

介观 LC 电路零状态响应的完全解

周小方[†]

(漳州师范学院物理与电子信息工程系, 漳州 363000)

(2007 年 3 月 4 日收到, 2007 年 3 月 20 日收到修改稿)

采用代数动力学规范变换方法, 求出含时变电压源的介观 LC 电路量子态随时间演化算符的精确解. 研究了介观 LC 电路的零状态响应问题, 求出电荷与电流对输入电压信号的零状态响应的完全解. 结果表明介观 LC 电路系统具有线性时不变特性, 且电荷与电流的零状态响应与宏观 LC 电路的结果相同.

关键词: 介观 LC 电路, 时间演化算符, 零状态响应, 线性时不变特性

PACC: 7335, 0365

1. 引 言

随着对纳米器件研究的深入, 电路和器件的尺寸已达到原子尺寸的量级^[1]. 当电路和器件的尺寸与电子输运的相位相关长度相当时, 必须考虑电路和器件的量子效应. Louisell^[2]曾经提出有源 LC 电路的量子化方案. 近年来, 介观电路的量子效应成为倍受关注的研究课题, 人们对无源介观电路中电荷与电流的量子效应、外电源对介观电路系统量子态演化的影响、外电源对电荷与电流期待值的影响、耗散对量子效应的影响、电路之间的耦合等问题进行了大量的研究^[3-20]. 陈斌等人^[21]对介观 LC, RLC 电路的量子效应及库仑阻塞现象进行了研究, 得出外加电压源的幅度必须是量子化的. 嵇英华等人^[22-23]研究了脉冲信号宽度对介观 LC, RLC 电路量子态的影响, 结果表明要保持系统初始量子态(基态)不变, 脉冲信号的宽度必须是某个最小宽度的整数倍. 在这些研究工作中未见到介观 LC 电路系统电荷与电流对任意时变电压信号源的零状态响应的完全解. 本文首先应用代数动力学规范变换方法^[24-25], 求出在任意时变电压信号源作用下介观 LC 串联电路系统量子态随时间演化算符的精确解, 然后求出电荷与电流对输入电压信号的零状态量子响应, 结果表明介观 LC 电路系统仍是线性时不变系统, 且介观 LC 电路与宏观集总参数 LC 电路的电荷与电流对输入激励电压信号的零状态响应相同.

2. 含源介观 LC 电路量子态的演化

在宏观集总参数 LC 串联电路中, 若 $t < 0$ 时, 没有电压信号源作用于电路, 且电路已趋稳定. 从 $t = 0$ 时刻开始, 时变电压信号源 $e(t) = \epsilon(t)u(t)$ 作用于电路, 其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数, 则电路的基尔霍夫回路方程和初始状态为

$$L\ddot{q} + L\omega^2 q = e(t), \quad (1)$$

$$q(0_-) = 0; \dot{q}(0_-) = 0, \quad (2)$$

其中 $\omega^2 LC = 1$, q 为电容所储电荷, 与之共轭的量为电感中的磁通 $p = L\dot{q}$. (1) 式满足 (2) 式的解是集总参数 LC 串联电路系统电荷对激励信号 $e(t)$ 的零状态响应 $\mathcal{A}[e(t)] = q(t)$. 由于宏观集总参数 LC 电路系统是线性时不变系统, 因此该响应具有以下重要性质^[26]:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}[c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t)] \\ &= c_1 \mathcal{A}[e_1(t)] + c_2 \mathcal{A}[e_2(t)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\mathcal{A}[e(t - t_0)] = q(t - t_0). \quad (4)$$

与运动方程 (1) 相对应, 在时变电压信号源 $e(t)$ 作用下, 量子化介观 LC 串联电路系统的哈密顿算符为

$$\hat{H} = \frac{1}{2L}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}L\omega^2\hat{q}^2 - \hat{q}e(t), \quad (5)$$

其中 \hat{q} 和 \hat{p} 是电荷算符和磁通算符, 满足 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. 引入降算符 \hat{a} 和升算符 \hat{a}^+ , 则 (5) 式可表示为

[†] E-mail: zhou9190@vip.sina.com

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) + \theta^*(t)\hat{a}^+ + \theta(t)\hat{a}, \quad (6)$$

其中 $\hat{a} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} + i\frac{1}{L\omega}\hat{p}\right)$, $\hat{a}^+ = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\hat{q} - i\frac{1}{L\omega}\hat{p}\right)$, $\hat{N} =$

$\hat{a}^+\hat{a}$, $\theta(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\mathcal{A}(t)$, $\alpha = \sqrt{\frac{L\omega}{\hbar}}$. 这些算符满足以

下对易关系:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1, [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, [\hat{N}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+. \quad (7)$$

若 $t=0_-$ 时, 介观电路系统的量子态为 $|\psi(0_-)\rangle$, 则任意时刻系统的量子态 $|\psi(t)\rangle$ 可表示为

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0_-)\rangle, \quad (8)$$

由薛定谔方程可得时间演化算符 $\hat{U}(t)$ 满足:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}(t)}{\partial t} \hat{U}^{-1}(t) = \hat{H}. \quad (9)$$

(6) 式的哈密顿量描述具有 $\hbar\omega$ (4) 式代数结构的线性非自治量子系统, 可采用代数动力学规范变换方法^[24, 25]求解方程 (9), 令

$$\hat{U}(t) = e^{v_1(t)} e^{v_2(t)(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{v_3(t)\hat{a}^+} e^{v_4(t)\hat{a}}, \quad (10)$$

其中 $v_i(0_-) = \alpha$ ($i=1, \dots, 4$), 将 (10) 式代入 (9) 式得

$$\begin{aligned} & \dot{v}_1 + \dot{v}_2\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) + e^{v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} \dot{v}_3 \hat{a}^+ e^{-v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} \\ & + e^{v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{v_3 \hat{a}^+} \dot{v}_4 \hat{a} e^{-v_3 \hat{a}^+} e^{-v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} = \frac{-i}{\hbar} \hat{H}. \end{aligned} \quad (11)$$

由 (7) 式可得

$$e^{v_3 \hat{a}^+} \hat{a} e^{-v_3 \hat{a}^+} = \hat{a} - v_3, \quad (12)$$

$$e^{v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} \hat{a} e^{-v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} = \hat{a} e^{-v_2}, \quad (13)$$

$$e^{v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} \hat{a}^+ e^{-v_2(\hat{N} + \frac{1}{2})} = \hat{a}^+ e^{v_2}. \quad (14)$$

将 (6) 和 (12)–(14) 式代入 (11) 式得

$$\begin{aligned} & \dot{v}_1 + \dot{v}_2\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) + \dot{v}_3 \hat{a}^+ e^{v_2} + \dot{v}_4 (\hat{a} e^{-v_2} - v_3) \\ & = -i\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right) - \frac{i}{\hbar} \theta^* \hat{a}^+ - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{a}, \end{aligned} \quad (15)$$

由 (15) 式可得

$$\dot{v}_1 - v_3 \dot{v}_4 = 0, \quad (16)$$

$$\dot{v}_2 = -i\omega, \quad (17)$$

$$\dot{v}_3 e^{v_2} = -\frac{i}{\hbar} \theta^*, \quad (18)$$

$$\dot{v}_4 e^{-v_2} = -\frac{i}{\hbar} \theta. \quad (19)$$

(16)–(19) 各式的解分别为 $v_1 = \nu(t)$, $v_2 = -i\omega t$,

$v_3 = \mathcal{A}(t)$, $v_4 = -z^*(t)$, 其中

$$\mathcal{A}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{0_-}^t \theta^*(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad (20)$$

$$\nu(t) = -\int_{0_-}^t \mathcal{Z}(\tau) \mathbb{I} z^*(\tau) d\tau. \quad (21)$$

因此, 时间演化算符 $\hat{U}(t)$ 的精确解为

$$\hat{U}(t) = e^{\nu(t)} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{\mathcal{A}(t)\hat{a}^+} e^{-z^*(t)\hat{a}}. \quad (22)$$

由于 $e^{z\hat{a}^+} e^{-z^*\hat{a}} = e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}} e^{\frac{1}{2}[z\hat{a}^+, -z^*\hat{a}]}$, 所以有

$$\hat{U}(t) = e^{\nu + \frac{1}{2} z^* z} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}}. \quad (23)$$

由 (21) 式容易证明 $\nu + \frac{1}{2} z^* z = i\text{Im}\nu$, 所以有

$$\hat{U}(t) = e^{i\text{Im}\nu} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}}. \quad (24)$$

由 (24) 式, 容易验证所求时间演化算符为么正算符, 满足条件 $\hat{U}^\dagger(t)\hat{U}(t) = 1$.

3. 电荷电流的零状态响应

在输入电压信号源 $\mathcal{A}(t)$ 的激励下, 电荷与电流在量子态 $|\psi(t)\rangle$ 中的期待值为

$$\bar{q}(t) = \langle \psi(0_-) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{q} \hat{U}(t) | \psi(0_-) \rangle, \quad (25)$$

$$\bar{j}(t) = \frac{1}{L} \langle \psi(0_-) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{p} \hat{U}(t) | \psi(0_-) \rangle. \quad (26)$$

不妨将 $\bar{q}(t)$ 和 $\bar{j}(t)$ 理解为介观 LC 电路电荷与电流对输入电压信号的响应. 在海森堡绘景中电荷与电流算符表示为 $\hat{q}(t) = \hat{U}^\dagger \hat{q} \hat{U}$ 和 $\hat{j}(t) = \frac{1}{L} \hat{U}^\dagger \hat{p} \hat{U}$,

由 (24) 式得

$$\begin{aligned} \hat{q}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} e^{-(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} (\hat{a} + \hat{a}^+) \\ &\quad \times e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{j}(t) &= \frac{-i\omega}{\sqrt{2}\alpha} e^{-(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})} e^{i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} (\hat{a} - \hat{a}^+) \\ &\quad \times e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}}, \end{aligned} \quad (28)$$

由 (7) 式可得

$$e^{-(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})} \hat{a} e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}} = \hat{a} + z, \quad (29)$$

$$e^{-(z\hat{a}^+ - z^*\hat{a})} \hat{a}^+ e^{z\hat{a}^+ - z^*\hat{a}} = \hat{a}^+ + z^*. \quad (30)$$

将 (13) (14) (29) (30) 式代入 (27) 和 (28) 式得

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \left[(\hat{a} + z) e^{-i\omega t} + (\hat{a}^+ + z^*) e^{i\omega t} \right], \quad (31)$$

$$\bar{j}(t) = \frac{-i\omega}{\sqrt{2}\alpha} \left[(\hat{a} + z) e^{-i\omega t} - (\hat{a}^+ + z^*) e^{i\omega t} \right]. \quad (32)$$

将 (31) 和 (32) 式代入 (25) 和 (26) 式得电荷与电流响应为

$$\bar{q}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \operatorname{Re} \left[\left(\psi(0_-) | \hat{a} | \psi(0_-) + z \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (33)$$

$$\bar{j}(t) = \frac{\sqrt{2}\omega}{\alpha} \operatorname{Im} \left[\left(\psi(0_-) | \hat{a} | \psi(0_-) + z \right) e^{-i\omega t} \right] \quad (34)$$

(33) 和 (34) 式为任意初始状态下, 介观 LC 电路电荷与电流对输入电压信号的响应。

以 $|n\rangle$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 表示 \hat{N} 属于本征值 n 的本征态, 由于时变电压信号从 $t=0$ 时刻起作用于系统, 此前系统已稳定, 因此不妨认为系统的初始量子态 $|\psi(0_-)\rangle = |0\rangle$, 由 (33) (34) 和 (20) 式得介观 LC 电路电荷与电流对输入电压信号 $e(t)$ 的零状态响应为

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\omega} \int_0^t e(\tau) \sin\omega(t-\tau) d\tau, \quad (35)$$

$$\bar{j}(t) = \frac{1}{L} \int_0^t e(\tau) \cos\omega(t-\tau) d\tau. \quad (36)$$

由于 $\hat{U}(t)$ 为么正算符, 因此由 (31) 和 (32) 式可得电荷平方、电流平方算符在海森堡绘景中的表示:

$$\begin{aligned} \hat{q}^2(t) = & \frac{1}{2\alpha^2} \left[(\hat{a}^2 + 2z\hat{a} + z^2) e^{-2i\omega t} \right. \\ & + ((\hat{a}^\dagger)^2 + 2z^* \hat{a}^\dagger + (z^*)^2) e^{2i\omega t} \\ & \left. + 2\hat{N} + 1 + 2z^* \hat{a} + 2z\hat{a}^\dagger + 2|z|^2 \right] \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{j}^2(t) = & \frac{\omega^2}{2\alpha^2} \left[(\hat{a}^2 + 2z\hat{a} + z^2) e^{-2i\omega t} \right. \\ & + ((\hat{a}^\dagger)^2 + 2z^* \hat{a}^\dagger + (z^*)^2) e^{2i\omega t} \\ & \left. - 2\hat{N} - 1 - 2z^* \hat{a} - 2z\hat{a}^\dagger - 2|z|^2 \right] \quad (38) \end{aligned}$$

由 (31) 和 (32) 式、(37) 和 (38) 式容易求出与电荷、电流的零状态响应相对应的电荷、电流的量子涨落:

$$\overline{(\Delta\hat{q}(t))^2} = \frac{\hbar}{2L\omega}, \quad (39)$$

$$\overline{(\Delta\hat{j}(t))^2} = \frac{\hbar\omega}{2L}. \quad (40)$$

4. 结果讨论

显见, 由 (35) 和 (36) 式所给出的介观 LC 电路电荷与电流的零状态响应具有如 (3) 式所示的叠加性与均匀性, 也具有如 (4) 式所示的时不变性, 因此介观 LC 电路系统是量子线性时不变系统. 由 (35) 式和 (36) 式还可见, 系统在 t 时刻的响应只与此前的输入电压信号及电路参数有关, 与 t 时刻以后的激励信号无关, 因此介观 LC 电路系统还是量子因果

系统.

由 (1) 和 (2) 式容易求出宏观集总参数 LC 电路电荷与电流函数的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{A}[q(t)] = \frac{1}{L\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \mathcal{A}[e(t)], \quad (41)$$

$$\mathcal{A}[j(t)] = \frac{1}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \mathcal{A}[e(t)], \quad (42)$$

因此, 宏观集总参数 LC 电路电荷与电流对输入电压信号的响应为

$$q(t) = \frac{1}{L\omega} e(t) \otimes [u(t) \sin\omega t], \quad (43)$$

$$j(t) = \frac{1}{L} e(t) \otimes [u(t) \cos\omega t], \quad (44)$$

式中 \otimes 代表卷积. 由于 (35) 和 (36) 式分别与 (43) 和 (44) 式相同, 这表明介观 LC 电路与宏观集总参数 LC 电路的电荷与电流对输入电压信号的零状态响应相同, 所不同的是介观 LC 电路的电荷与电流零状态响应存在一定的涨落. (39) 和 (40) 式表明涨落是恒定的, 与输入的电压信号无关, 这是介观 LC 电路与宏观 LC 电路的本质区别.

由 (33) (34) (37) 和 (38) 式可见, 若介观 LC 电路初始的量子态为 $|n\rangle$, 电荷与电流对输入电压信号的响应仍是 (35) 和 (36) 两式, 只是电荷与电流的涨落分别扩大了 $(2n+1)$ 倍, 因此只有将介观 LC 电路系统的初始量子态控制在基态 $|0\rangle$, 才能使涨落的影响减到最小.

本文的 (22) 和 (24) 式还给出了含时变源介观 LC 电路系统量子态随时间演化算符的精确解, 由该解可方便地对上述结果进行物理上的诠释. 当系统的初始量子态 $|\psi(0_-)\rangle = |0\rangle$ 时, 由 (24) 式可求得系统任意时刻的状态为

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\operatorname{Im}v} e^{-i\omega t(\hat{N} + \frac{1}{2})} |z\rangle, \quad (45)$$

其中 $|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} |0\rangle$ 为有源介观 LC 电路系统的相干态. 经过计算可得

$$|q|\psi(t)|^2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2} \left[q \frac{\sqrt{2}}{\alpha} |z| \cos(\omega t - \arg z) \right]^2. \quad (46)$$

因此在时变电压源作用下, 介观 LC 电路系统具有 q 电荷量的概率是一个运动的 Gauss 波包, 该波包的不确定度最小, 波包不扩散, 波包的中心电量为

$$q_c = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} |z| \cos(\omega t - \arg z) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \operatorname{Re}(z e^{-i\omega t}) \quad (47)$$

此式表明波包的中心电量与宏观 LC 电路的电荷响应相同.

- [1] Garcia R G 1992 *Appl. Phys. Lett.* **60** 1960
- [2] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York : John Wiley)
- [3] Li Y Q , Chen B 1996 *Phys. Rev. B* **53** 4027
- [4] Li Y Q , Chen B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 139
- [5] Wang J S , Sun C Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese)
[王继锁、孙长勇 1997 物理学报 **46** 2007]
- [6] Wang J S , Han B C , Sun C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇 1998 物理学报 **47** 1187]
- [7] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1999 物理学报 **48** 2343]
- [8] Wang J S , Feng J , Zhan M S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯 健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]
- [9] Long C Y , Liu B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1011 (in Chinese) [龙超云、刘 波 2001 物理学报 **50** 1011]
- [10] Fan H Y , Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174
- [11] Liang X T , Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
- [12] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490
- [13] Wang X G , Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
- [14] Lei M S , Ji Y H , Xie F S 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 163
- [15] Ji Y H , Luo H M , Ye Z Q , Wu Y Y , Chen M Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2534 (in Chinese) [嵇英华、罗海梅、叶志清、吴云翼、陈明玉 2004 物理学报 **53** 2534]
- [16] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1352 (in Chinese) [宋同强 2004 物理学报 **53** 1352]
- [17] Cui Y S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1799 (in Chinese) [崔元顺 2005 物理学报 **54** 1799]
- [18] Ruan W , Lei M S , Ji Y H , Xie A D 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2291 (in Chinese) [阮 文、雷敏生、嵇英华、谢安东 2005 物理学报 **54** 2291]
- [19] Qiu S Y , Cai S H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 816 (in Chinese) [邱深玉、蔡绍洪 2006 物理学报 **55** 816]
- [20] Liu Q , Zou D , Ji Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1596 (in Chinese) [刘 清、邹 丹、嵇英华 2006 物理学报 **55** 1596]
- [21] Chen B , Li Y Q , Sha J , Zhang Q R 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 129 (in Chinese) [陈 斌、李有泉、沙 健、张其瑞 1997 物理学报 **46** 129]
- [22] Ji Y H , Lei M S , Xie F S , Xiong X H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1163 (in Chinese) [嵇英华、雷敏生、谢芳森、熊小华 2001 物理学报 **50** 1163]
- [23] Ji Y H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 692 (in Chinese) [嵇英华 2003 物理学报 **52** 692]
- [24] Zuo W , Wang S J 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 1363 (in Chinese) [左 维、王顺金 1995 物理学报 **44** 1363]
- [25] Zhou X F , Wu Q X 2003 *Chin. J. Quantum Electron* **20** 18 (in Chinese) [周小方、吴奇学 2003 量子电子学报 **20** 18]
- [26] Oppenheim A V , Willsky A S 1997 *Signals and systems* 2nd ed. (New Jersey : Prentice Hall) Chap 2

The complete solution of zero-state response in mesoscopic LC circuit

Zhou Xiao-Fang[†]

(Department of Physics and Electronics Information Engineering , Zhangzhou Normal College , Zhangzhou 363000 , China)

(Received 4 March 2007 ; revised manuscript received 20 March 2007)

Abstract

The exact solution of time evolution operator was obtained by applying the gauge transform of algebra dynamic. Such an operator describes the quantum state of time dependence of mesoscopic LC circuit containing voltage source. The zero-state response in mesoscopic LC circuit was researched , and the charge and current zero-state response of the import signal were also acquired. The result showed that the system of mesoscopic LC circuit has linear time invariant feature , and the response in mesoscopic LC circuit is the same as in the macroscopic LC circuit.

Keywords : mesoscopic LC circuit , operator of time evolution , zero-state response , linear time invariant feature

PACC : 7335 , 0365

[†] E-mail :zhou9190@vip.sina.com