

非对易时空下 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的热力学性质^{*}

周史薇 刘文彪[†]

(北京师范大学物理学系, 北京师范大学理论物理研究所, 北京 100875)

(2007 年 2 月 8 日收到, 2007 年 4 月 9 日收到修改稿)

以 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞为例, 研究空间的非对易性对黑洞热力学性质的影响. 通过对比对易时空中 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和非对易时空中 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的温度, 得出如下结论: 从对黑洞热力学性质产生影响这一角度来说, 时空的非对易性和黑洞的荷(电荷或磁荷)有相似的作用.

关键词: Gibbons-Maeda dilaton 黑洞, Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞, 非对易时空, 量子视界

PACC: 9760L, 0420

1. 引 言

上世纪 70 年代黑洞无毛定理和黑洞热力学四定律^[1]的发现, 标志着经典黑洞热力学体系的基本建立. 然而, 考虑到量子效应仍面临着许多疑难, 如 Hawking 辐射会造成信息丢失的问题, 以及量子理论么正性的破坏. 此外, 关于黑洞熵的统计起源问题, 也一直没能找到一个彻底成功的解决办法. Hawking 辐射和黑洞熵, 是与引力场量子化密切联系的 2 个物理概念. 对这 2 个问题的解决目前已有了一些可行的办法, 如对 Hawking 辐射的研究, 有 Parikh 的量子隧穿法^[2]及随后的一些推广^[3-5], 对黑洞熵的计算, 文献^[6-8]给出了一些有效的办法. 目前, 尽管引力理论和量子理论的协调还面临着巨大的挑战, 仍没有一个彻底成功的量子引力理论, 但是用半经典的办法研究黑洞热力学的量子修正有可能为量子引力理论的最终形成提供有价值的借鉴和参考. 因此, 有关经典黑洞热力学性质的量子修正近年来被人们广泛关注和研究^[9-15], 其中一些可行的方案有

广义不确定原理(generalized uncertainty principle, GUP), 修正的色散关系(modified dispersion relations, MDR), 非对易几何(noncommutative geometry, NCG) 和非对易量子场论(noncommutative quantum field theory, NQFT) 等. Nasserri 等^[16, 17]假设空间是非对易的, 并且认为非对易因子是个小量, 因此可将其看成对易空间的微扰. 进而利用非对易几何^[18]定义了满足非对易关系的空间坐标算符, 计算了 Schwarzschild 黑洞的事件视界. 研究表明, 空间非对易引起的对视界修正的大小与非对易因子有关, 非对易空间的视界小于通常对易空间的视界, 而且非对易因子 θ 的一次幂项对结果并无影响, θ 的二次幂项才起作用. 同时, 由于假定非对易因子沿某一方向取值, 即特殊的坐标系使非对易因子 θ 沿某一坐标轴分量不为零而其他均为零, 这样就有了一个特殊的方向, 破坏了原来时空的球对称性. 此外, 还给出了非对易因子 θ 的最小取值 ($\theta \geq 4.35 l_{pl}^2$), 考虑到 θ 的量纲是长度的平方, 得出量子效应起作用的尺度是 Planck 距离, 这和其它方法得到的结论是一致的. 在文献^[19]中, 考虑空间非对易和广义不确定关系的影响, 计算了

^{*} 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2003CB716302)资助的课题.

[†] E-mail: wbliu@bnu.edu.cn

Reissner-Nordström 黑洞的视界,并在此基础上得到了温度和熵的表达式.同时,利用众所周知的 Reissner-Nordström 黑洞与 Schwarzschild 黑洞的关系,当电荷 Q 为零时 Reissner-Nordström 黑洞退化成为 Schwarzschild 黑洞,可以得到非对易空间 Schwarzschild 黑洞的温度及熵.结果发现对易空间 Reissner-Nordström 黑洞与非对易空间 Schwarzschild 黑洞热力学性质具有相似性,空间非对易性和电荷对黑洞的热力学性质产生相似的影响.

本文将利用非对易几何采用类似文献 [19] 的方法研究经典黑洞热力学的量子修正.通过对比对易时空中的 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和非对易时空中的 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的温度 [20-24] 我们得到如下结论:从对黑洞热力学性质产生影响这一角度来说,时空的非对易性和黑洞的荷(电荷或磁荷)有相似的作用.

当时空中既存在 dilaton 场又存在电磁场时,由弦理论得到四维低能有效理论的 Lagrange 函数,将其变分可得到动力学场的运动方程, Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞就是场方程的 2 个解.这 2 种黑洞之间有一定的联系, Gibbons-Maeda dilaton 黑洞既带有引力质量,又带有磁荷和电荷,且三者相互耦合;当磁荷 P 为零时, Gibbons-Maeda dilaton 黑洞就退化成 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞.为使表达式简洁,本文均采用自然单位制 $c = G = \hbar = 1$.

2. 对易时空中 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞热力学

Gibbons-Maeda dilaton 时空线元

$$ds^2 = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 - D^2} dt^2 - \frac{r^2 - D^2}{(r - r_+)(r - r_-)} dr^2 - (r^2 - D^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (1)$$

其中 $D = \frac{P^2 - Q^2}{2M}$, D 是轴向 dilaton 荷; P, Q 分别是磁荷和电荷.此黑洞包含内外 2 个视界,分别为

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 + D^2 - P^2 - Q^2}.$$

此黑洞外视界的温度 T_{GM} 为 [15]

$$T_{GM} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 - D^2)}. \quad (2)$$

当 $P = 0$ 时, (1) 式退化成 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 时空线元

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r - D}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r - D}\right)^{-1} dr^2 - (r^2 - D^2)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (3)$$

黑洞外视界为 $r_h = 2M + D$, 此视界上的温度为

$$T_{GHS} = \frac{M}{2\pi(r_h - D)}. \quad (4)$$

3. 空间非对易性对黑洞视界的影响

在非对易时空中,坐标算符 \hat{x} 满足 [18, 19]

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu},$$

其中 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, \hat{x}_0 是时间坐标算符, $\hat{x}_i (i = 1, 2, 3)$ 是空间坐标算符, $\theta_{\mu\nu}$ 是时空非对易因子.由于 θ_{0i} 不为零(时间坐标算符与空间坐标算符不对易)时会导致理论失去么正性,因此我们只考虑空间坐标算符之间的非对易性而不考虑时间与空间坐标算符的非对易性,即

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

其中 θ_{ij} 是二阶反对称的常量,其量纲是长度的平方,它类似 Plank 常数 \hbar , 是标志空间非对易性的因子.由于我们在研究中将空间的非对易性看成是对易情况的微扰,因此 θ_{ij} 可看作很小的实张量.

非对易空间的正则对易关系变为

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (6)$$

选取新坐标

$$x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j, \quad p_i = \hat{p}_i, \quad (7)$$

则新坐标满足通常的正则对易关系

$$[x_i, x_j] = 0, [x_i, p_j] = i\delta_{ij}, [p_i, p_j] = 0. \quad (8)$$

非对易空间 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞视界满足

$$\frac{(\sqrt{\hat{r}\hat{r}} - r_+)(\sqrt{\hat{r}\hat{r}} - r_-)}{\hat{r}\hat{r} - D^2} = 0, \quad (9)$$

其中 \hat{r} 满足 (7) 式,进行坐标变换将 \hat{x}_i 变换为 x_i 并化简可以得到视界方程

$$1 - \frac{2M}{\sqrt{\left(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j\right)\left(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ik}p_k\right)} + D} + \frac{2Q^2}{\left(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j\right)\left(x_i - \frac{1}{2}\theta_{ik}p_k\right) - D^2} = 0. \quad (10)$$

考虑到 θ_{ij} 很小,将 (10) 式作 Taylor 展开略去 θ

的四次及以上幂次项,得

$$1 - \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{\theta_{ij}x_i p_j}{2r^2} - \frac{1}{8} \frac{\theta_{ij}\theta_{ik}p_j p_k}{r^2} - \frac{D}{r} \right) + \frac{2Q^2}{r^2} \left(1 + \frac{\theta_{ij}x_i p_j}{r^2} - \frac{\theta_{ij}\theta_{ik}p_j p_k}{4r^2} + \frac{D^2}{r^2} \right) = 0. \quad (11)$$

若令 $\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k$, $L_k = \epsilon_{ijk} x_i p_j$, 并选取合适的坐标轴或做空间转动, 可使 $\theta_1 = \theta_2 = 0, \theta_3 = \theta$. 由于 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞是非旋转的, 故 $L = 0$. 因此, (11) 式可改写成

$$1 - \frac{2M}{r} \left(1 - \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{32r^2} - \frac{D}{r} \right) + \frac{2Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{16r^2} + \frac{D^2}{r^2} \right) = 0, \quad (12)$$

其中利用了

$$\theta_{ij}x_i p_j = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0,$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

$$\theta_{ij}\theta_{ik}p_j p_k = \frac{1}{4} [\boldsymbol{\theta}^2 p^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\theta})] = \frac{1}{4} (p_x^2 + p_y^2)\theta^2.$$

进一步整理(12)式, 可得

$$r^4 - 2Mr^3 + (2MD + 2Q^2)r^2 + \frac{M(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{16r} - \frac{Q^2(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{8} + 2Q^2D^2 = 0. \quad (13)$$

利用四次方程的求根公式, 并且考虑到当 $\theta = 0$

时应满足 $\hat{r}_h = r_h$, 我们可以得到非对易 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞视界

$$\hat{r}_+ = 2M - D - \frac{Q^2}{M} - \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{64M}. \quad (14)$$

当 $P = 0$ 时, 得到非对易 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的视界

$$\hat{r}_h = 2M - \frac{Q^2}{2M} - \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{64M}. \quad (15)$$

4. 两种黑洞热力学性质的比较

由(4)(15)式可以得到考虑时空非对易性后 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的温度

$$\begin{aligned} T_{\text{GHS}} &= \frac{M}{2\pi(r_h - D)^2} \\ &= \frac{M}{2\pi} \left(2M - \frac{Q^2}{2M} - \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{64M} - D \right)^{-2} \\ &= \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{(p_x^2 + p_y^2)\theta^2}{64M^2} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{\alpha\theta^2}{64M^2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

其中第 3 步是将第 2 步结果做 Taylor 展开并忽略 θ 的高阶项的结果, $\alpha \equiv p_x^2 + p_y^2$.

考虑磁荷 P 为小量的情况, 将对易 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞的温度表达式作展开, 忽略 P 的高阶项, 可以得到

$$\begin{aligned} T_{\text{GM}} &= \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 - D^2)} = \frac{\sqrt{\left(M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}\right)^2 - 2P^2}}{2\pi \left(M + \sqrt{\left(M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}\right)^2 - 2P^2} \right)^2 - \left(\frac{P^2 - Q^2}{2M}\right)^2} \\ &= \frac{M + \frac{P^2 - Q^2}{2M} - \frac{P^2}{M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}}}{2\pi \left[2 \left(M + \frac{P^2 - Q^2}{2M} \right) - \frac{P^2}{M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}} \right] \cdot \left[2M - \frac{P^2}{M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}} \right]} \\ &= \frac{A - B}{2\pi(2A - B)(2M - B)}. \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$A = M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}, \quad B = \frac{P^2}{M + \frac{P^2 - Q^2}{2M}},$$

B 为小量. 将(17)式再做 Taylor 展开并忽略 B 的平方及以上次方项, 有

$$T_{\text{GM}} = \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{B}{2M} - \frac{B}{2A} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8\pi M} \left[1 + \frac{P^2}{2M \left(M + \frac{P^2 - Q^2}{2M} \right)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{P^2}{2 \left(M + \frac{P^2 - Q^2}{2M} \right)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi M} \left(1 + \frac{\beta P^2}{64M^2} \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中

$$\beta \equiv 32 \left[\left(1 + \frac{P^2 - Q^2}{2M^2} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{P^2 - Q^2}{2M^2} \right)^{-2} \right],$$

此处已经忽略了 P 的高阶项.

观察(16)(18)式不难发现它们的形式相同,磁荷 P 和非对易因子 θ 处于相同的位置上.这就说明了时空的非对易性和磁荷的存在对 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的视界和温度产生的影响有某些相似性.换句话说,时空的非对易性和磁荷对黑洞热力学产生相似的影响.

5. 结果和讨论

在考察了 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞和 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞的热力学性质之后,我们发现了这 2 种黑洞之间的联系,即当磁荷 P 为零时 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞退化成为 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞.在非对易空间中对这 2 种黑洞的热力学性质进行研究之后,我们得到如下结论:

1. 空间非对易性会对黑洞的事件视界产生修正,由非对易导致的修正与非对易因子 θ 有关.由

(14)(15)式可见, θ 的一阶项对视界无贡献,二阶项才有贡献.因为(14)(15)式等号右边 θ^2 项系数恒负,故空间非对易使视界缩小.进而,我们还可以计算空间非对易对黑洞温度的影响.

2. 磁荷 P 很小时的 GM dilaton 黑洞和考虑非对易修正的 GHS dilaton 黑洞的温度表达式(16)和(18)在形式上是相似的,而且磁荷 P 和非对易因子 θ 处在相同的位置上.考虑空间的非对易性时非对易因子 θ 也是当成小量的,因此时空的非对易性和磁荷对黑洞的视界和温度产生的影响有某些相似性.

3. 当 Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 时空带有磁荷时就成为 Gibbons-Maeda dilaton 时空;而在考虑空间非对易性后, Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton 黑洞与 Gibbons-Maeda dilaton 黑洞热力学性质相似.空间非对易性是时空在很小距离(弦尺度)上才体现出来的量子性质,而这种量子效应可以通过磁荷在 GHS 黑洞变成 GM 黑洞的过程中所起的作用形象地体现出来.

引力的量子化是一个全世界公开和公认的难题,至今仍没有一个满意的解决办法.通过本文的研究和讨论,我们发现对黑洞存在的时空引入一个非对易的量子修正,可以改变时空的热力学性质,进而产生一个量子视界.从物理图像上来看,其作用结果与 GHS 黑洞与 GM 黑洞之间的物理量磁荷 P 所起的作用具有某种相似性.这种半经典的方法为我们认识黑洞热力学的量子效应提供了一个有价值的、可行的参考,至于其中的深刻物理内涵还有待于进一步研究和探讨.

[1] Zhao Z 1999 *Thermal Property of Black Hole and Singularity of Spacetime* (Beijing: Beijing Normal University Press) pp70—74 (in Chinese) [赵 峥 1999 黑洞的热性质与时空的奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 70—74 页]

[2] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[3] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *JHEP* **5** 10055

[4] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[5] Jiang Q Q, Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权、吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]

[6] Sun X F, Jing L, Liu W B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4002 (in Chinese) [孙学峰、景 玲、刘文彪 2004 物理学报 **53** 4002]

[7] Han Y W, Hong Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3270 (in Chinese) [韩亦文、洪 云 2004 物理学报 **53** 3270]

[8] Liu C Z, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1607 (in Chinese) [刘成周、赵 峥 2006 物理学报 **55** 1607]

[9] Amelino-Camelia G, Arzano M, Ling Y, Mandanici G 2006 *Class. Quant. Grav.* **23** 2585

[10] Nozari K, S H Mehdipour S H 2006 *Electron. J. Theor. Phys.* **3** (11) 151

[11] Nozari K, Sefidgar A S 2006 *Phys. Lett. B* **635** 156

[12] Ling Y, Hu B, Li X 2006 *Phys. Rev. D* **73** 87702

[13] Lopez-Dominguez J C, Obregon O, Sabido M, Ramirez C *Towards Noncommutative Quantum Black Holes* hep-th/0607002

[14] Garcia-Compean H, Soto-Campos C 2006 *Phys. Rev. D* **74** 104028

[15] Nozar K, Fazlpour B *Thermodynamics of an Evaporating Schwarzschild Black Hole in Noncommutative Space* hep-th/0605109

[16] Nasserri F 2005 *Gen. Rel. Grav.* **37** 2223

- [17] Nasser F 2006 *Int. J. Mod. Phys. D* **15** 1113
- [18] Seiberg N, Witten E 1999 *JHEP* **9** 032
- [19] Nozari K, Fazlpour B *Reissner-Nordstrom Black Hole Thermodynamics in Noncommutative Spaces* gr-qc/0608077
- [20] Gibbons G W, Maeda K 1988 *Nucl. Phys. B* **298** 168
- [21] Shen Y G 2003 *International Journal of Theoretical Phys.* **42** 356
- [22] Elias C Vagenas 2003 *Phys. Lett. B* **559** 65
- [23] Daniel J Loran, William A Hiscock 1997 *Phys. Rev. D* **55** 3893
- [24] Shen Y G, Gao C J 2001 *Chin. J. Astron. Astrophys.* **1** 357

Thermodynamics of Gibbons-Maeda dilaton black hole and Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole in noncommutative space-time^{*}

Zhou Shi-Wei Liu Wen-Biao[†]

(Department of Physics, Institute of Theoretical Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

(Received 8 February 2007 ; revised manuscript received 9 April 2007)

Abstract

Considering a Gibbons-Maeda dilaton black hole and a Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole, the effect of space noncommutativity on black hole thermodynamics is investigated. By comparing the Gibbons-Maeda dilaton black hole in commutative space with the Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole in noncommutative space, it has been concluded that the noncommutativity of the space has an effect on Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole similar as has the electric or magnetic charge in Gibbons-Maeda dilaton black hole.

Keywords : Gibbons-Maeda dilaton black hole, Garfinkle-Horowitz-Strominger dilaton black hole, noncommutative space-time, quantum horizon

PACC : 9760L, 0420

^{*} Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2003CB716302).

[†] E-mail :wbliu@bnu.edu.cn