第 56 卷 第 11 期 2007 年 11 月
1000-3290/2007/56(11)/6194-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.11, November, 2007

相对转动非线性动力学方程的稳定性及在一类非线性弹性系数下的解*

孟 宗† 刘 彬

(燕山大学电气工程学院,秦皇岛 066004)

(2007 年 2 月 19 日收到;2007 年 3 月 16 日收到修改稿)

建立一类含非线性弹性力的二端面转轴相对转动非线性动力学方程.对相对转动非线性自治方程进行定性分析,研究方程的稳定性.用参数变换法求得相对转动非线性非自治方程在强迫激励下的高次近似解.

关键词:相对转动,非线性动力学方程,非线性弹性系数,稳定性

PACC:0340D,0313,0320

1. 引 言

在研究转动运动和转动力学过程中,Bengtsson 和 Frauendorf[1] 通过对 14 种核子的自旋转速的测量,发现各核子的自旋转速均有一最大值,且各不相同,为了解释这一实验现象,Carmeli[2,3] 提出了转动相对论力学的理论,罗绍凯[4—6] 提出了转动系统的相对论性分析力学理论,并构造出转动相对论的 Hamilton 系统的积分变量,转动相对论理论的研究日趋活跃并受到学术界的广泛重视.近年来相对论分析力学和转动相对论分析力学的研究发展了相对论力学[7—9].转动相对论在 Birkhoff 系统动力学基本理论、通用性积分复杂动力学方程问题、对称性理论、积分的场理论、代数结构、几何结构、非完整系统的对称性与守恒量等研究领域取得了成果[10—36].基于相对性原理,建立了圆柱体任意两截面间的相对转动动力学方程并进行了定性和定量分析[37—42].

相对转动系统包含许多非线性因素,一些常见的现象(如失稳性、分岔、混沌等),应用线性模型无法分析与描述.本文基于分析力学中具有耗散项的广义 Lagrange 方程,建立了非线性相对转动动力学方程,研究了一类含非线性弹性力的相对转动自治系统的稳定性,给出了含非线性弹性力的相对转动非自治系统的近似解.

2. 非线性相对转动动力学方程

对于圆柱体弹性转轴相对转动系统,设 J 为圆柱体任意两个横截面的转动惯量,K 为扭转刚度,φ_1 和 φ_2 分别为两个横截面的转角,T_1 和 T_2 分别为两个横截面的外加力矩.

类似于文献[37]的推导过程,二端面转轴相对转动系统的动能为

$$E = \frac{1}{6}J(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2). \tag{1}$$

系统的势能 U 为

$$U = \frac{1}{2}K(\varphi_2 - \varphi_1)^2. \tag{2}$$

与文献[37]中不同,在系统中取非线性阻尼力形式,即阻尼力为相对转速差的任意函数形式,表示为

$$T_1^{c} = -g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \tag{3}$$

$$T_2^{c} = g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \tag{4}$$

其中 $g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$ 为相对转速差的任意函数.

将(3)和(4)式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(T_i^{(j)} - J_i\ddot{\varphi}_i)\cdot\delta\varphi_i = 0, \tag{5}$$

其中 $T_i^{(j)} = T_i + T_i^{c}$,则(5)式的第一项为

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^{(j)}\cdot\delta\varphi_i = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} T_i^{(j)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_r}\right)\cdot\delta q_r, \tag{6}$$

* 国家十五重大科技攻关项目(批准号:ZZ02-13B-02-03-1)资助的课题.

† E-mail:mzysu@ysu.edu.cn

其中 $q_r(r=1,2)$ 为广义坐标,n 为自由度数目,s 为作用力数目.广义力(广义力矩)为

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} T_i^{(j)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} \quad (r=1,2). \tag{7}$$

将(3),(4)式代入(7)式得本系统的广义力(广义力矩)为

$$Q_1 = (T_1 + T_1^{c}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_1} + (T_2 + T_2^{c}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1}$$
$$= T_1 + T_1^{c} = T_1 - g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \tag{8}$$

$$Q_2 = (T_1 + T_1^{c}) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} + (T_2 + T_2^{c}) \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_2}$$
$$= T_2 + T_2^{c} = T_2 + g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2). \tag{9}$$

将(8),(9)式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial E}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (r=1,2), \tag{10}$$

得

$$\frac{1}{3}J\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{6}J\ddot{\varphi}_2 + g(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$$
$$+ K(\varphi_1 - \varphi_2) = T_1, \tag{11}$$

$$\frac{1}{3}J\ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{6}J\ddot{\varphi}_1 - g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$
$$- K(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2. \tag{12}$$

对于相对转动动力系统,在工程中最关心相对转角的变化,(11)式减去(12)式得

$$\frac{1}{6}J(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + 2g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$
$$+ 2K(\varphi_1 - \varphi_2) = T_1 - T_2, \tag{13}$$

(13)式变形得

$$(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + \frac{12}{J}g(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$
$$+ \frac{12K}{J}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{6}{J}(T_1 - T_2). \tag{14}$$

在(14)式中,令

$$x = \varphi_1 - \varphi_2,$$
$$\frac{12K}{J} = \omega_0^2,$$
$$\frac{12}{J} = \beta,$$
$$\frac{6}{J}(T_1 - T_2) = f(t),$$

得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta g(\dot{x}) = f(t), \tag{15}$$

式中 $g(\dot{x})$ 表示广义非线性阻尼力,为相对转速 $\dot{x}$ 的任意函数,$f(t)$ 为外干扰力或称为外激励.

(15)式是描述二端面转轴相对转动的非线性动力学方程,是工程中描述转动动力传输性态的基本方程,为进一步确定转动系统的动力学特性奠定了基础,有必要对此方程进行定性与定量分析.

3. 非线性相对转动自治方程定性分析

在(15)式中,考虑实际工程物理结构存在非线性弹性力,研究非线性相对转动系统的稳定性.

令

$$\beta g(\dot{x}) = c\dot{x} + bx^3, \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式,得二端面转轴相对转动系统的非线性动力学方程的非自治方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + c\dot{x} + bx^3 = f(t). \tag{17}$$

取 $f(t)=0$,得二端面转轴相对转动系统的非线性动力学方程的自治方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + c\dot{x} + bx^3 = 0. \tag{18}$$

(18)式的等价形式为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x - cy - bx^3. \end{aligned} \tag{19}$$

定理 1　(i)当 $c>0$ 时,方程(19)的零解是稳定的;(ii)当 $c>0$,$b>0$ 时,零解是渐近稳定的.

证明　显然奇点 $O(0,0)$ 是方程(19)的唯一平衡点.

构造李雅普诺夫函数

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(\omega_0^2 x^2 + y^2),$$

$V(x,y)$ 为正定函数,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = \omega_0^2 x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= \omega_0^2 xy + y(-\omega_0^2 x - cy - bx^3) \\ &= -cy^2 - bx^3 y. \end{aligned}$$

由于 $-bx^3y$ 为高次项,不影响函数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 作为常负函数(或常正函数),当 $c>0$ 时,函数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 是常负的,所以零解稳定.

$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 只在 x 轴上发生,但是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2 x - cy - bx^3,$$

在 x 轴上(不包括原点),当 $b>0$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2 x - bx^3 = -x(\omega_0^2 + bx^2) \neq 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0,$$

所以零解是渐近稳定的.

定理 2 当 $0<c<2\omega_0$ 时,奇点 $O(0,0)$ 为方程(19)的稳定焦点.

证明 方程(19)写成如下形式:

$$\dot{x}=a_{11}x+a_{12}y+\delta_1(x,y),$$
$$\dot{y}=a_{21}x+a_{22}y+\delta_2(x,y),$$

其中 δ_1 和 δ_2 表示 x 和 y 的二次以上的项.

方程(18)关于 x 和 y 的雅可比矩阵 A 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -c\end{bmatrix}.$$

矩阵 A 的本征值决定奇点的类型,将 A 的本征方程展开,得

$$|\boldsymbol{A}-\lambda E|=\lambda^2+c\lambda+\omega_0^2=0. \tag{20}$$

方程(19)的本征值为

$$\lambda_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4\omega_0^2}}{2}. \tag{21}$$

当 $0<c<2\omega_0$ 时,$\lambda_{1,2}$ 为具有负实部的共轭复根,奇点 $O(0,0)$ 为方程(19)的稳定焦点.

4. 非自治方程在强迫激励下的近似解

相对转动系统的非线性动力学方程的非自治方程(17)中,设 $f(t)$ 为外加强迫激励,设 $f(t)=F\cos\omega t=\omega A\cos\omega t$,对非线性项冠以小参数 ε,(17)式化为

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\varepsilon c\dot{x}+\varepsilon bx^3=\varepsilon A\cos\omega t. \tag{22}$$

令 $\tau=\omega t$,将上式代入(22)式,得

$$\omega^2x''+\omega_0^2x+\varepsilon c\omega x'+\varepsilon bx^3=\varepsilon A\cos\tau, \tag{23}$$

其中“ ′ ”表示对 τ 求导.

将 x 和 ω 展开成幂级数

$$x=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2x_2(\tau)+\cdots, \tag{24}$$
$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots, \tag{25}$$

将(24)和(25)式代入(23)式,令方程左右两端 ε 同次幂的系数相等,得

$$\begin{aligned}&x_0''+x_0=0\\ &\omega_0^2x_1''+\omega_0^2x_1=-2\omega_0\omega_1x_0''-c\omega_0x_0'\\ &\qquad -bx_0^3+A\cos\tau,\\ &\omega_0^2x_2''+\omega_0^2x_2=-(2\omega_0\omega_2+\omega_1^2)x_0''-2\omega_0\omega_1x_1''\\ &\qquad +c(\omega_0x_1'+\omega_1x_0')+3bx_0^2x_1,\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{26}$$

(26)式第一方程的通解为

$$x_0(\tau)=a\cos(\tau+\theta). \tag{27}$$

将(27)式代入(26)式第二方程得

$$\begin{aligned}&\omega_0^2x_1''+\omega_0^2x_1\\ &=c\omega_0a\sin(\tau+\theta)-ba^3\cos^3(\tau+\theta)\\ &\quad+2\omega_0\omega_1a\cos(\tau+\theta)+A\cos\tau\\ &=(c\omega_0a+A\sin\theta)\sin(\tau+\theta)\\ &\quad+\left(2\omega_0\omega_1a-\frac{3}{4}ba^3+A\cos\theta\right)\cos(\tau+\theta)\\ &\quad-\frac{1}{4}ba^3\cos(3\tau+3\theta),\end{aligned} \tag{28}$$

消去久期项,令

$$c\omega_0a+A\sin\theta=0, \tag{29}$$

$$2\omega_0\omega_1a-\frac{3}{4}ba^3+A\cos\theta=0, \tag{30}$$

通过(29)式和(30)式消去未知量 θ,得

$$\left[c^2+\left(2\omega_1-\frac{3}{4}\frac{b}{\omega_0}a^2\right)^2\right]a^2=\frac{A^2}{\omega_0^2}, \tag{31}$$

解得

$$\theta=\arcsin\left(-\frac{c\omega_0a}{A}\right), \tag{32}$$

$$\omega_1=\frac{3}{8}\frac{b}{\omega_0}a^2\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A^2}{\omega^2}-c^2}. \tag{33}$$

(26)式第二方程的通解为

$$x_1(\tau)=a_1\cos(\tau+\theta). \tag{34}$$

同理,将(27)式和(34)式代入(26)式第三方程可求得第三方程的通解 $x_2(\tau)$,依此类推,根据精度要求,可求出满足所需精度的高次近似解.

5. 结 论

本文建立了一类含非线性弹性力的二端面转轴相对转动的非线性动力学方程,分析了自治系统的稳定性,证明了在一定条件下奇点 $O(0,0)$ 是稳定焦点.用参数变换法求得相对转动非自治系统在强迫激励下的高次近似解.

[1] Bengtsson R，Frauendorf S 1979 *Nucl*. *Phys*. A **327** 139
[2] Carmeli M 1985 *Found*. *Phys*. **15** 175
[3] Carmeli M 1986 *Inter*. *J*. *Theor*. *Phys*. **25** 89
[4] Luo S K 1996 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **16**(S1) 154(in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
[5] Luo S K 1996 *Appl*. *Math*. *Mech*. **17** 683
[6] Luo S K 1998 *Appl*. *Math*. *Mech*. **19** 45
[7] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 712(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[8] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1416(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[9] Jia L Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1043(in Chinese)[贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]
[10] Luo S K，Fu J L，Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 383(in Chinese)[罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
[11] Luo S K，Guo Y X，Chen X W，Fu J L 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2049(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]
[12] Luo S K，Guo Y X，Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2053(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
[13] Fu J L，Chen X W，Luo S K 1999 *Appl*. *Math*. *Mech*. **20** 1266
[14] Fu J L，Chen X W ，Luo S K 2000 *Appl*. *Math*. *Mech*. **21** 549
[15] Fang J H 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1028(in Chinese)[方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
[16] Fang J H，Zhao S Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 390(in Chinese)[方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
[17] Fang J H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1001(in Chinese)[方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
[18] Luo S K，Chen X W，Fu J L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 271
[19] Luo S K，Chen X W，Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 429
[20] Luo S K，Chen X W，Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 523
[21] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 449
[22] Luo S K，Lu Y B，Zhou Q，Wang Y D，Ouyang S 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1913(in Chinese)[罗绍凯、卢一兵、周 强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]
[23] Fu J L，Chen L Q，Luo S K，Chen X W，Wang X M 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2289(in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]
[24] Fu J L，Chen L Q，Xue Y，Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2683 (in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛 纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]
[25] Fu J L，Chen L Q，Xue Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 256(in Chinese)[傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
[26] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 712(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[27] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1416(in Chinese)[罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[28] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941(in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[29] Luo S K，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 666(in Chinese)[罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
[30] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1271(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]
[31] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413(in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]
[32] Luo S K 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 5(in Chinese)[罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
[33] Luo S K 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 140
[34] Luo S K，Jia L Q，Cai J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 841
[35] Luo S K，Huang F J，Lu Y B 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 2182
[36] Luo S K，Cai J L，Jia L Q 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 656
[37] Dong Q L，Liu B 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2191(in Chinese)[董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[38] Dong Q L，Wang K，Zhang C X，Liu B 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 337(in Chinese)[董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]
[39] Zhao W，Liu B 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4543(in Chinese)[赵 武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
[40] Wang K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3987(in Chinese)[王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]
[41] Wang K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5530(in Chinese)[王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]
[42] Zhao W，Liu B，Shi P M，Jiang J S 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3852 (in Chinese)[赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]

Stability of relativistic rotational nonlinear dynamic equation and solution for a kind of nonlinear elastic coefficients*

Meng Zong† Liu Bin

(*Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 19 February 2007; revised manuscript received 16 March 2007)

Abstract

The nonlinear dynamic equation with two end faces in relativistic rotation is established, which contains a kind of nonlinear elastic force. The qualitative analysis of the relativistic rotational nonlinear autonomous equation is performed, and the stability of the equation is studied. The high-order approximate solution of the equation under forcing excitation is obtained by parameter transformation method.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamics equation, nonlinear elastic coefficient, steadiness

PACC: 0340D, 0313, 0320

* Project supported by the National Significant Tackle Key Problems for 10th 5- year Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

† E-mail: mzysu@ysu.edu.cn