第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6178-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.11,November,2007

Jackiw-Pi 模型的新涡旋解*

李永青[1)3)] 李希国[1)2)†] 刘紫玉[1)3)] 罗培燕[1)3)] 张鹏鸣[1)2)]

1)(中国科学院近代物理研究所,兰州 730000)

2)(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心,兰州 730000)

3)(中国科学院研究生院,北京 100049)

(2007 年 3 月 6 日收到;2007 年 3 月 19 日收到修改稿)

运用 ϕ 映射拓扑流理论研究了 Jackiw-Pi 模型中的自对偶方程,得到一个静态的自对偶解满足带有 δ 函数项的刘维尔方程,从而得到了一个完整的带有拓扑信息的涡旋解,自然给出了磁通量子化.

关键词:Chern-Simons 理论,Jackiw-Pi 模型,涡旋,磁通量子化

PACC:0300,0356G

1. 引 言

涡旋(涡线)是一个很有趣的物理现象,它在研究凝聚态物理中扮演了重要的角色[1].从物理现象而言,它是在物质凝聚体中形成的,例如,流体中的涡旋;第二类超导,当磁场 H 超过 H_c 时,磁力线可以穿过超导体内部形成一些管状结构,每个管内部的磁通量是量子化的,这一现象称为涡线.这是 Abrikosov 用描述外磁场中超导体的 Ginsburg-Landau 方程预言的,后来为实验所证实.1973 年,Nielson 和 Olesen 研究发现[2],在 2+1 时空中,标量场与规范场耦合的相对论模型中也存在涡线解.从纯数学角度看,涡旋是一类拓扑孤粒子,与对称群的拓扑性质相关,是经典标量场的一类稳定解.近来,在自旋 1/2 分量的 Bose-Einstein 凝聚体中也发现了涡旋结构[3].对于像磁通这样的涡旋其解给出磁通量的量子化的最小的单位 $\Phi_0 = 2\pi c\hbar/e$,总磁通 $\Phi = n\Phi_0$,其中 $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 是与 $U(1)$ 群的同伦群 $\pi_1(U(1)) = z$ 相联系,实际上,这个整数就是涡旋解的映射度.所以,类涡旋的物理现象反应了时空的对称与整体性质,也就是拓扑性质.

另一方面,1982 年 Deser 等人[4]在研究二维物理时考虑所谓的 Chern-Simons 理论[5],也就是在 2+1维空间中考虑 Chern-Simons 规范场理论后,发现许多新的物理效应,例如,分数角动量和分数统计[6]等,而且,能够解释量子霍尔效应[7].1989 年,Witten 发现 3 维流形中纽结的拓扑不变量分类可以用 Chern-Simons 规范场理论的 Wilson 圈算子的配分函数重新解释.同时,也发现这种理论提供了 3 维流形的一种新的拓扑不变量,并且,通过 Chern-Simons 规范理论的精确解,他给出了纽结的拓扑不变量与这种新的拓扑不变量的关系[8].实际上,Chern-Simons 规范场理论来源于 4 维流形中规范场的 Chern-Simons 第二特征类[9]——一个拓扑不变量,因此,在研究 3 维流形的物理和整体数学结构时是应该考虑的.所以,Chern-Simons 规范理论不但是研究 3 维空间拓扑特征的理论基础,而且与低维物理的拓扑性质有着深刻的联系.

Chern-Simons 规范场与其他场耦合可以得到各种(2+1)场论模型.研究 $U(1)$ Chern-Simons 规范场一类模型时,发现了自对偶 Chern-Simons 涡旋解.例如,将 Chern-Simons 理论与 Abelian-Higgs 模型相结合可得到磁通型的涡旋[10—12].将 Chern-Simons 理论与非线性薛定谔方程结合可得非相对论的 Jackiw-Pi 模型[13],Jackiw 和 Pi 在研究 Jackiw-Pi 模型时得到了一个静态的自对偶 Chern-Smons 涡旋解,满足刘维尔方程.但他们只得到了考虑了物质概率流密度 $\rho\neq 0$ 的情况.

本文运用 Duan 建立的 ϕ 映射拓扑流理论[14]研

* 中国科学院知识创新工程重点方向性项目(批准号:KJCX3.SYW. N2;KJCX2-SW-N16),国家自然科学基金(批准号:10435080,10575123)资助的课题.

† E-mail:xgl@impcas.ac.cn

究了 $\rho=0$，既涡旋中心位置的奇点性质，得到了自对偶解满足一个带有 δ 函数项的刘维尔方程,加入 δ 函数项后应不改变 $\rho\neq0$ 时的解的形式,但对刘维尔方程积分后 δ 函数项会给涡旋解一个约束,这就将自对偶解与涡旋奇点的拓扑性质联系起来了,从而得出一个完整的带有拓扑信息的涡旋解. 利用此涡旋解在全空间积分可得到涡旋的磁通是量子化的.

2.(2+1)维 Φ 映射拓扑流理论

近年来，人们发现在物理体系中存在两类守恒流，一类是 Notherl 流，它依懒于物理体系的作用量，另一类是拓扑守恒流，依懒于物理体系的拓扑性质，它是自然守恒的. 这节中将介绍低维平直时空的拓扑流理论.

设 $M\otimes R$ 是一个(2+1)维光滑流形,局域坐标为 $x^{\mu}(\mu=0,1,2)$ 其中 $x^0=t\varepsilon R$,标指时间变量. 考虑一个光滑映射 $\phi:M\otimes R\rightarrow R^2$,其中 R^2 是一个二维欧氏空间，可得一个 2 维光滑矢量场

$$\phi^a=\phi^a(\boldsymbol{x},t),a=1,2. \tag{1}$$

可以定义 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 的单位矢量场为

$$n^a=\frac{\phi^a}{\phi},\phi^2=|\boldsymbol{\phi}|^2=\phi^a\phi^a$$

(采用爱因斯坦求和规则,下同)，　(2)

显然满足约束条件

$$n^an^a=1. \tag{3}$$

此条件表明单位矢量场是由 $M\otimes R\rightarrow S^1$ 的一个映射. 用这个单位矢量可构造 M 流形上的一个守恒流

$$j^{\mu}(x)=\frac{1}{2\pi}\varepsilon^{\mu\mu_1\mu_2}\varepsilon_{a_1a_2}\partial_{\mu_1}n^{a_1}\partial_{\mu_2}n^{a_2}, \tag{4}$$

自然满足守恒条件

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0. \tag{5}$$

由于这个守恒流不是由 Lagrange 变分原理下的守恒量，所以称为拓扑流.

利用微分关系

$$\partial_{\mu}n^a=\frac{\delta^{ab}\phi^2-\phi^a\phi^b}{\phi^3}\partial_{\mu}\phi^b,$$

若定义雅可比为

$$\varepsilon^{a_1a_2}D^{\mu}\left(\frac{\phi}{x}\right)=\varepsilon^{\mu\mu_1\mu_2}\partial_{\mu_1}\phi^{a_1}\partial_{\mu_2}\phi^{a_2},$$

$$D^0\left(\frac{\phi}{x}\right)=D\left(\frac{\phi}{x}\right). \tag{6}$$

在 R^2 使用 $\boldsymbol{\phi}$ 场满足的拉普拉斯算子关系

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi^a\partial\phi^a}\ln(\phi)=2\pi\delta^2(\boldsymbol{\phi}),$$

拓扑流 $j^{\mu}(x)$ 可表示为如下形式[15]：

$$j^{\mu}=\delta^2(\boldsymbol{\phi})D^{\mu}\left(\frac{\phi}{x}\right). \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{\phi}$ 场有 m 个独立的零点，且它的第 i 个零点在 $\boldsymbol{x}=z_i$ 处，根据 δ 函数理论[16]有

$$\delta(\boldsymbol{\phi})=\sum_{i=1}^{m}\frac{\beta_i\delta(\boldsymbol{x}-z_i)}{|D(\phi/x)|_{\boldsymbol{x}=z_i}},$$

并且由 $\boldsymbol{\phi}(z_i(t),t)=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{D^{\mu}(\phi/x)}{D(\phi/x)}\bigg|_{\boldsymbol{x}=z_i}.$$

将上述两式代入(7)式得

$$j^{\mu}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i\delta(\boldsymbol{x}-z_i(t))\frac{\mathrm{d}z_i^{\mu}}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

其中

$$\eta_i=\frac{D(\phi/x)}{\|D(\phi/x)\|}=\pm1 \tag{9}$$

为 ϕ 映射的 Brouwer 度,而 β_i 是 ϕ 映射的 Hopf 指标,是一个正整数.

拓扑荷密度为

$$j^0=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i\delta^2(\boldsymbol{x}-z_i), \tag{10}$$

相应的拓扑荷为

$$Q=\int_M j^0\mathrm{d}^2(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}\beta_i\eta_i. \tag{11}$$

3. Jackiw-Pi 模型的自对偶方程

(2+1)维 $U(1)$ 规范场的 Chern-Simons 项一般可写为

$$L_{cs}=\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho}=\frac{k}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\lambda}A_{\mu}F_{\alpha\beta}, \tag{12}$$

与 $U(1)$ 电磁场理论相结合就可得到 Maxwell-Chern-Simons 规范理论,其拉氏量 $L_{mcs}=-\frac{1}{4e}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_{\mu}\partial_{\nu}A_{\rho}$,既可得到一个有质量的规范理论.本文采用(2+1)维的比约肯度规,并记 $x^{\mu}=(ct,\boldsymbol{r})$.

Jackiw-Pi 模型中的拉氏量为[13]

$$L=\frac{k}{4}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}A_{\mu}F_{\alpha\beta}+\mathrm{i}\hbar\psi^*\left(\partial_t+\frac{\mathrm{i}e}{\hbar}A^0\right)\psi$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}|D\psi|^2+\frac{g}{2}(\psi^*\psi)^2, \tag{13}$$

其中 $D\psi=\left(\nabla-\frac{\mathrm{i}e}{ch}\boldsymbol{A}\right)\psi$ 为协变微分，ψ 为物质场，

A_μ 是电磁势，$F_{\mu\nu}$ 是电磁场张量. 由(13)式变分可得运动方程分别为

$$\frac{k}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \frac{e}{c}J^\mu, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\partial_t\psi(t,r) = \Big\{ & -\frac{\hbar^2}{2m}\Big[\nabla - \frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\boldsymbol{A}(t,r)\Big]^2 \\ & + eA^0(t,r) - g\psi^*(t,r)\psi(t,r)\Big\} \\ & \times\psi(t,r), \end{aligned} \tag{15}$$

(14)式左边为 Chern-Simons 项的贡献，参数 k 的量纲为长度的倒数，标志着 Chern-Simons 项的强度，其中，J^μ 是物质流概率密度.

若进行以下规范变换

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \nabla\omega, A^0 \to A^0 + \frac{1}{c}\partial_t\omega,$$

相应 ψ 重新定义为

$$\psi \to \exp(-\mathrm{i}(e/\hbar c)\omega)\psi.$$

则(15)式在这种变换下不变，即(15)式是满足规范不变性的非线性薛定谔方程. 由(13)式得到 Jackiw-Pi 模型中的哈密顿量为

$$H = \int \mathrm{d}r\Big(\frac{\hbar^2}{2m}\mid D\psi\mid^2 - \frac{g}{2}(\psi^*\psi)^2\Big), \tag{16}$$

注意到

$$\begin{aligned} \mid D\psi\mid^2 = \mid(D_1 \pm \mathrm{i}D_2)\psi\mid^2 & \pm \frac{m}{\hbar}\nabla\times\boldsymbol{J} \\ & \pm \frac{e}{\hbar c}B\psi^*\psi, \end{aligned} \tag{17}$$

代入(16)式得

$$\begin{aligned} H = \int \mathrm{d}r\Big\{ & \frac{\hbar^2}{2m}\mid(D_1 \pm \mathrm{i}D_2)\psi\mid^2 \pm \frac{m}{\hbar}\nabla\times\boldsymbol{J} \\ & - \Big[\frac{g}{2} \pm \frac{e^2\hbar}{2mck}\Big](\psi^*\psi)^2\Big\}, \end{aligned} \tag{18}$$

令 $g = \mp\dfrac{e^2\hbar}{2mck}$ 及 $\int \mathrm{d}r\nabla\times\boldsymbol{J} = 0$，系统哈密顿量简化为

$$H = \frac{\hbar^2}{2m}\int \mathrm{d}r \mid(D_1 \pm \mathrm{i}D_2)\psi\mid^2. \tag{19}$$

使 H 取最小值，即 $H = 0$，可得 Jackiw-Pi 模型的自对偶方程

$$D_1\psi = \mp\mathrm{i}D_2\psi. \tag{20}$$

这就是系统存在孤子时，物质场和电磁势所满足的条件.

4. Jackiw-Pi 模型的一个完整的涡旋解

这节我们重点从(20)式出发讨论涡旋解的具体形式和磁通的量子化. 因为 ψ 为一复标量场，取 $\psi = \psi^1 + \mathrm{i}\psi^2$ 的形式，可以定义单位矢量场为

$$n^a = \frac{\psi^a}{\mid\psi\mid}, a = 1,2, \tag{21}$$

由(19)式可以解出电磁势的空间分量为

$$A^i = \frac{\hbar c}{e}\varepsilon^{ab}n^a\partial_i n^b \pm \frac{1}{2}\frac{\hbar c}{e}\varepsilon^{ij}\partial_j\ln\rho, \tag{22}$$

其中 $\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2$ 为概率密度，非负.

由(14)式的第零分量($\mu = 0$)可得磁场强度 B，

$$B = -\varepsilon^{ij}\partial_i A_j = \varepsilon^{ij}\partial_i A^j = -\frac{e}{k}\rho, \tag{23}$$

由(22)式和(23)式可得

$$-\varepsilon^{ij}\varepsilon^{ab}\partial_i n^a\partial_j n^b \pm \frac{1}{2}\nabla^2\ln\rho = \frac{e^2}{\hbar ck}\rho, \tag{24}$$

由(4)式，(7)式和(24)式可得

$$\nabla^2\ln\rho = \pm\frac{2e^2}{\hbar ck}\rho \pm 4\pi\delta^2(\boldsymbol{\psi})D(\psi/x). \tag{25}$$

(25)式就是 Jackiw-Pi 模型的自对偶解所应满足的方程. 当 $\rho\neq 0$ 时，(25)式简化为

$$\nabla^2\ln\rho = \pm\frac{2e^2}{\hbar ck}\rho, \tag{26}$$

(26)式由 Jackiw 与 Pi 得到[13]，称为刘维尔方程，其严格的辐射对称解为

$$\rho = \frac{4\hbar c\mid k\mid N^2}{e^2r_0^2}\frac{\Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^{2(N-1)}}{\Big(1 + \Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^{2N}\Big)^2}, \tag{27}$$

其中 r_0, N 是参数. 由于 $\rho\geqslant 0$，则(25)式只能是

$$\nabla^2\ln\rho = -\frac{2e^2}{\hbar c\mid k\mid}\rho - \frac{k}{\mid k\mid}4\pi\delta^2(\boldsymbol{\psi})D(\psi/x), \tag{28}$$

考虑到这个涡旋的中心对应 ψ 场的零点($m = 1$)在二维平面的原点处，并考虑到(10)式的在这种情况下的结果，(28)式可以重新写为

$$\nabla^2\ln\rho = -\frac{2e^2}{\hbar c\mid k\mid}\rho - \frac{k}{\mid k\mid}4\pi\beta\eta\delta^2(\boldsymbol{x}). \tag{29}$$

将(27)式代入(29)式，并积分可得

$$N - 1 = -\frac{k}{\mid k\mid}\beta\eta = -\frac{k}{\mid k\mid}Q, \tag{30}$$

(30)式表明 N 与拓扑荷相关，是一个整数，这与波函数的 ψ 单值性要求所得到结果一样[12]. 由(30)式与(27)式可得到一个与拓扑荷有关的解析解

$$\rho = \frac{4\hbar c\mid k\mid\Big(1 - \dfrac{k}{\mid k\mid}Q\Big)^2}{e^2r_0^2}\frac{\Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^{-2\frac{k}{|k|}Q}}{\Big(1 + \Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^{2\left(1-\frac{k}{|k|}Q\right)}\Big)^2}. \tag{31}$$

其实，拓扑荷 Q 局域拓扑性质是由涡旋的中心位置附近 ψ 场的拓扑指数 β,η 决定，而其整体性质是由 ψ 场的映射度决定[16].

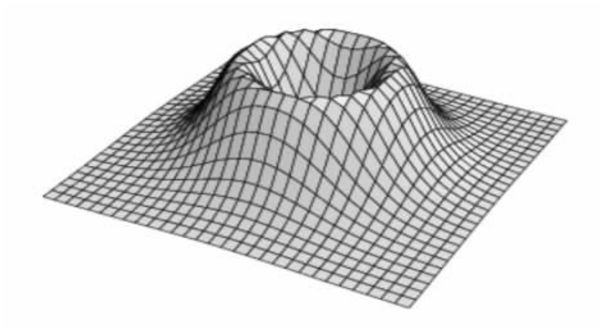

图 1　$N=2$ 时的严格辐射对称解

图 1 是 $Q=1(N=2)$ 时的辐射对称解，由图可以看出 ρ 的分布是一个辐射对称的涡旋. 将(31)式代入(23)式并积分，可得涡旋的磁通量为

$$\Phi = \iint_{\infty} \mathrm{d}rB = -4\pi k\left|\frac{N}{k}\right|\frac{\hbar c}{e}$$
$$= -\frac{2k\Phi_0}{|k|}\left|1-\frac{k}{|k|}Q\right|. \tag{32}$$

即由上述方法得到的涡旋解的磁通是量子化的，其中，Φ_0 是磁通量的最小单位. 由于 k 是常数，(32)式可简化为

$$\Phi = \pm 2\,|\,1\pm Q\,|\,\Phi_0, \tag{33}$$

其中，$Q=\pm 1,\pm 2,\cdots$，是由涡旋的拓扑指数 β,η 决定.

5. 结　论

(2+1)维 Jackiw-Pi 模型是描述 Chern-Simons 场与非相对论复标量场耦合的理论，是与传统 Maxwell 理论不同的规范理论. 由上述知，通过求其能量的极小值，可得到自对偶方程. 我们通过 ϕ 映射理论可研究场在奇点处的性质，而场在奇点处的性质往往反映着一个物理体系的拓扑性质，所以包含奇点的自对偶解自然的带有拓扑信息，我们通过对自对偶解在全空间的积分可以看出磁通是量子化的. 并可得到体系的磁通量与体系的拓扑荷之间的关系. 既物理体系的总磁通量是由其拓扑性质决定的，是个拓扑不变量. (2+1)维 Jackiw-Pi 模型中也可能存在多个涡旋解，但磁通量关系式(33)仍然成立.

[1] Xu Y，Jia D J，Li X G，Zuo W，Li F S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2831 (in Chinese)[徐　岩、贾多杰、李希国、左　维、李发伸 2004 物理学报 **53** 2831]

[2] Nielsen H B，Olesen P 1973 *Nucl. Phys.* B **61** 45

[3] Jia D J，Duan Y S，Li (Lee) X G 2001 *Phys. Lett.* A **289** 245
Li X G，Jia D J，Gao Y 2003 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **27** 12 (in Chinese)[李希国、贾多杰、高　远 2003 高能物理与核物理 **27** 12]

[4] Deser S，Jackiw R，Templeton S 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 975

[5] Chern S S，Simons 1974 *Ann. Math.* **99** 48

[6] Forte S 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 193

[7] Nayak C，Wilczek F 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4418

[8] Witten E 1989 *Commun. Math. Phys.* **121** 351

[9] Nash C 1991 *Differential Topology* and *Quantun Field Theory* (London：Academic Press Limited)

[10] Jackiw R and Weinberg E J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2234

[11] Jackiw R，Lee K，Weinberg E J 1990 *Phys. Rev.* D **42** 3488

[12] Jackiw R，Pi S Y 1990 *Phys. Rev.* D **42** 3500

[13] Jackiw R，Pi S Y 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2969

[14] Duan Y S 1984 SLAC-PUB-3301

[15] Duan Y S，Zhang H，Jia G 1999 *Phys. Lett.* A **253** 57

[16] Duan Y S，Lee X G 1995 *Helv. Phys. Acta* **68** 513

New vortex solutions of Jackiw-Pi model*

Li Yong-Qing[1)3)] Li Xi-Guo[1)2)†] Liu Zi-Yu[1)3)] Luo Pei-Yan[1)3)] Zhang Peng-Ming[1)2)]

1)(*Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou* 730000, *China*)

2)(*Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion AcceLerator of Lanzhou, Lanzhou* 730000, *China*)

3)(*Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*)

(Received 6 March 2007; revised manuscript received 19 March 2007)

Abstract

Based on current ϕ-mapping topological theory, a kind of self-dual equations in Jackiw-Pi model are studied. We first obtain explicit, self-dual solutions that satisfy Liouville equation which contains δ-function. Then we get perfect vortex solutions which reflect the system's internal topological structure, and consequently the quantization of flux.

Keywords: Chern-Simons theory, Jackiw-Pi model, vortex, flux quantization

PACC: 0300, 0356G

* Project supported by Chinese Academy of Sciences Knowledge Innovation (Grant Nos. KJCX3.SYW.N2 and KJCX2-SW-N16), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10435080, 10575123).

† E-mail: xgl@impcas.ac.cn