第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6169-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.11,November,2007

强非线性发展方程孤波同伦解法*

莫嘉琪[1)2)4)†] 张伟江[3)4)] 陈贤峰[3)4)]

1)(安徽师范大学,芜湖 241000)
2)(湖州师范学院,湖州 313000)
3)(上海交通大学,上海 200240)
4)(上海高校计算科学 E-研究院上海交通大学研究所,上海 200240)

(2007 年 2 月 19 日收到;2007 年 3 月 19 日收到修改稿)

研究了一个强非线性发展方程. 利用同伦映射方法,首先构造了相应的同伦变换;其次选取了适当的初始近似;再用迭代方法得到了孤波的任意次精度的近似解.

关键词:发展方程,非线性,孤立子,近似方法
PACC:0200

1. 引 言

非线性孤波解是非线性发展方程的一个很重要的研究方面. 当今提出了许多新方法,例如双曲正切函数法[1]、齐次平衡法[2]、Jacobi 椭圆函数展开法[3]、辅助方程法[4]等. 近来许多学者,例如在激波[5,6]、光波散射[7]、量子力学[8]、大气物理[9]、神经网络[10]等方面都作了一些孤波理论方面的研究. 非线性孤波理论的定量和定性各种方法也不断地被改进. 孤波扰动理论的渐近方法就是孤波理论的一种新的研究方法. 其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性方程转化为易求解的方程来处理. 这类方法完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法. 同伦映射方法[11,12]就是属于一类新方法. 本方法的优点在于思路简明,计算简单,并可得到解的较高近似度. 本文就是利用同伦映射方法来求解强非线性发展方程,得到孤波近似解析解.

近来,许多学者研究了非线性问题的近似理论[13—16]. 近似方法不断被发展和优化. 包括伸长变量法,平均法、边界层法、匹配渐近展开法和多重尺度法等. 莫嘉琪等也利用一些渐近方法来研究一类反应扩散问题、大气物理问题、生态环境问题、流行性传染病问题、激波问题和激光脉冲问题等[17—27]. 本文首先构造一个特殊的同伦映射变换,然后进行迭代计算,最后得到相应强非线性发展方程的孤波的任意次精度的近似解.

2. 强非线性发展方程与同伦映射

考虑如下 $2n+1$ 次非线性发展方程[28]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-pu+qu^3+ru^{2n+1}=0, \tag{1}$$

其中系数 p,q 和 r 为正常数.

对应于方程(1)当 $r=0$ 时的情形为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-pv+qv^3=0. \tag{2}$$

由文献[29]知,方程(2)具有如下单孤波解:

$$v(x,t)=\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t), \tag{3}$$

其中 $x_0,\beta(\beta^2<1)$ 为任意常数,它们可由原问题的具体条件来确定.

为了得到方程(1)的近似解,引入一组同伦映射[11,12] $H(v,s):R\times I\to R$:

$$H(u,s)=L(u)-L(w)+s(L(w)+qu^3+ru^{2n+1}), \tag{4}$$

其中 $R=(-\infty,+\infty)$,$I=[0,1]$,而线性算子 L 为

* 国家自然科学基金(批准号:40676016,10471039),国家重点基础研究发展规划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221),上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:N.E03004)和浙江省自然科学基金(批准号:Y606268)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pu, \tag{5}$$

且 w 为待定函数,将在下面确定.

显然,由(4)式,$H(u,1)=0$ 与方程(1)相同. 故方程(1)的解 $u(x,t)$ 就是 $H(u,s)=0$ 的解当 $s\to 1$ 的情形.

3. 孤波近似解的计算

令

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x,t) s^i. \tag{6}$$

考虑到(6)式,由(4)式,比较方程 $H(u,s)=0$ 关于 s 的同次幂的系数. 由 $H(u,s)=0$ 关于 s 的零次幂的系数得

$$L(u_0) = L(w). \tag{7}$$

现选定函数 w 为 v. 于是由(7),(5),(3)式,可以得到

$$u_0(x,t) = \sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x - x_0 + \beta t). \tag{8}$$

在 $H(u,s)=0$ 中,关于 s 的一次幂的系数得

$$L(u_1) = -L(w) - q(u_0)^3 - r(u_0)^{2n+1},$$

即

$$L(u_1) = -r(u_0)^{2n+1}. \tag{9}$$

其中 u_0 由关系式(8)表示. 于是由 Fourier 变换法,方程(9)在零初值的情况下的解为

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = &-\frac{r}{4\pi}\left(\frac{p}{q}\right)^{(2n-1)/2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp(p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))] \\ &\times\tanh^{2n+1}\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}} \\ &\times(x-x_0+\beta\tau)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

在 $H(u,s)=0$ 中,关于 s 的二次幂的系数得

$$L(u_2) = (3qu_0^2 + (2n+1)ru_0^{2n})u_1. \tag{11}$$

于是方程(11)在零初值的情况下的解为

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = &\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp(p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))] \\ &\times(3qu_0^2+(2n+1)ru_0^{2n}) \\ &\times u_1\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

再由关系式(6),(8),(10),(12)及同伦映射理论,我们便得到发展方程(1)孤波解的二次近似式:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t) \\ &-\frac{r}{4\pi}\left(\frac{p}{q}\right)^{(2n-1)/2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))] \\ &\times\tanh^{2n+1}\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta\tau)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))] \\ &\times(3qu_0^2+(2n+1)ru_0^{2n})u_1\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 u_0,u_1 分别由(8),(10)式表示.

继续用相同的方法,还能得到非线性发展方程(1)孤波解的更高次近似.

4. 孤波近似解的精度比较

为了说明用上述同伦映射方法得到的近似解的精度. 现在来考察发展方程(1)中的 r 是小参数的情形.

首先,我们把由同伦映射方法得到的近似解(13)式表示为

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t) \\ &-\frac{r}{4\pi}\left(\frac{p}{q}\right)^{(2n-1)/2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))] \\ &\times\tanh^{2n+1}\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta\tau)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau \\ &+\frac{3q}{4\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}} \\ &\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau)) \\ &-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))]u_0^2u_1\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau \\ &+O(r^2),\quad 0<r\ll 1. \end{aligned} \tag{14}$$

下面用摄动方法来构造方程(1)的渐近解 $\bar{u}$. 设

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{\infty}\bar{u}_i(x,t)r^i, 0<r\ll 1.$$

将上述代入方程(1). 利用摄动方法,可以依次地求得

$$\bar{u}_0(x,t)=\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t),$$

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(x,t)=&-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{p}{q}\right)^{(2n-1)/2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}}\\&\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))\\&-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))]\\&\times\tanh^{2n+1}\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\\&\times(x-x_0+\beta\tau)\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

于是方程(1)的摄动渐近解为 $\bar{u}(x,t)=\bar{u}_0(x,t)+r\bar{u}_1(x,t)+O(r^2)$. 即

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,t)=&\sqrt{\frac{p}{q}}\tanh\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}(x-x_0+\beta t)\\&-\frac{r}{4\pi}\left(\frac{p}{q}\right)^{(2n-1)/2}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}}\\&\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))\\&-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))]\\&\times\tanh^{2n+1}\sqrt{\frac{p}{2(1-\beta^2)}}\\&\times(x-x_0+\beta\tau)\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau\\&+\frac{3q}{4\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\lambda x)}{(p-\lambda^2)^{1/2}}\\&\times[\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))\\&-\exp((p-\lambda^2)^{1/2}(t-\tau))]u_0^2u_1\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau\\&+O(r^2),\quad 0<r\ll 1.\end{aligned}\tag{15}$$

由两种方法得到方程(1)的近似解(14)和(15),它们有相同的近似度.因此可以看出,用同伦方法得到的强非线性发展方程(1)孤波近似解具有很好的精度.

5. 结　论

同伦映射方法是一种解析的求解方法,并且方法简单可行. 它不同于一般的数值模拟方法. 用同伦映射方法得到的近似式还能进一步进行解析运算. 事实上,非线性发展方程(1)孤波解的同伦映射方法,提供了一个构造任意次精度的孤波近似解. 它可以进一步通过解析运算,并从定量的角度来研究有关孤波的其他定性性态.

[1] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comp. Phys. Commun.* **98** 288

[2] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[3] Parkes E J, Duffy B R, Abbott P C 2001 *Phys. Lett.* A **295** 280

[4] Sirendaoreji, Sun J 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

[5] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[6] Gu Daifang, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[7] Pan L X, Zou W M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [潘留仙、左伟明 2005 物理学报 **54** 1]

[8] Pan L X, Liu J L, Li S S, Niu Z C, Feng S L, Zheng H Z 2002 *Science in China* **32**A 556 (in Chinese) [潘留仙、刘金龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚值 2002 中国科学 **32**A 556]

[9] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]

[10] Wang L S, Xu D Y 2003 *Science in China* **32**E 488 (in Chinese) [王林山、徐道义 2003 中国科学 **32**E 488]

[11] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co)

[12] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]

[13] Han X L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [韩祥临 2005 物理学报 **54** 2590]

[14] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2004 物理学报 **54** 2510]

[15] Hwangm S 2004 *J. Diff. Eqns.* **200** 191

[16] Doelman A, Iron D, Nishiura Y 2004 *SIAM J. Math. Anal.* **35** 1420

[17] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 550

[18] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Nat. Sci.* **14** 1126

[19] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[20] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]

[21] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081]

[22] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 485 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 485]

[23] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉、林万涛、林一骅 2006 物理学报 **55** 6]

[24] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875

[25] Mo J Q, Lin Y H, Wang H 2005 *Chin. Phys.* **14** 2387

[26] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1450

[27] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578

[28] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 13 (in Chinese) [套格图桑、斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 13]

[29] Fan E G, Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1254 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

The homotopic solving method of solitary wave for strong nonlinear evolution equation*

Mo Jia-Qi[1)2)4)†] Zhang Wei-Jiang[3)4)] Chen Xian-Feng[3)4)]

1) (*Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2) (*Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

3) (*Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

4) (*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *Chian*)

(Received 19 February 2007; revised manuscript received 19 March 2007)

Abstract

A strong nonlinear evolution equation is studied. Using the homotopic mapping method, firstly, the corresponding homotopic mapping transform is constructed; secondly, the suitable initial approximation is selected; and thirdly, using the iteration method, the approximate solution with arbitrary degree of accuracy for the solitary wave is obtained.

Keywords: evolution equation, nonlinear, soliton, approximate method

PACC: 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40676016, 10471039), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Direction Program of the Knowledge Innovation Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. N.E03004) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y606268).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn