

简谐速度噪声与简谐噪声环境中谐振子的动力学共振

白占武^{1)†} 宋艳丽²⁾

1) 华北电力大学数理系, 保定 071003)

2) 天津大学理学院, 天津 300072)

(2007 年 1 月 28 日收到, 2007 年 3 月 13 日收到修改稿)

通过求解简谐势场中的广义量子朗之万方程, 得到平均能量的精确表达式. 由于简谐速度噪声与简谐噪声功率谱的不同特点, 两种内部噪声驱动的谐振子在简谐外力的作用下具有不同的共振特征. 这些特征可用来检验两种噪声.

关键词: 简谐速度噪声, 简谐噪声, 动力学共振, 广义量子朗之万方程

PACC: 0540

1. 引言

动力学共振是自然界中的普遍现象. 许多过程都存在共振, 如宏观力学过程、原子、分子碰撞及其与电磁场的相互作用、原子核与电磁场的相互作用等. 几乎每一个系统都处于复杂的外部或内部噪声环境中^[1]. 在随机共振现象中, 系统对于外部弱驱动信号的响应在特定的噪声强度下最为显著^[2-4]. 已有一些研究涉及到噪声环境中系统随外界信号频率变化发生的共振. 如果噪声导致输出的功率谱有一个非零的中心频率, 自治系统普遍存在着频率共振^[5]. 文献 [5] 称之为频率随机共振. 与单一谐振子随机系统相比, 耦合谐振子随机系统的共振效果要好得多. 文献 [5] 分析了加性噪声对处于激发态的二维 Fitzhugh-Nagumo 系统简单锁相图案的影响. 无噪声时, 调制曲线表现出经典的频率共振. 在中低频率下, 噪声开拓了这些调制曲线, 把 V 型舌头转变成 L 型舌头, 增加了长周期时的宽度. 对于外部简谐噪声驱动的线性系统, 平均能量存在共振行为^[6]. 文献 [7] 用共轭 Fokker-Planck 算子方法得到了受内部或外部简谐噪声驱动的非马尔科夫系统稳定的二阶矩. 如果内部噪声是简谐噪声, 被驱动系统的平均能量出现两个共振峰. 与白噪声、Ornstein-Uhlenbeck 噪声相比, 这是能量行为一个很强的修正.

与研究的最多的 Ornstein-Uhlenbeck 噪声相比, 外部窄带简谐噪声(HN)驱动的非线性系统的涨落有许多定性不同的特征^[8]. 它导致粒子多次通过双稳态势阱的中间势垒, 使得逃逸率远小于平均首通时间的倒数; 其统计分布也有一些具体的特征. 对于双稳态势阱, 路径积分的计算结果表明, HN 的带宽参数有一个临界值. 高于此值, 粒子逃逸有类似白噪声的爆发, 振荡被禁戒, 阱间跃迁受到抑制; 低于此值, 粒子的运动是振荡型行为, 阱间跃迁增加^[9]. 文献 [10] 分析了弱噪声驱动的系统准稳态分布和跃迁概率, 把问题化为一个常微分方程组的边值问题. 对于高频 HN, 高频涨落起主导作用, 激活能可以随坐标急剧变化, 这和宽带噪声不同. 简谐噪声是高斯白噪声驱动的二阶随机微分方程的解, 其时间导数就是简谐速度噪声(HVN)^[11]. 作为内部噪声的简谐速度噪声会导致自由粒子的弹道扩散和非唯一的稳定态, 后者意味着各态历经性的破坏.

本文通过求解广义量子朗之万方程(GQLE), 研究上述两种重要的噪声环境中谐振子动力学共振的特点, 并对所得结果给出统一的物理解释.

2. 动力学方程与二阶矩

受内部噪声和外部简谐力驱动的谐振子的动力学方程是如下的 GQLE:

† E-mail: baizhanwu@eyou.com

$$m\ddot{x} + m \int_0^t ds \gamma(t-s) \dot{x}(s) + m\omega_0^2 x = \xi(t) + A \cos \omega t, \quad (1)$$

式中 $x, \xi(t)$ 是算符, 无规力 $\xi(t)$ 满足第二量子涨落耗散定理^[12]

$$\begin{aligned} \xi(t)\xi(s) + \xi(s)\xi(t) &= mkT\Gamma(t-s), \\ \Gamma(t-s) &= \frac{\hbar}{m\pi kT} \int_0^\infty d\omega \mathcal{J}(\omega) \\ &\times \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \cos\omega(t-s). \end{aligned} \quad (2)$$

其中 T 为环境的温度, $\mathcal{J}(\omega)$ 为环境振子的谱密度. 利用拉普拉斯变换技术, 方程 (1) 的解可写为

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 H(t) + \frac{1}{m} \int_0^t dt' H(t-t') \xi(t') \\ &+ \frac{1}{m} \int_0^t dt' H(t-t') A \cos \omega t', \\ v(t) &= v_0 \dot{H}(t) + \frac{1}{m} \int_0^t dt' \dot{H}(t-t') \xi(t') \\ &+ \frac{1}{m} \int_0^t dt' \dot{H}(t-t') A \cos \omega t'. \end{aligned} \quad (3)$$

粒子的量子方均位移和量子方均速度可用卷积表达为

$$\begin{aligned} x^2(t) &= v_0^2 H(t)^2 + 2 v_0^2 \int_0^t dt_1 H(t-t_1) \int_0^{t_1} dt_2 H(t-t_2) \\ &\times \Gamma(t-t_1), \\ v^2(t) &= v_0^2 \dot{H}(t)^2 + 2 v_0^2 \int_0^t dt_2 \dot{H}(t-t_2) \int_0^{t_2} dt_1 \dot{H}(t-t_1) \\ &\times \Gamma(t-t_2). \end{aligned} \quad (4)$$

上式中已取 $x_0 = 0$. 这里 $H(t)$ 是响应函数, 由 $\hat{H}(p)$ 的反拉普拉斯变换确定, $\hat{H}(p) = [p^2 + p\hat{\gamma}(p)]^{-1}$, 其中 $\hat{\gamma}(p)$ 是摩擦记忆核函数 $\gamma(t)$ 的拉普拉斯变换. $\dot{H}(t)$ 是 $H(t)$ 的时间导数. 这里的平均是谐振子加环境所构成的组合系统的量子统计平均.

如果 $\hat{\gamma}(p), \hat{H}(p)$ 是 p 的单值函数, 并且特征方程 $p + \hat{\gamma}(p) = 0$ 只有单根, 利用拉普拉斯变换并用留数定理进行反变换可得

$$x^2(t) = -kT \sum_{ij} \frac{2T_{ij}}{p_i} \delta_{ij} + \sum_{ij} (v_0^2 - kT\delta_{ij}) \frac{T_{ij}}{p_i p_j}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{ij} (v_0^2 - kT\delta_{ij}) \frac{T_{ij}}{p_i p_j} [e^{(p_i+p_j)t} - e^{p_i t} - e^{p_j t}] \\ &+ kT \sum_{ij} \frac{\hat{H}_i \hat{H}_j}{p_i p_j} e^{(p_i+p_j)t}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v^2(t) &= kT \sum_{ij} T_{ij} \delta_{ij} + \sum_{ij} (v_0^2 + kT\delta_{ij}) T_{ij} e^{(p_i+p_j)t} \\ &+ kT \sum_{ij} T_{ij} \hat{H}_i \hat{H}_j e^{(p_i+p_j)t}. \end{aligned} \quad (6)$$

这里 p_i 是特征方程 $p + \hat{\gamma}(p) = 0$ 的非零根, $\delta_{ij} = -\frac{\hat{H}(p_i) + \hat{H}(p_j)}{p_i + p_j}$ 是量子修正因子. 经典极限下 $\delta_{ij} = 1$.

(5) 式中的 $T_{ij} = \text{Re}s(\hat{H}(p_i)\hat{H}(p_j))$ (6) 式中的 $T_{ij} = \text{Re}s(\hat{H}(p_i)\hat{H}(p_j))$. $\hat{H}_i = \text{Re}s(\hat{H}(p_i)\hat{H}(p_i))$, $\hat{H}(p) = \mathcal{L}[H(t)] = \mathcal{L}[A \cos \omega t]$. 我们已在文献 [13] 中给出了无外场时布朗粒子双时动力学的精确表达式.

3. 平均能量的共振

谐振子的平均能量

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2. \quad (7)$$

我们考察 $t=0$ 到 $t=T(=2\pi/\omega)$ 一个信号周期内能量的平均值.

$$\begin{aligned} \langle\langle E \rangle\rangle &= \frac{1}{2} mkT \sum_{ij} T_{ij} \delta_{ij} \\ &+ \frac{m\omega}{4\pi} \sum_{ij} (v_0^2 - kT\delta_{ij}) T_{ij} [e^{(p_i+p_j)2\pi/\omega} - 1] \\ &+ \frac{m\omega kT}{4\pi} \sum_{ij} \frac{\hat{H}_i \hat{H}_j}{p_i + p_j} [e^{(p_i+p_j)2\pi/\omega} - 1] \\ &- m\omega_0^2 kT \sum_{ij} \frac{T_{ij} \delta_{ij}}{p_i} \\ &+ \frac{1}{2} m\omega_0^2 \sum_{ij} [v_0^2 - kT\delta_{ij}] \frac{T_{ij}}{p_i p_j} \\ &- \frac{\pi m\omega_0^2 kT}{\omega} \sum_{ij} \frac{T_{ij} \delta_{ij}}{p_i} \\ &+ \frac{m\omega_0^2 \omega}{4\pi} \sum_{ij} (v_0^2 - kT\delta_{ij}) \frac{T_{ij}}{p_i + p_j} \\ &\times \left[\frac{1}{p_i + p_j} (e^{(p_i+p_j)2\pi/\omega} - 1) \right. \\ &\left. - \frac{2}{p_i} (e^{p_i 2\pi/\omega} - 1) \right] \\ &+ \frac{m\omega_0^2 \omega}{4\pi} \sum_{ij} \frac{\hat{H}_i \hat{H}_j}{p_i p_j (p_i + p_j)} \\ &\times [e^{(p_i+p_j)2\pi/\omega} - 1]. \end{aligned} \quad (8)$$

对于 HVN, $\hat{\gamma}(p) = \frac{\eta\Gamma p}{p^2 + \Gamma p + \Omega^2}$; 对于 HN, $\hat{\gamma}(p) = \frac{\eta\Omega^2}{\Gamma} \frac{p + \Gamma}{p^2 + \Gamma p + \Omega^2}$.

量子阻尼谐振子与经典阻尼谐振子的响应函数相同, 它们的共振特征定性一致. 我们只需讨论经典谐振子的共振. 这样 (8) 式中的 $\delta_{ij} = 1$. 图 1—3 给出了一些参数下平均能量 $\langle\langle E \rangle\rangle$ 作为信号频率 ω 的函数关系. 每个图中 (a) 图对应 HVN (b) 图对应 HN.

环境对谐振子的影响用 $\tilde{\chi}(\omega) = \hat{\chi}(i\omega)$ 来表征. 由于 $\tilde{\chi}(\omega)$ 的实部和虚部之间存在 Krammers-Kronig 关系, 环境对谐振子共振特征的影响可以用谐振子自然频率 ω_0 附近的功率谱 ($\tilde{\chi}(\omega)$ 的实部 $\tilde{\chi}'(\omega)$) 来解释. 无环境影响时, 响应谱函数的极点在 $\omega = \omega_0$ 处, 谐振子与环境的耦合把极点移动到复频率 $\Gamma_0 + i\Omega_0$ 处, 出现两个共振频率, Γ_0 与耗散相联系, 即与共振峰的高度相联系. 当 ω_0 较小时 (离功率谱峰值频率 ω_{max} 较远), $\omega = \omega_0$ 附近功率谱较小, 谐振子与环境的耦合较弱, 频率的移动较小, 共振频率 ω_r 接近 ω_0 ; Γ_0 小, 耗散小, 共振峰很高. 对于 HVN, 功率谱自峰值的衰减快 ($\omega \rightarrow 0, \tilde{\chi}'(\omega) \rightarrow 0$), 峰值比 HN

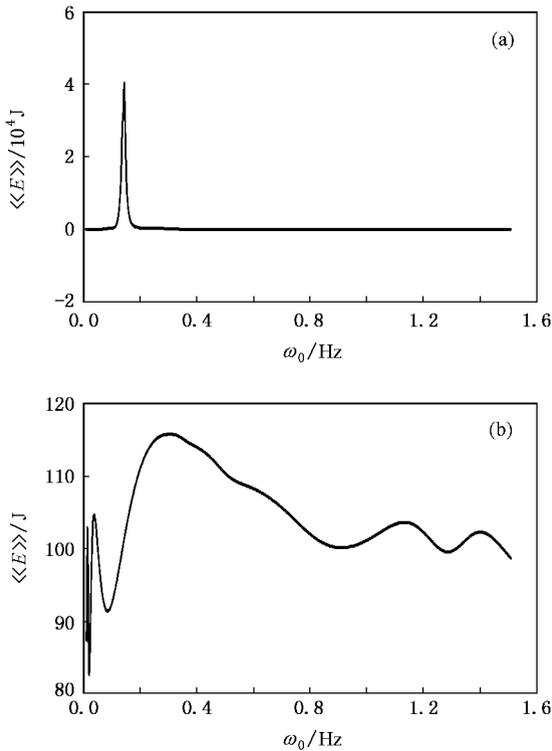


图 1 平均能量作为信号频率 ω 的函数 ($m = 1, T = 1, \Omega = 1, \Gamma = 1, \omega_0 = 0.2$)

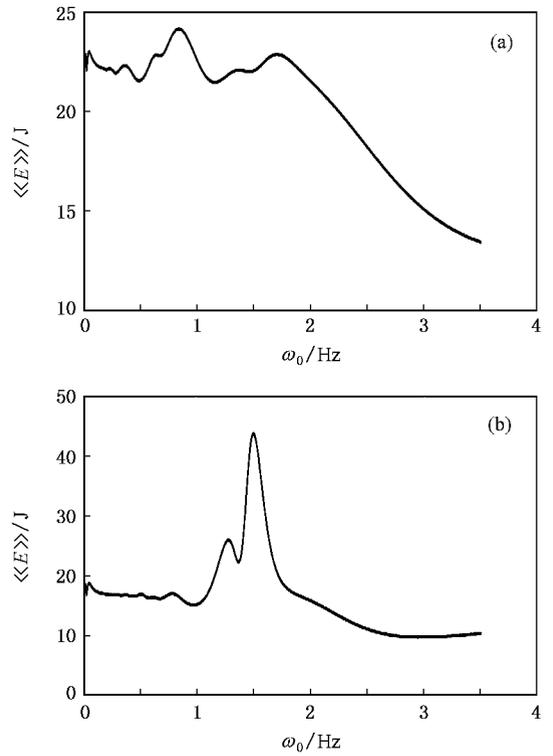


图 2 平均能量作为信号频率 ω 的函数 ($m = 1, T = 1, \Omega = 1, \Gamma = 1, \omega_0 = 1$ (a), $\omega_0 = 0.7$ (b))

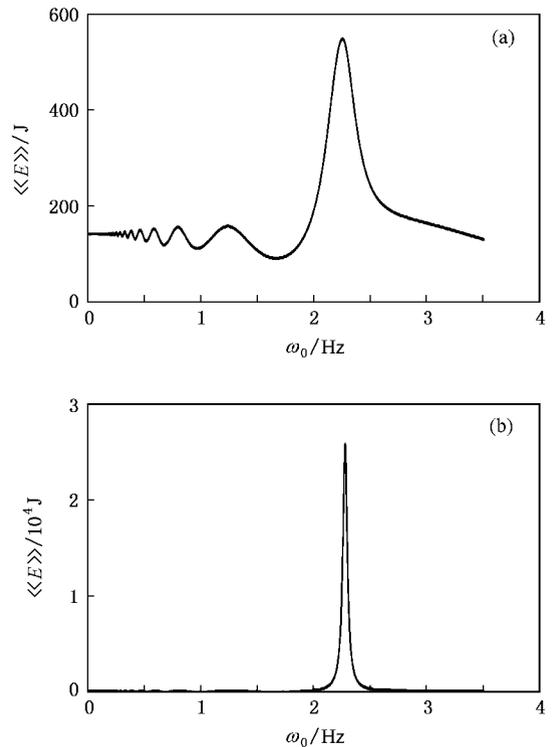


图 3 平均能量作为信号频率 ω 的函数 ($m = 1, T = 1, \Omega = 1, \Gamma = 1, \omega_0 = 2$)

要高很多(见图 1)。对于一般的宏观简谐势, ω_0 较小, HVN 谱有很高的共振峰, 而 HN 无明显的共振。这是 HVN 区别于 HN 的一个重要特征。当 ω_0 在功率谱峰值附近时, 功率谱大, 谐振子与环境振子的耦合很强, 频率的移动大, 共振频率 ω_r 偏离 ω_0 较大; Γ_0 大, 耗散大, 两个共振峰不明显(见图 2)。当 ω_0 较大时(离功率谱峰值频率 ω_{\max} 较远), 功率谱较小, 谐振子与环境振子的耦合较弱, 频率移动较小, 共振频率 ω_r 离 ω_0 较近; Γ_0 小, 共振峰很高。HN 的功率谱衰减快, 因而共振峰更高(见图 3)。

4. 结 论

由于 HVN 和 HN 功率谱的不同特点, 谐振子在这两种噪声环境中具有不同的共振特征。HVN 功率谱的低频极限为零, 谐振子的自然频率 ω_0 较小时, ω_0 附近的功率谱较小, 对应的共振峰很高。当 ω_0 较大时, ω_0 附近 HN 的功率谱较小, 对应的共振峰很高。两种噪声功率谱峰值附近功率谱大, 没有明显的共振。这些特征可用来检验两种噪声。通过调节外部简谐信号的频率, 可以容易地进行这种检验。

- [1] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation : Methods of Solution and Applications* (Berlin : Springer)
- [2] Gammaitoni L , Hänggi P , Jung P *et al* 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Han L B , Cao L , Wu D J *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波、曹力、吴大进等 2004 物理学报 **53** 2127]
- [4] Shao Y Z , Zhong W R , Lin G M *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3157 (in Chinese) [邵元智、钟伟荣、林光明等 2004 物理学报 **53** 3157]
- [5] Qian M , Zhang X J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 202

- [6] Longtin A 2000 *Chaos , Solitons , and Fractals* **11** 1835
- [7] Bao J D 1995 *Phys. Lett. A* **204** 102
- [8] Dykman M I , McClintock P V E , Stein N D *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 933
- [9] Einchcomb S J B , Mckane A J 1994 *Phys. Rev. E* **49** 259
- [10] Dykman M I 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2020
- [11] Bao J D , Song Y L , Ji Q *et al* 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011113
- [12] Kubo R 1966 *Rep. Prog. Phys.* **29** 255
- [13] Bai Z W , Bao J D , Song Y L 2005 *Phys. Rev. E* **72** 061105

The dynamical resonance of a harmonic oscillator coupled to a heat bath with harmonic velocity noise and harmonic noise

Bai Zhan-Wu¹† Song Yan-Li²

¹ *Department of Mathematics and Physics , North China Electric Power University , Baoding 071003 , China*

² *School of Science , Tianjin University , Tianjin 300072 , China*

(Received 28 January 2007 ; revised manuscript received 13 March 2007)

Abstract

For a harmonic oscillator coupled to a heat bath with harmonic velocity noise and harmonic noise , we obtain the exact average energy by resolving the corresponding generalized quantum Langevin equation . Due to the different power spectra of the two kinds of noise , the harmonic oscillator driven by external harmonic force exhibits different resonant features . This is an approach for examining the characterization of internal noise .

Keywords : harmonic velocity noise , harmonic noise , dynamical resonance , generalized quantum Langevin equation

PACC : 0540