 + \alpha z)^2}$. 则由方程 (15) 和 (19) 可以得到 DDF 中自相似脉冲演化的线性啁啾函数

$$\omega_c = -\frac{\partial \Phi(z, T)}{\partial T} = \frac{\gamma_0 g A_0^2 (1 + \alpha z)}{6\gamma_0 \beta_0 A_0^2 - (1 + \alpha z) g^2 T_2^2} T \quad |T| \leq T_p(z). \quad (15b)$$

增益色散因子 gT_2 也增大了自相似脉冲的线性啁啾, 而且, 色散渐减系数 α 亦增大了啁啾参数. 在色散渐减光纤中有 $P = \gamma_0 A_0^2 \exp(gz) \approx \gamma_0 A_0^2$, 则脉冲有效宽度可以简化为

$$T_p(z) = \left\{ \left[\frac{6\gamma_0 \beta_0 A_0^2 - 2g^2 T_2^2 (1 + \alpha z)}{6\gamma_0 \beta_0 A_0^2} \right] \times \frac{[6\gamma_0 \beta_0 A_0^2 - (1 + \alpha z) g^2 T_2^2]^2}{6\alpha\gamma_0 \beta_0 g A_0^2 + 2\gamma_0 \beta_0 g^2 A_0^2 (1 + \alpha z)} \right\}^{1/2} \times \exp\left(\frac{1}{2}gz\right). \quad (19b)$$

初始有效宽度为

$$T_p(0) = \left[\left(\frac{6\gamma_0 \beta_0 A_0^2 - 2g^2 T_2^2}{6\gamma_0 \beta_0 A_0^2} \right) \right. \\ \left. \times \frac{(6\gamma_0 \beta_0 A_0^2 - g^2 T_2^2)^2}{6\alpha\gamma_0 \beta_0 g A_0^2 + 2\gamma_0 \beta_0 g^2 A_0^2} \right]^{1/2} \Big|_{z=0},$$

可见增益色散因子 gT_2 也减小了脉冲的有效宽度; 在 $T_2 = 0$ 的情况下, $T_p(0) = \left(\frac{18\gamma_0 \beta_0 A_0^2}{3\alpha g + g^2} \right)^{1/2} \Big|_{z=0}$. 有趣的是, 如果 $-1 < \alpha < 0$, 而且 $3|\alpha| > g$, 也可以生产自相似脉冲. $\alpha = 0$ 时, 其结果与文献 [3] 的结论也完全相同.

在双曲线型变化的色散渐减光纤中, 设入射一

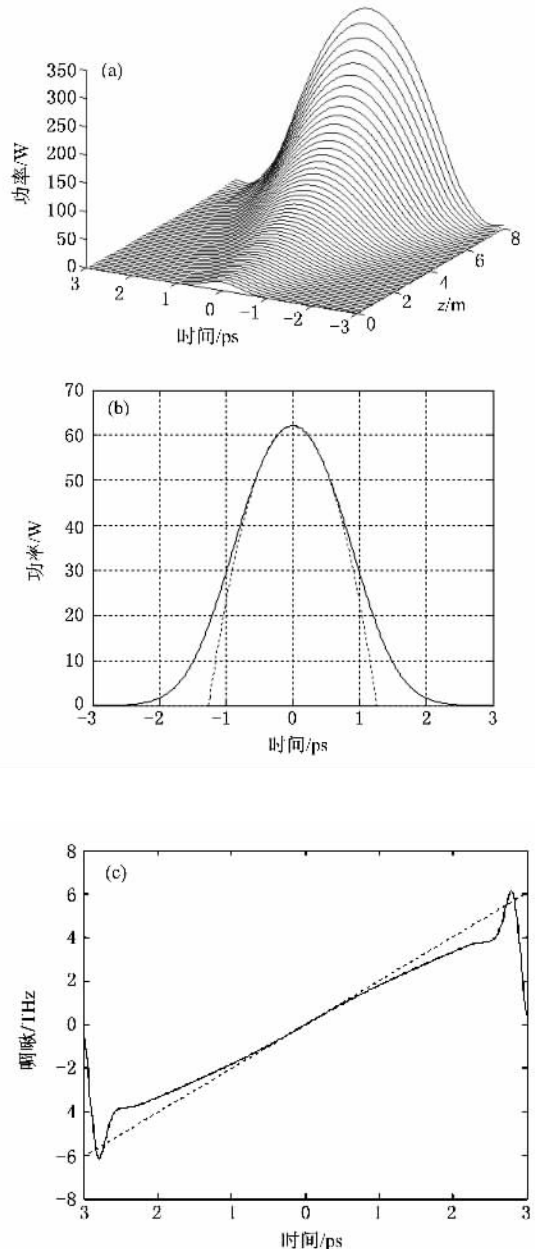


图 2 双曲线型 DDF 的数值解与自相似解析解的对比 (a) G-LE 自相似脉冲演化 (b) 抛物自相似脉冲的形状对比 (c) 抛物自相似脉冲的啁啾对比

阶高斯脉冲的能量为 $U_{in} = 15 \text{ pJ}$, $T_0 = 550 \text{ fs}$, $T_2 = 30 \text{ fs}$, $L = 8 \text{ m}$, 光纤增益系数为 $g = 0.53 \text{ m}^{-1}$, $\beta_0 = 380.0 \times 10^{-3} \text{ ps}^2 \text{ m}^{-1}$, 其色散渐减系数 $\alpha = 1.66$, $\gamma = 5.4 \times 10^{-3} \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$. 图 2(a) 给出了二阶色散双曲型纵向变化的 G-LE 自相似脉冲演化情况, 图 2(b) 是光纤长度 $L = 2 \text{ m}$ 时脉冲的波形. 其中实线是数值模拟结果, 虚线是解析式 (21) 的解. 可以看出除了在脉冲前后沿附近, 数值结果与解析解也符合得很好. 图 2(c) 是脉冲的啁啾曲线, G-LE 的数值解的线性啁啾 (实线) 与解析解 (虚线) 基本符合. 因此, 可以确定双曲线型变化的 DDF 中的 G-LE 也具有抛物自相似解.

我们注意到, 首先, 图 1 和图 2 显示, G-LE 的数值解与自相似解析解有一定的差异. 纵向变化的色散渐减光纤中, 数值解与自相似解析解的脉冲形状符合得很好, 但两者的脉冲线性啁啾变化有一定的偏差. 而双曲线型变化的色散渐减光纤中, 数值解与自相似解析解的脉冲形状在脉冲中心范围符合得很好, 而在前后沿有一定的偏差; 但是, 两者的脉冲线性啁啾符合较好. 其次, 图 1(c) 和图 2(c) 的啁啾曲线出现了两个尖峰. 产生这些差异的主要原因有: 其一, 自相似解析解有一定的近似, 不是完全严格意义的解析解, 我们在方程 (8) 到方程 (9) 的假定中, 忽略了振幅瞬时包络函数的二阶导数项, 它比一阶导数项小一个量级; 其二, 数值解的参数没有达到最佳的匹配选择, 因为是光纤参数与入射脉冲的初始能量共同决定了自相似脉冲的演化特性, 也就是说, 光纤参数与入射脉冲的初始能量之间存在着一定的制约关系; 其三, 特别是数值解的啁啾曲线在脉

冲前后沿附近出现了两个尖峰, 这是一个非常重要的现象, 应当与掺杂光纤的增益带宽 ($g(z)T_2^2$) 内的能量增益效应 ($g(z)$)、正的二阶色散效应 ($+\beta_2$) 和非线性效应 (SPM) 等因素有关, 即由于掺杂光纤显著的能量增益效果, 脉冲从低振幅的“居间渐进演化 (intermediate asymptotic evolution)”范围向大振幅的抛物自相似 (parabolic pulse core) 范围演化, 其过渡区域的强度急剧变化, 造成其啁啾完全偏离关于演化时间 T 的线性甚至抛物型 (二次方) 的关系而产生了“尖峰振荡”^[20]. 另外, 入射脉冲的初始宽度对自相似脉冲的演化特性也有影响^[3]. 尽管如此, G-LE 的色散渐减光纤数值解与自相似解析解的一致性, 清楚地表明: 反映真实掺杂稀土元素增益光纤 (DDF) 的变系数 G-LE 存在自相似脉冲解.

4. 结 论

基于对称约简方法, 在掺杂光纤放大器中考虑正色散区域, 信号脉冲宽度 T_0 大于掺杂元素偶极子的弛豫时间 T_2 的情况下, 得到了变系数 G-LE 的抛物渐近自相似脉冲解的振幅函数、相位函数、线性啁啾函数和有效时域宽度. 用正 GVD 和增益色散因子 gT_2 描述了色散系数指数型纵向变化和双曲型纵向变化的色散渐减光纤中自相似抛物渐近脉冲的能量放大特性和线性啁啾特性. 通过数值解与解析解的对比, 证明了变系数 G-LE 描述的真实掺杂光纤放大器中存在自相似脉冲解. 本文将为高掺杂浓度、高增益的光纤放大器和光纤激光器的高能量、高功率短脉冲实验研究提供了一定理论依据.

[1] Barenblatt G I 1996 *Self-similarity, and Intermediate Asymptotics* (Cambridge University Press, Cambridge, England)

[2] Fermann M E, Kruglov V I, Thomsen B C, Dudley J M, Harvey J D 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 6010

[3] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D, Dudley J M 2002 *Opt. Soc. Am. B* **19** 461

[4] Feng J, Xu W C, Zhang Q F, Song F, Mo J X, Liu S H 2006 *Lase. Opt. Pro.* **43** 26 (in Chinese) [冯 杰、徐文成、张巧芬、宋方、莫杰雄、刘颂豪 2006 激光与光电子学进展 **43** 26]

[5] Finot C, Pitois S, Millot G 2005 *Opt. Lett.* **30** 1776

[6] Zheng H J, Liu S L 2006 *Chin. Phys.* **15** 1831

[7] Chang G Q, Galvanauskas A, Winful H G, Norris T B 2004 *Opt. Lett.* **29** 2647

[8] Zheng K, Chang D Y, Fu Y J, Wei H, Yan F P, Jian W, Jian S S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 908 (in Chinese) [郑 凯、常德远、傅永军、魏 淮、延凤平、简 伟、简水生 2007 物理学报 **56** 908]

[9] Zhao W, Zhang W, Ma H Q, Liu C, Chen G F, Lu K Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 1038

[10] Finot C, Millot G 2005 *Opt. Express* **13** 5825

[11] Hirooka T, Nakazawa M 2004 *Opt. Lett.* **29** 498

[12] Xu W C, Zhang S M, Chen W C, Luo A P, Guo Q, Liu S H 2002 *Chin. Phys.* **11** 39

[13] Méchin D, Im S H, Kruglov V I, Harvey J D 2006 *Opt. Lett.* **31** 2106

[14] Parmigiani F, Finot C, Mukasa K, Ibsen M, Roelens M A, Petropoulos P, Richardson D J 2006 *Opt. Express* **14** 7617

- [15] Kruglov V I , Peacock A C , Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 113902
- [16] Kruglov V I , Peacock A C , Harvey J D 2006 *Opt. Soc. Am.* **23** 2541
- [17] Ilday F O , Buckley J R , Clark W G , Wise F W 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 213902
- [18] Nielsen C K , Ortac B , Schreiber T , Limpert J 2005 *Opt. Lett.* **13** 9346
- [19] Xu W C , Zhang S M , Luo A P , Chen W C , Liu S H 2002 *Acta Opt. Sin.* **22** 389 (in Chinese) [徐文成、张书敏、罗爱平、陈伟成、刘颂豪 2002 光学学报 **22** 389]
- [20] Billet C , Dudley J M , Joly N , Knight J C 2005 *Opt. Express* **13** 3226
- [21] Chen S H , Yi L , Guo D S , Lu P X 2005 *Phys. Rev. E* **72** 16622
- [22] Finot C , Parmigiani F , Petropoulos P , Richardson D 2006 *Opt. Express* **14** 3161
- [23] Agrawal G P 1995 *Nonlinear Fiber Optics , Third Edition & Applications of Nonlinear Fiber Optics* (Boston : Academic) (in Chinese) 贾东方、余震虹等译 2002 非线性光纤光学原理及应用(电子工业出版社 第一版)

Analytical self-similar solutions of Ginzburg-Landau equation for the dispersion decreasing fiber *

Feng Jie¹⁾ Xu Wen-Chen^{2)†} Li Shu-Xian²⁾ Chen Wei-Cheng²⁾ Song Fang²⁾ Shen Min-Chang²⁾ Liu Song-Hao²⁾

1) *School of Physics & Telecommunication Engineering , South China Normal University , Guangzhou 510006 , China*

2) *Lab of Photonic Information Technology , School of Information & Optoelectronic Science and Engineering , South China Normal University , Guangzhou 510006 , China*

(Received 7 April 2007 ; revised manuscript received 20 May 2007)

Abstract

Using the method based on the technique of symmetry reduction , we find the general analytical parabolic asymptotic self-similar solutions for the varying coefficient of Ginzburg-Landau equation that take consideration of the influence of the doped fiber retarding time. The parabolic asymptotic amplitude function , change of strict linear phase chirp and the effective temporal pulse width of self-similar pulse with gain dispersion are given for the dispersion decreasing fibers with longitudinal exponential distribution and hyperbolic distribution. And these theoretical results have been confirmed by numerical simulation in this paper.

Keywords : Ginzburg-Landau equation , parabolic asymptotic self-similarity , dispersion decreasing fiber , normal group velocity dispersion

PACC : 4265 , 4265S , 4255N , 4225B

* Project supported by Natural Science Foundation of Guangdong Province , China (Grant No.04010397).

† Corresponding author. E-mail : xuweh@senu.edu.cn