第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6188-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.11, November, 2007

事件空间中单面非 Chetaev 型非完整约束系统的 Mei 守恒量*

贾利群[1)†] 罗绍凯[2)] 张耀宇[3)]

1)(江南大学理学院,无锡 214122)

2)(浙江理工大学数学力学与数学物理研究所,杭州 310018)

3)(平顶山学院电气信息工程学院,平顶山 467002)

(2007 年 1 月 29 日收到;2007 年 2 月 28 日收到修改稿)

研究事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.建立系统的运动微分方程,给出系统 Mei 对称性、弱 Mei 对称性、强 Mei 对称性的定义和判据,得到系统 Mei 守恒量的存在条件以及 Mei 守恒量的表达式.举例说明结论的应用.

关键词:事件空间,单面约束,非完整系统,Mei 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

近年来,分析力学理论在对称性与守恒量的研究方面取得了一系列成就[1—22].对事件空间中完整力学系统的对称性与守恒量的研究,也取得了较大的进步.由 Noether 对称性利用 Noether 定理,可求得 Noether 守恒量,由 Lie 对称性通过 Noether 对称性,可找到 Noether 守恒量[23],由 Mei 对称性通过 Noether 对称性,也可找到 Noether 守恒量[24].文献[25]在事件空间中研究完整力学系统由特殊的 Lie 对称性、Noether 对称性和 Mei 对称性导致的 Hojman 守恒量.本文研究事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性和 Mei 守恒量,在参数 τ 不变时变量 x_α 的群的无限小变换下,定义了 Mei 对称性、弱 Mei 对称性和强 Mei 对称性,给出了 Mei 对称性的判据方程、限制方程和附加限制方程,得到了事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统 Mei 守恒量的存在条件和 Mei 守恒量的表达式.

2. 事件空间中单面非 Chetaev 型非完整系统的运动微分方程

假设理想单面非 Chetaev 型非完整约束下的力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 确定.建立由这 n 个广义坐标和时间 t 构成的 $(n+1)$ 维事件空间.引入记号 $x_1=t$, $x_{s+1}=q_s(s=1,\cdots,n)$,则所有的变量 $x_\alpha(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 可作为某参数 τ 的已知函数.令 $x_\alpha=x_\alpha(\tau)$ 是 C^2 类曲线,使得 $(n+1)$ 个变量 $\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=x'_\alpha(\alpha=1,\cdots,n+1)$ 不同时为零,有 $\dot{x}_\alpha=\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{x'_\alpha}{x'_1}(\alpha=1,\cdots,n+1)$.假设系统在位形空间中的 Lagrange 函数 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s)$,非势广义力 $Q_s=Q_s(t,q_s,\dot{q}_s)$,则事件空间中的 Lagrange 函数和非势广义力分别为

$$\Lambda(x_\alpha,x'_\alpha)=x'_1L\left(x_\alpha,\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right),\qquad(1)$$

$$P_1=-Q_sx'_{s+1}\quad(s=1,\cdots,n),$$

$$P_{s+1}=x'_1Q_s\left(x_\alpha,\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right)\quad(s=1,\cdots,n).\qquad(2)$$

(2)式和下文均采用 Einstein 求和约定.设系统在位形空间的运动受 g 个理想单面非 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,q_s,\dot{q}_s)\geqslant 0$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021)资助的课题.

† E-mail:jlq0@sina.com

$$(\beta = 1,\cdots,g;s = 1,\cdots,n), \tag{3}$$

在事件空间中方程(3)可表示为

$$F_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) \geqslant 0$$
$$(\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{4}$$

$$F_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) = f_\beta\left(x_1,\cdots,x_{n+1};\frac{x'_2}{x'_1},\cdots,\frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right). \tag{5}$$

方程(4)为事件空间中的理想单面非 Chetaev 型非完整约束.当方程(3)和方程(4)的左边函数值为正时,系统脱离约束;左边函数值为零时,系统处于约束上.当系统处于约束上时,设约束方程(4)加在事件空间中的虚位移 δx_α 上的限制条件为

$$F_{\beta\alpha}(x_\alpha, x'_\alpha)\delta x_\alpha = 0$$
$$(\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{6}$$

一般情况,$F_{\beta\alpha}$ 与 $\frac{\partial F_\beta}{\partial x'_\alpha}$ 无关,如果两者相等,则非 Chetaev 型非完整约束成为 Chetaev 型非完整约束.

引入 Lagrange 乘子 $\lambda_\beta(\beta = 1,\cdots,g)$,则事件空间中的理想单面非 Chetaev 型非完整系统的运动微分方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + \lambda_\beta F_{\beta\alpha}$$
$$(\alpha = 1,\cdots,n+1)\quad(\text{在约束上}),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha$$
$$(\alpha = 1,\cdots,n+1)\quad(\text{脱离约束}),$$
$$\lambda_\beta \geqslant 0, f_\beta \geqslant 0, \lambda_\beta f_\beta = 0. \tag{7}$$

令

$$\Gamma_\alpha = \lambda_\beta F_{\beta\alpha}(\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{8}$$

Γ_α 为事件空间中的广义非完整约束反力.引入事件空间中的 Euler 算子

$$\mathrm{E}_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\quad(\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{9}$$

则方程(7)可改写为

$$\mathrm{E}_\alpha(\Lambda) = P_\alpha + \Gamma_\alpha\quad(\alpha = 1,\cdots,n+1)\quad(\text{在约束上}),$$
$$\mathrm{E}_\alpha(\Lambda) = P_\alpha\quad(\alpha = 1,\cdots,n+1)\quad(\text{脱离约束}). \tag{10}$$

称方程(10)为与事件空间中理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)和(4))相应的完整系统的运动微分方程.显然,方程(10)的第一式或第二式的($n+1$)个方程不相互独立.假设可由方程(10)的第一式或第二式解出后面 n 个 x''_{s+1},记作

$$x''_{s+1} = A_s(x_\alpha, x'_\alpha, x''_1)$$
$$(s = 1,\cdots,n)\quad(\text{在约束上}),$$
$$x''_{s+1} = B_s(x_\alpha, x'_\alpha, x''_1)$$
$$(s = 1,\cdots,n)\quad(\text{脱离约束}). \tag{11}$$

3. Mei 对称性的定义

引进参数 τ 不变时变量 x_α 的群的无限小变换

$$\tau^* = \tau, x^*_\alpha(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \Delta x_\alpha$$
$$(\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{12}$$

或其展开式

$$\tau^* = \tau, x^*_\alpha(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \varepsilon\xi_\alpha(x_\beta, x'_\beta)$$
$$(\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{13}$$

式中 ε 为无限小参数,ξ_α 为无限小变换生成元.

设在经历无限小变换(13)后,事件空间中的 Λ,P_α,Γ_α 和 F_β 分别变为 Λ^*,P^*_α,Γ^*_α 和 F^*_β,将 Λ^*,P^*_α,Γ^*_α 和 F^*_β 在(x_α, x'_α)点沿系统运动轨道曲线作 Taylor 级数展开,有

$$\begin{aligned}
\Lambda^* &= \Lambda\left(x^*_\alpha, \frac{\mathrm{d}x^*_\alpha}{\mathrm{d}\tau^*}\right)\\
&= \Lambda(x_\alpha, x'_\alpha) + \varepsilon\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Lambda) + O(\varepsilon^2),\\
P^*_\alpha &= P_\alpha\left(x^*_\beta, \frac{\mathrm{d}x^*_\beta}{\mathrm{d}\tau^*}\right)\\
&= P_\alpha(x_\beta, x'_\beta) + \varepsilon\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(P_\alpha) + O(\varepsilon^2)\\
&\qquad(\alpha = 1,\cdots,n+1),\\
\Gamma^*_\alpha &= \Gamma_\alpha\left(x^*_\beta, \frac{\mathrm{d}x^*_\beta}{\mathrm{d}\tau^*}\right)\\
&= \Gamma_\alpha(x_\beta, x'_\beta) + \varepsilon\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Gamma_\alpha) + O(\varepsilon^2)\\
&\qquad(\alpha = 1,\cdots,n+1),\\
F^*_\beta &= F_\beta\left(x^*_\alpha, \frac{\mathrm{d}x^*_\alpha}{\mathrm{d}\tau^*}\right)\\
&= F_\beta(x_\alpha, x'_\alpha) + \varepsilon\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(F_\alpha) + O(\varepsilon^2)\\
&\qquad(\beta = 1,\cdots,g).
\end{aligned} \tag{14}$$

方程(14)中沿系统运动轨道曲线的无限小变换生成元向量的一次扩展 $\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}$ 为

$$\tilde{\mathrm{X}}^{(1)} = \xi_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}, \tag{15}$$

(15)式中对参数 τ 的全导数采用沿系统运动轨道曲线的方式,有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + x''_1\frac{\partial}{\partial x'_1} + A_s\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\quad(\text{在约束上}),$$
$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + x''_1\frac{\partial}{\partial x'_1} + B_s\frac{\partial}{\partial x'_{s+1}}\quad(\text{脱离约束}). \tag{16}$$

定义 1　如果用经无限小变换(13)变换后的动

力学函数 Λ^*，P_α^* 和 Γ_α^* 分别代替变换前的动力学函数 Λ，P_α 和 Γ_α，系统的运动微分方程(10)的形式保持不变，即

$$\mathrm{E}_\alpha(\Lambda^*) = P_\alpha^* + \Gamma_\alpha^* \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1)$$

(在约束上)，

$$\mathrm{E}_\alpha(\Lambda^*) = P_\alpha^* \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1)$$

(脱离约束)． (17)

则称这种对称性为与事件空间中理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))相应的完整系统的 Mei 对称性．

定义 2 如果用经无限小变换(13)变换后的动力学函数 Λ^*，P_α^*，Γ_α^* 和 F_β^* 分别代替变换前的动力学函数 Λ，P_α，Γ_α 和 F_β，系统的运动微分方程(10)和理想单面非 Chetaev 型非完整约束方程(4)的形式都保持不变，即

$$F_\beta^* = F_\beta\left(x_\alpha^*, \frac{\mathrm{d}x_\alpha^*}{\mathrm{d}\tau^*}\right) \geqslant 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g) \tag{18}$$

和方程(17)同时成立，则称这种对称性为理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))的弱 Mei 对称性．

容易证明，事件空间中的约束方程(4)加在虚位移 δx_α 上的条件(6)式可改写为

$$F_{\beta\alpha}\xi_\alpha = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g;\alpha = 1,\cdots,n+1). \tag{19}$$

定义 3 如果用经无限小变换(13)变换后的动力学函数 Λ^*，P_α^*，Γ_α^* 和 F_β^* 分别代替变换前的动力学函数 Λ，P_α，Γ_α 和 F_β，系统的运动微分方程(10)和理想单面非 Chetaev 型非完整约束方程(4)的形式都保持不变，并要求无限小变换生成元 ξ_α 满足方程(19)的限制，则称这种对称性为理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))的强 Mei 对称性．

4. Mei 对称性的判据

将方程(14)的前三个方程代入方程(17)，忽略 ε^2 及更高阶小项，并注意到方程(10)，可得

$$\mathrm{E}_\alpha[\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)$$

$(\alpha = 1,\cdots,n+1)$ (在约束上)，

$$\mathrm{E}_\alpha[\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(P_\alpha)$$

$(\alpha = 1,\cdots,n+1)$ (脱离约束)． (20)

由于方程(20)在利用 Euler 算子求动力学函数对参数 τ 的全导数是沿系统运动轨道曲线进行的，所以该方程中的 Euler 算子可由(9)式换为

$$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1,\cdots,n+1), \tag{21}$$

注意：由(16)式知，$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha$ 在系统处于约束上和脱离约束两种情况下并不相同．$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha$ 称为事件空间的广义 Euler 算子．因此，方程(20)可改写为

$$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha[\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)$$

$(\alpha = 1,\cdots,n+1)$ (在约束上)，

$$\tilde{\mathrm{E}}_\alpha[\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(P_\alpha)$$

$(\alpha = 1,\cdots,n+1)$ (脱离约束)． (22)

将方程(14)的第四个方程代入方程(18)，忽略 ε^2 及更高阶小项，并注意到方程(4)，可得

$$\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(F_\beta) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g)$$

(在约束上)，

$$F_\beta(x_\alpha, x_\alpha') + \varepsilon\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}(F_\alpha) > 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g)$$

(脱离约束)． (23)

于是，有如下判据：

判据 1 对与理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))相应的完整系统(方程(10))，如果变换方程(13)的无限小变换生成元 ξ_α 满足方程(22)，则相应的对称性为系统的 Mei 对称性．

称方程(22)为与理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))相应的完整系统(方程(10))的 Mei 对称性的判据方程．

判据 2 对理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))，如果变换方程(13)的无限小变换生成元 ξ_α 满足方程(22)和(23)，则相应的对称性为系统的弱 Mei 对称性．

方程(22)和(23)分别称为理想单面非 Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的判据方程和限制方程．

判据 3 对理想单面非 Chetaev 型非完整系统(方程(7)，(4))，如果变换方程(13)的无限小变换生成元 ξ_α 同时满足方程(19)，(22)和(23)，则相应的对称性为系统的强 Mei 对称性．

方程(19)称为理想单面非 Chetaev 型非完整系统 Mei 对称性的附加限制方程．

5. Mei 对称性导致的 Mei 守恒量

非奇异理想单面非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性可直接导致 Mei 守恒量，下述命题给出 Mei 守恒量的存在条件和 Mei 守恒量的表达式．

命题 1 如果非奇异理想单面非 Chetaev 型非完整系统 Mei 或弱 Mei 或强 Mei 对称性的生成元 ξ_α

和规范函数 $G_M = G_M(x_\alpha, x'_\alpha)$ 满足如下结构方程：

$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] + \tilde{X}^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)\xi_\alpha + \frac{\bar{d}}{dt}G_M = 0 \quad (\text{在约束上}),$$

$$\tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] + \tilde{X}^{(1)}(P_\alpha)\xi_\alpha + \frac{\bar{d}}{dt}G_M = 0 \quad (\text{脱离约束}), \tag{24}$$

则系统的三种 Mei 对称性导致的 Mei 守恒量均为

$$I_M = \frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha + G_M = \text{const}. \tag{25}$$

证明　将(25)式按(16)式的第一式对参数 τ 求导,并利用方程(24)的第一个方程和方程(22)的第一个方程,可得

$$\begin{aligned}\frac{\bar{d} I_M}{d\tau} &= \left[\frac{\bar{d}}{d\tau}\frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha}\right]\xi_\alpha + \frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha}\frac{\bar{d}\xi_\alpha}{d\tau} + \frac{\bar{d} G_M}{d\tau} \\ &= \tilde{X}^{(1)}[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] - \xi_\alpha\frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha} + \frac{\bar{d} G_M}{d\tau} + \xi_\alpha\frac{\bar{d}}{d\tau}\frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha} \\ &= \left[\frac{\bar{d}}{d\tau}\frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \tilde{X}^{(1)}(\Lambda)}{\partial x_\alpha} - \tilde{X}^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)\right]\xi_\alpha \\ &= \{\tilde{E}_\alpha[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] - \tilde{X}^{(1)}(P_\alpha + \Gamma_\alpha)\}\xi_\alpha = 0.\end{aligned}$$

这样便证明了系统在约束上时的情况.同理,将(25)式按(16)式第二式对参数 τ 求导,并利用方程(24)的第二个方程和方程(22)的第二个方程,即可证明系统脱离约束时的情况.

6. 算　例

在事件空间中,系统的 Lagrange 函数、非势广义力、约束方程以及约束加在虚位移上的限制条件分别为

$$\Lambda = \frac{1}{2}[(x'_2)^2 + (x'_3)^2 - x_2 + x_3], \tag{26}$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = 0, \tag{27}$$

$$F = x'_3 - x_1 x'_2 \geqslant 0, \tag{28}$$

$$\delta x_2 - \delta x_3 = 0. \tag{29}$$

试研究系统的 Mei 对称性和 Mei 守恒量.

(6)式展开后和(29)式比较可得

$$F_{11} = 0, F_{12} = 1, F_{13} = -1. \tag{30}$$

利用(30)式,由方程(7)的第一个方程可得

$$x''_2 + 1 = \lambda_1 F_{12} = \lambda_1 \quad (\text{在约束上}),$$

$$x''_3 - 1 = \lambda_1 F_{13} = -\lambda_1 \quad (\text{在约束上}), \tag{31}$$

由方程(7)的第二个方程可得

$$x_2 = -1, x_3 = 1 \quad (\text{脱离约束}). \tag{32}$$

当系统处于约束上时,由方程(28),(31)和(8)式可得

$$\Gamma_1 = \lambda_1 F_{11} = 0 \quad (\text{在约束上}),$$

$$\Gamma_2 = \lambda_1 F_{12} = \lambda_1 = -\frac{x'_1 x'_2 - 2}{1 + x_1} \quad (\text{在约束上}),$$

$$\Gamma_3 = \lambda_1 F_{13} = -\lambda_1 = \frac{x'_1 x'_2 - 2}{1 + x_1} \quad (\text{在约束上}). \tag{33}$$

(33)式的第二式代入方程(31),并注意到方程(11)的第一个方程,得

$$x''_2 = -\left(1 + \frac{x'_1 x'_2 - 2}{1 + x_1}\right) = A_1 \quad (\text{在约束上}),$$

$$x''_3 = 1 + \frac{x'_1 x'_2 - 2}{1 + x_1} = A_2 \quad (\text{在约束上}). \tag{34}$$

由方程(32)和方程(11) 的第二式,得

$$x''_2 = -1 = B_1, x''_3 = 1 = B_2 \quad (\text{脱离约束}). \tag{35}$$

取无限小变换生成元为

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = x'_2 + x'_3, \xi_3 = 0, \tag{36}$$

当系统处于约束上时,利用(15),(16),(21)和(36)式容易算得

$$\frac{\bar{d}}{d\tau}\xi_2 = 0,$$

$$\tilde{X}^{(1)}(\Lambda) = -\frac{1}{2}(x'_2 + x'_3),$$

$$\tilde{E}_1[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{E}_2[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] = \tilde{E}_3[\tilde{X}^{(1)}(\Lambda)] = 0,$$

$$\tilde{X}^{(1)}(F) = 0,$$

$$\tilde{X}^{(1)}(\Gamma_1) = \tilde{X}^{(1)}(\Gamma_2) = \tilde{X}^{(1)}(\Gamma_3) = 0. \tag{37}$$

注意 :当系统脱离约束时,同样的方法可证明(37)式的前四式依然成立.

利用(37)式容易验证判据方程(22)和限制方程(23)成立.将(30)式和(36)式代入方程(19)可知,附加限制方程(19)不成立.故由判据 1 和判据 2 知,(36)式表述的无限小变换生成元即是所求系统的 Mei 对称性也是弱 Mei 对称性的无限小变换生成元.因此,系统即具有 Mei 对称性,也具有弱 Mei 对称性.由结构方程(24)的两个方程均可得

$$G_M = 0. \tag{38}$$

利用(25)式可得系统的 Mei 和弱 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量为

$$I_M = -\frac{1}{2}(x'_2 + x'_3) = \text{const}. \tag{39}$$

7. 结 论

本文采用沿系统运动轨道曲线求函数对参量 τ 全导数的方法，给出事件空间中理想单面非 Chetaev 型非完整系统 Mei、弱 Mei 和强 Mei 对称性的定义及判据.采用上述求全导数的方法，有助于得到更多的 Mei 对称性的无限小变换生成元，但能否由此得到新的非平凡的 Mei 守恒量，还尚待研究.本文还研究了 Mei 守恒量，得到了事件空间中理想单面非 Chetaev 型非完整系统由三种 Mei 对称性直接导致的 Mei 守恒量的存在条件以及守恒量的表达式，主要结论是判据 1、判据 2、判据 3 和命题 1.

从(7)，(10)，(14)，(17)，(22)和(24)等方程可看出，如果事件空间中的非势广义力 $P_\alpha = 0$，本文的结论则退化为事件空间中理想单面非 Chetaev 型非完整保守系统的 Mei 对称性结论 如果事件空间中的广义非完整约束反力 $\Gamma_\alpha = 0$，则退化为事件空间中完整非保守系统的 Mei 对称性结论 如果 $P_\alpha = \Gamma_\alpha = 0$，则退化为事件空间中完整保守系统的 Mei 对称性结论 ;如果 $F_{\beta\alpha} = \partial F_\beta / \partial x'_\alpha$，则退化为事件空间中理想单面 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性结论.因此，本文的结论具有普遍意义.

[1] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207 (in Chinese)[梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[2] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901(in Chinese)[梅凤翔、尚 玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[3] QiaoY F, Zhao S H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1(in Chinese)[乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]

[4] Li Y C, Zhang Y, Liang J H, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 376

[5] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[6] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 765

[7] Xu Z X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2423 (in Chinese)[许志新 2002 物理学报 **51** 2423]

[8] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 841

[9] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 936

[10] Gu S L, Zhang H B 2004 *Chin. Phys.* **13** 979

[11] Mei F X, Xu X J 2005 *Chin. Phys.* **14** 449

[12] Luo S K, Cai J L, Jia L Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 656

[13] Fu J Li, Chen L Q, Chen X W 2006 *Chin. Phys.* **15** 8

[14] Fang J H, Liao Y P, Ding N, Wang P 2006 *Chin. Phys.* **15** 2792

[15] Wu H B, Mei F X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3825(in Chinese) [吴惠彬、梅凤翔 2006 物理学报 **55** 3825]

[16] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829 (in Chinese) [贾利群、郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]

[17] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399

[18] Zhang Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 1935

[19] Ge W K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1 (in Chinese)[葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]

[20] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 649 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、郑世旺 2007 物理学报 **56** 649]

[21] Zheng S W, Jia L Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 661 (in Chinese) [郑世旺、贾利群 2007 物理学报 **56** 661]

[22] Jia L Q, Zhang Y Y, Luo S K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3165

[23] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[24] Mei F X 2003 *J. Jiangxi Normal Univ.* **27** 1(in Chinese)[梅凤翔 2003 江西师范大学学报 **27** 1]

[25] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1009 (in Chinese) [许学军、梅凤翔、秦茂昌 2005 物理学报 **54** 1009]

Mei conserved quantities for systems with unilateral non-Chetaev nonholonomic constraints in the event space*

Jia Li-Qun[1)†]　Luo Shao-Kai[2)]　Zhang Yao-Yu[3)]

1)(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

2)(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

3)(*Electric and Information Engineering College, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China*)

(Received 29 January 2007; revised manuscript received 28 February 2007)

Abstract

Mei symmetry and Mei conserved quantity for a system with unilateral non-Chetaev nonholonomic constraints in the event space are studied. The differential equations of motion of the system are established. The definition and the criteria of Mei symmetry, weakly Mei symmetry, strongly Mei symmetry for the system are given in this paper. The existence condition and the expression of Mei conserved quantity are deduced directly from Mei symmetry. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: event space, unilateral constraint, nonholonomic system, Mei conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021).

† E-mail: jlq0@sina.com