

# 超混沌系统的广义同步化<sup>\*</sup>

王兴元<sup>†</sup> 孟 娟

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2007 年 1 月 31 日收到, 2007 年 3 月 16 日收到修改稿)

研究了超混沌系统的广义同步化问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出了一种新的线性及非线性广义同步方案, 并从理论上证明了该方案的可行性. 该方案不仅可以实现相同维数超混沌系统之间的广义同步, 而且对于不同维数的系统之间的广义同步问题同样适用. 合理地构造误差增益矩阵, 即可实现驱动系统和响应系统之间的广义同步. 数值模拟实验进一步验证了所提方案的有效性.

关键词: 超混沌系统, Lyapunov 稳定性理论, 广义同步

PACC: 0545, 0555

## 1. 引 言

近年来, 混沌同步已成为国内外学者研究的一个热点问题. 人们在保密通信、生命科学、信息工程等多个领域中对混沌同步进行了研究, 并提出了许多不同类型的同步方法<sup>[1-10]</sup>. 由于实际中难以产生出两个完全相同的混沌系统, 因此混沌系统之间常存在着参数不匹配、传输信道失真等非同步现象. 为了解决这一问题, Rulkov 等人提出了“广义同步”的概念<sup>[11]</sup>. 广义同步是完全同步的一个推广, 是指响应系统的状态变量与驱动系统的状态变量之间的函数同步. 因此, 研究混沌系统的广义同步问题具有较深远的理论意义和应用价值. 目前, 国内外关于广义同步的研究还较少, 且主要集中于低维混沌系统的广义同步问题的研究<sup>[11-14]</sup>. 本文提出了一种新的广义同步方法, 扩展了广义同步的应用范围. 并在理论分析的基础上, 通过对超混沌系统的数值仿真实验进一步验证了所提方案的有效性. 本文方案不仅可以实现相同维数超混沌系统之间的广义同步, 也可以实现不同维数的混沌系统之间的广义同步.

## 2. 超混沌系统广义同步方案

### 2.1. 广义同步问题描述和预备知识

考虑如下两个动力学系统:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = Ay + Bg(y) + u(x, y), \quad (2)$$

分别作为驱动系统和响应系统. 其中,  $x \in R^n$  和  $y \in R^n$  分别为驱动系统和响应系统的状态矢量,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为非线性向量函数,  $A$  和  $B$  为具有适当维数的系统矩阵,  $u(x, y)$  为控制器.

假设  $g(\cdot)$  满足如下的 Lipschitz 条件:

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in R^n, \quad (3)$$

这里  $L > 0$  为 Lipschitz 常数,  $\|\cdot\|$  为标准欧几里德范数.

**定义 1** 对于给定的矢量映射  $\phi: R^n \rightarrow R^n$ , 如果系统 (1) 和系统 (2) 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \phi(x(t))\| = 0, \quad (4)$$

则称系统 (1) 和系统 (2) 是广义同步的.

因此, 两个动力学系统的广义同步问题可以归结为如何正确地设计出控制器  $u$ .

**Barbalat 引理<sup>[15]</sup>** 如果  $f(t)$  是一个一致连续函数, 同时  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau$  存在而且有界, 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $f(t) \rightarrow 0$ .

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究计划(批准号: 20040081)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

### 2.2. 控制器的设计

定义系统 (1) 和系统 (2) 的广义同步误差信号为

$$e(t) = y(t) - \phi(x(t)), \quad (5)$$

则误差动力系统的方程为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - D\phi \cdot \dot{x} \\ &= Ay + Bg(y) - D\phi \cdot f(x) + u, \quad (6) \end{aligned}$$

这里  $D\phi$  为映射  $\phi$  的雅克比矩阵.

定理 1 对于满足式 (3) 的动力学系统 (1) 和 (2), 若控制器  $u$  设计为

$$\begin{aligned} u &= D\phi \cdot f(x) - \Omega(y - \phi(x)) \\ &\quad - Bg(\phi(x)) - A\phi(x), \quad (7) \end{aligned}$$

这里常数矩阵  $\Omega = (\omega_{ij})_{m \times m}$  称为误差增益矩阵, 且满足

$$\lambda_{\min}(\Omega)(L\|B\| + \|A\|) > 1, \quad (8)$$

则系统 (1) 和系统 (2) 将获得广义同步. 其中  $\lambda_{\min}(\cdot)$  表示矩阵的最小特征值.

证明 构造 Lyapunov 误差函数

$$V(t) = \frac{1}{2} e^T e = \frac{1}{2} \|e\|^2, \quad (9)$$

易证  $V(t) \geq 0$ .

根据 (7) 式, 误差动力系统可以改写为

$$\dot{e} = Ae - \Omega e + B[g(y) - g(\phi(x))]. \quad (10)$$

计算函数  $V(t)$  沿 (10) 式的时间导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T Ae - e^T \Omega e + e^T B[g(y) - g(\phi(x))] \\ &\leq \|A\| \|e\|^2 - \lambda_{\min}(\Omega) \|e\|^2 \\ &\quad + L\|B\| \|e\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\|A\| + L\|B\| \\ &\quad - \lambda_{\min}(\Omega)) \|e\|^2, \quad (11) \end{aligned}$$

显然  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 所以  $e_i \in L_\infty$ .

因为  $\lambda_{\min}(\Omega) - \|A\| - L\|B\| > 0$ , 所以

$$\begin{aligned} &\int_0^t (\lambda_{\min}(\Omega) - \|A\| - L\|B\|) \|e\|^2 d\tau \\ &\leq \int_0^t (\lambda_{\min}(\Omega) - \|A\| - L\|B\|) e^T e d\tau \\ &\leq \int_0^t -\dot{V} d\tau = V(0) - V(t) \leq 0. \quad (12) \end{aligned}$$

由此,  $e_i \in L_2$ . 根据 Barbalat 引理, 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ . 可见, 误差系统 (6) 是渐进稳定的. 即驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 可渐进地获得广义同步. 证毕.

### 3. 数值模拟

为了验证所提方案的有效性, 作者给出了两个数值仿真的例子.

例 1 超混沌 Lorenz 系统的广义同步.

考虑如下超混沌 Lorenz 系统<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{33}x_3 + x_1x_2, \\ \dot{x}_4 &= -kx_1, \end{aligned} \quad (13)$$

这里  $a_{11} = -a_{12} = -10, a_{21} = 28, a_{22} = -1, a_{33} = -8/3, k = 10$ . 图 1 给出了该超混沌 Lorenz 系统的吸引子在  $(x_1, x_2, x_3)$  空间和  $(x_2, x_3, x_4)$  空间的投影.

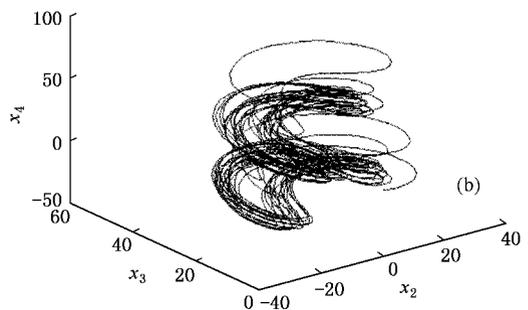
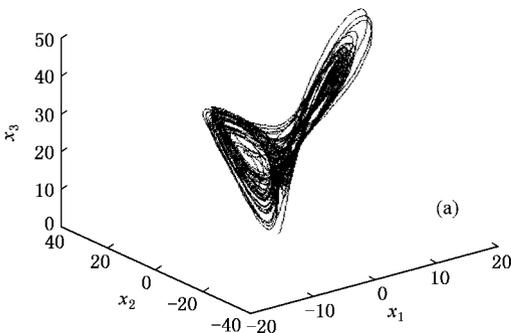


图 1 超混沌 Lorenz 系统的吸引子投影图

受控响应系统的动力学模型为

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + u_1,$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + y_4 - y_1y_3 + u_2,$$

$$\dot{y}_3 = a_{33}y_3 + y_1y_2 + u_3,$$

$$\dot{y}_4 = -ky_1 + u_4, \quad (14)$$

这里  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  为控制器.

系统(14)可以改写成(2)式的形式,此时

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 28 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8/3 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

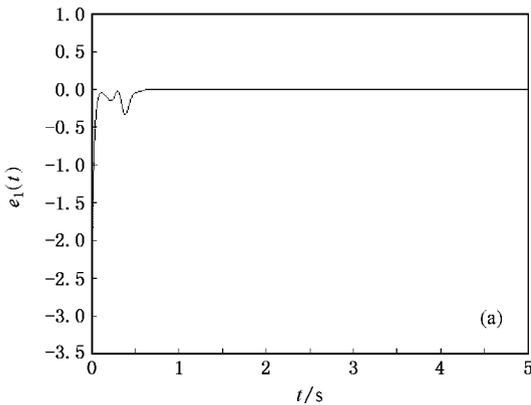
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

容易得到  $\|\mathbf{A}\| = 31.6695, \|\mathbf{B}\| = 1.$

取  $L = 1$ , 选取误差增益矩阵  $\mathbf{\Omega}$  为

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 35 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 50 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 60 \end{bmatrix}, \quad (15)$$



易得  $\lambda_{\min}(\mathbf{\Omega}) = 34.0801$ , 可以证明其满足(8)式.

定义映射  $\phi$  为

$$\Phi(\mathbf{x}) = (x_1^2, x_2 + x_3, Ax_3, x_4 + 1)^T, \quad (16)$$

则

$$D\Phi = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

采用以上参数,根据(7)式设计控制器  $\mathbf{u}$ , 驱动系统(13)和响应系统(14)的初始值分别选取为  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)) = (2.0, 3.0, 5.0, 1.0)$  和  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1.0, 0.2, 3.0, 0.5)$ . 图2给出了驱动-响应系统的广义同步误差效果图. 从图2可以看出, 经过较短时间后, 误差  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  和  $e_4(t)$  分别稳定于零点, 这表明系统(13)和系统(14)获得了广义同步.

例2 类 Lorenz 系统与超混沌 Chen 系统之间的广义同步.

采用类 Lorenz 系统作为驱动系统, 其动力学方程如下<sup>[17]</sup>:

$$\dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1),$$

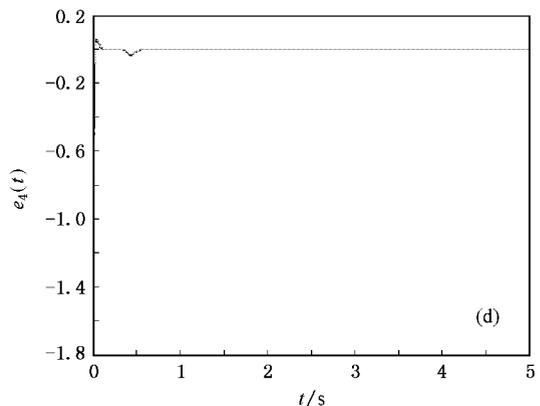
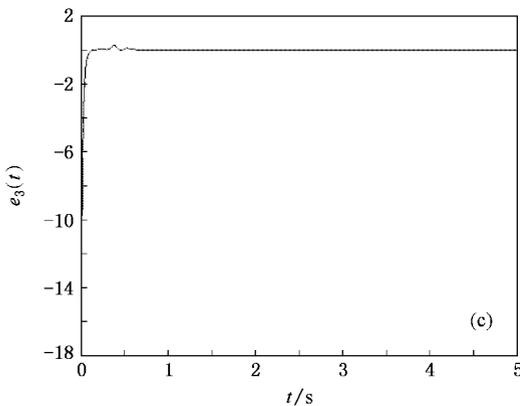
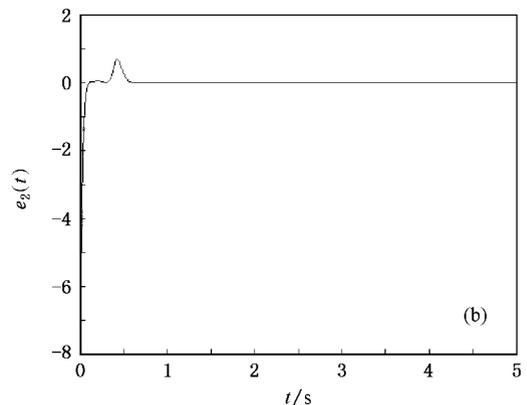


图2 系统(13)和系统(14)的广义同步误差效果图

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \beta x_1 - l x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\gamma x_3 + h x_1^2 + k x_2^2, \end{aligned} \quad (18)$$

这里  $\alpha = 10, \beta = 40, \gamma = 2.5, l = 1, h = 2, k = 2$ . 图 3 给出了其混沌吸引子图.

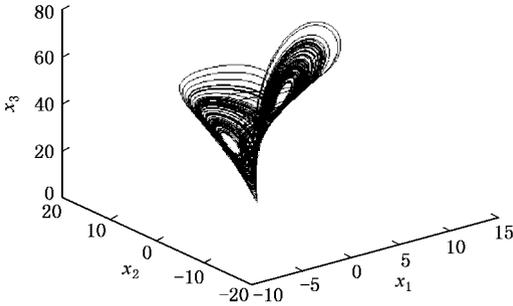


图 3 类 Lorenz 系统的混沌吸引子

采用超混沌 Chen 系统作为响应系统, 其动力学方程为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= a(y_2 - y_1) + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= d y_1 - y_1 y_3 + c y_2 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3 + u_3, \\ \dot{y}_4 &= y_2 y_3 + r y_4 + u_4, \end{aligned} \quad (19)$$

这里  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7, r = 0.5, u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  为控制器. 该系统的混沌吸引子在  $(y_3, y_4, y_1)$  空间和  $(y_4, y_2, y_1)$  空间中的投影如图 4 所示.

将系统(19)改写成(2)式的形式, 则

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 1 \\ 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ g(y) &= \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ y_2 y_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

易得  $\|A\| = 49.6436, \|B\| = 1$ .

取  $L = 1$ , 选取误差增益矩阵  $\Omega$  为

$$\Omega = \begin{bmatrix} 60 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 55 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 60 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 65 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

容易得到  $\lambda_{\min}(\Omega) = 54.2851$ , 可以证明其满足(8)式.

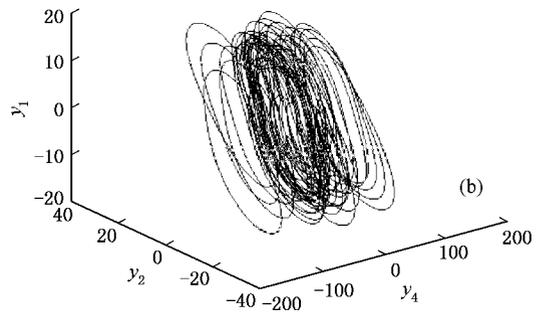
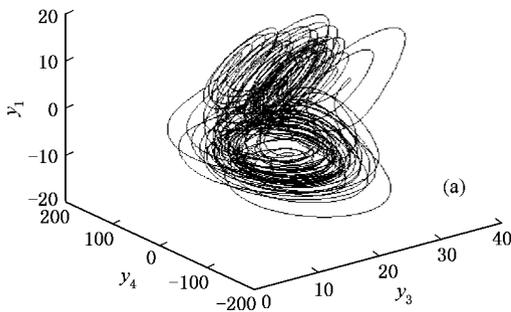


图 4 超混沌 Chen 系统的吸引子投影图

定义映射  $\phi$  为

$$\phi(x) = (x_1, x_2^2, 2x_3, x_1 + x_2 + x_3)^T, \quad (21)$$

则

$$D\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

采用以上参数, 根据(7)式设计控制器  $u$ , 驱动系统(18)和响应系统(19)的初始值分别选取为  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2.0, 3.0, 1.0)$  和  $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1.0, 0.2, 3.0, 0.5)$ . 从误差效果图 5 可以看出, 较短时间之后, 误差  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  和  $e_4(t)$  分别稳定于零点, 这表明系统(18)和系统(19)获得了广义同步.

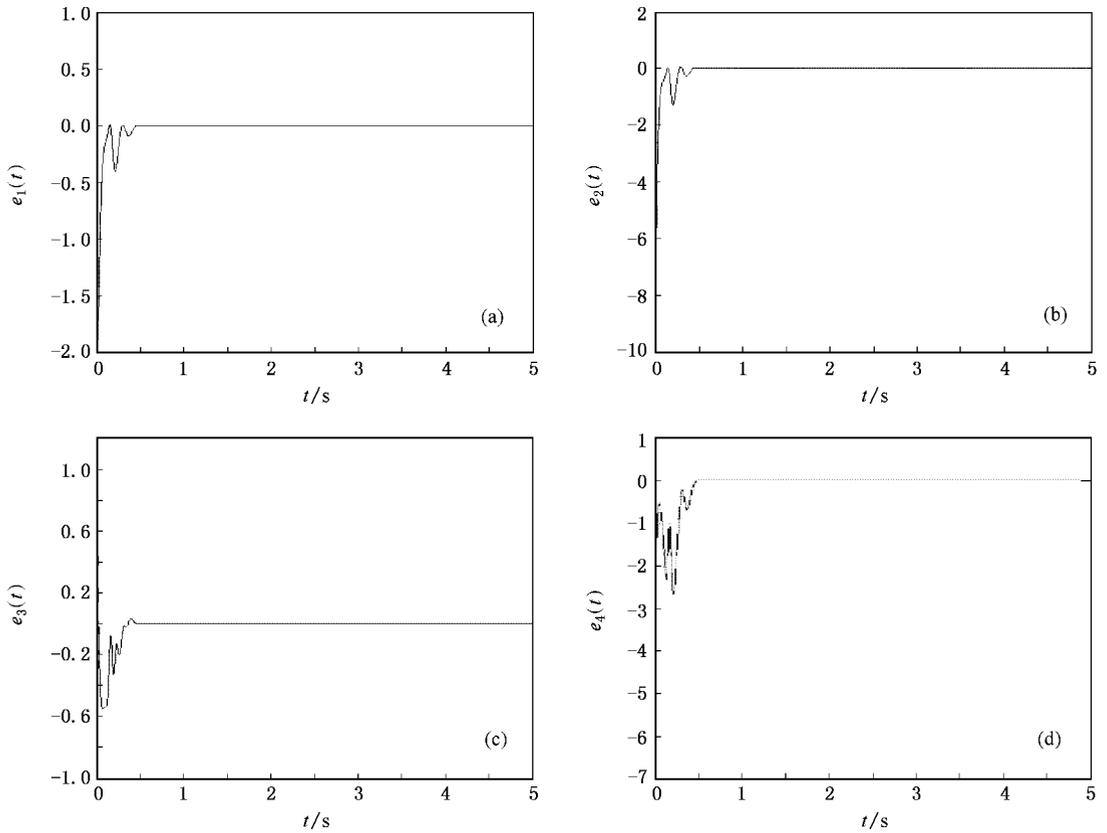


图5 系统(18)和系统(19)的广义同步误差效果图

## 4. 结 论

本文研究了超混沌系统的广义同步问题,提出了一种新的广义同步方案.理论分析表明,合理地选取误差增益矩阵即可实现动力系统之间的广义同

步.本文所设计的控制器具有一定的鲁棒性,不仅可以实现相同维数超混沌系统之间的广义同步,而且也适用于不同维数混沌系统之间的广义同步问题.通过对超混沌系统的数值模拟实验进一步验证了本文方案的有效性.

- [ 1 ] Guan X P, Fan Z P, Chen C L, Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* ( Beijing : National Defence Industry Press ) chapt. 9 ( in Chinese ) [ 关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第九章 ]
- [ 2 ] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* ( Beijing : Electronics Industry Press ) chapt. 2 ( in Chinese ) [ 王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章 ]
- [ 3 ] Sundar S, Minai A A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5456
- [ 4 ] Feki M 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **18** 141
- [ 5 ] Huang D B 2004 *Phys. Rev. E* **69** 067201
- [ 6 ] Wang X Y, Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2584 ( in Chinese ) [ 王兴元、刘 明 2005 物理学报 **54** 2584 ]
- [ 7 ] Zhang X M, Peng J H, Chen G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2864 ( in Chinese ) [ 张晓明、彭建华、陈关荣 2004 物理学报 **53** 2864 ]
- [ 8 ] Li Y, Liao X F, Li C D, Chen G 2006 *Chin. Phys.* **15** 2890
- [ 9 ] Ho M C, Hung Y C, Chou C H 2002 *Phys. Lett. A* **296** 43
- [ 10 ] Zhang X H, Liao X F, Li C D 2005 *Chaos, Solitons Fract.* **26** 845
- [ 11 ] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [ 12 ] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [ 13 ] Hunt B R, Ott E, Yorke J A 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4029
- [ 14 ] Wang Y W, Guan Z H 2006 *Chaos, Solitons Fract.* **27** 97
- [ 15 ] Gopalsamy K 1992 *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics* ( Dordrecht : Kluwer Academic Publishers ) chapt. 3
- [ 16 ] Celikovskiy S, Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1789
- [ 17 ] Liu C X, Liu L, Liu T, Li P 2006 *Chaos, Solitons Fract.* **28** 1196
- [ 18 ] Li Y X, Tang W K S, Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367

# Generalized synchronization of hyperchaos systems<sup>\*</sup>

Wang Xing-Yuan<sup>†</sup> Meng Juan

( School of Electronic & Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China )

( Received 31 January 2007 ; revised manuscript received 16 March 2007 )

## Abstract

The generalized synchronization of hyperchaos systems is investigated. Based on the Lyapunov stability theory, a new linear and nonlinear generalized synchronization approach is proposed. Theoretical analysis is provided to show its feasibility. The proposed method can realize the generalized synchronization not only of structurally equivalent systems, but also of systems of different dimensions. If the error gain matrix is suitably chosen, the generalized synchronization between drive system and response system will be obtained. Numerical simulations further demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords** : hyperchaos system , Lyapunov stability theory , generalized synchronization

**PACC** : 0545 , 0555

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60573172 ) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province , China ( Grant No. 20040081 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : wangxy@dlut.edu.cn