

脊加载椭圆波导的多项式表示分析方法*

徐 进† 王文祥 岳玲娜 宫玉彬 魏彦玉

(电子科技大学物理电子学院, 成都 610054)

(2007 年 3 月 4 日收到, 2007 年 4 月 3 日收到修改稿)

采用 Rayleigh-Ritz 方法和多项式表示对脊加载椭圆波导的传输特性进行了分析, 数值计算与电磁仿真软件结果能很好地符合, 研究了不同尺寸对脊波导带宽的影响, 对这类结构的优化具有指导意义.

关键词: Rayleigh-Ritz 法, 椭圆波导, 脊加载

PACC: 4110F, 0365D

1. 引 言

脊加载结构由于具有拓展主模带宽, 特性阻抗比同轴线低和小尺寸等特点, 因而在微波和天线系统领域有着广泛的应用. 早期研究主要集中在脊加载矩形波导, 以进一步拓展带宽^[1]. 脊加载圆波导也已应用于很多领域如滤波器、匹配电路、环形器和偏振器等^[2]. 而对于另一种重要结构, 也是得到了普遍使用的椭圆波导, 其脊加载结构国内外关注还很少. Stankovic 在对边界值问题的处理中, 采用快速傅里叶变换 FFT 法对边界条件进行基函数展开表示, 对加载椭圆脊的椭圆波导 TE 模式本征值问题进行了研究, 发现这一结构具有低截止频率和宽带宽的优点^[3].

多项式逼近以及正交多项式法早期被用于力学中对多边形结构的振动进行分析^[4], 在电磁领域, Davies 和 Kretzschmar 用多项式做实验函数, 利用 Rayleigh-Ritz 法研究空波导本征值问题^[5], 具体作法是采用多项式实验函数表示多边形结构, 作为实际波导横截面形状的近似. Wang 采用改进多项式逼近法分析椭圆波导^[6], 这一方法不要求多项式正交, 多项式直接用来表示椭圆而不是椭圆的内接多边形. Lin 等人在此基础上利用多项式表示法对超二次函数描述的波导进行了分析, 并与实验和有关文献做了对比^[7]. 此外 Lin 采用同样的方法研究了波导不

连续性^[8], 而 Cooray 将其应用于求解喇叭的辐射问题^[9].

本文分别对椭圆波导加载圆形脊和矩形脊两种结构的传输特性进行了研究. 利用 Wang 所提出的方法, 将脊波导中的场在笛卡尔坐标系下采用多项式求和表示, 并利用 Rayleigh-Ritz 法将波动方程的边界值问题转换为矩阵本征值问题. 我们对这两种脊波导的 TE 和 TM 模式截止频率进行了计算, 并研究结构中各参数变化对带宽的影响.

2. 理论分析

对于沿纵向截面不变的柱形波导, z 向电磁场简单地用 $e^{-jk_z z}$ 表示. 因而对于 TM 模式和 TE 模式, 电场或磁场纵向场分量的波动方程有以下形式:

$$\nabla_T^2 \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + (k^2 - k_z^2) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (1)$$

这里 ∇_T^2 为横截面上的二维拉普拉斯算子, k 为自由空间的波数. 其他场分量都可由纵向场求得. 对于截止情况, 截止波数 $k_c = \omega_c \sqrt{\mu\epsilon}$ 可以通过令 (1) 式中的 $k_z = 0$ 求得.

在脊加载椭圆波导横截面上, 其边界由椭圆和圆或矩形分别构成, 如图 1 所示. 对于 TE 和 TM 模式, 需分别满足 Neumann 和 Dirichlet 边界条件

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \text{ TE 模}, \quad E_z|_{\Gamma} = 0, \text{ TM 模}, \quad (2)$$

* 国家自然科学基金重点项目(批准号 60532010), 国家自然科学基金(批准号 60401005)和霍英东高校青年教师研究基金(批准号 91063)资助的课题.

† E-mail: xj@uestc.edu.cn

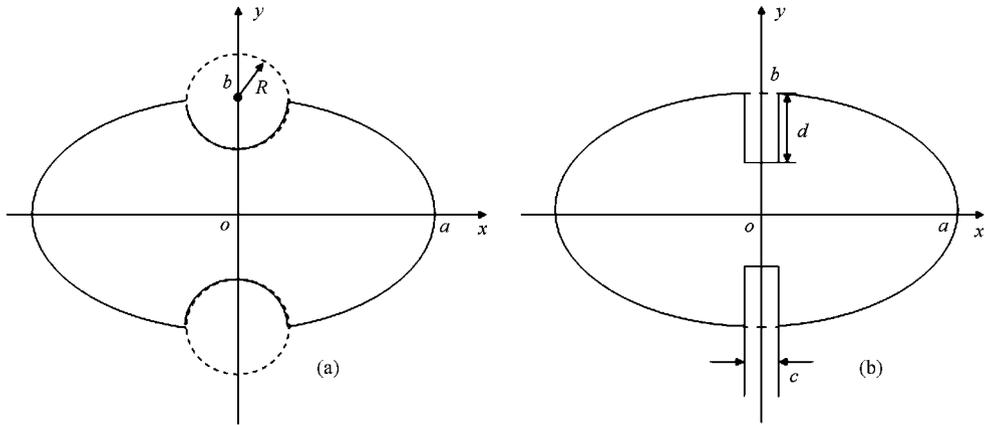


图 1 (a)圆脊加载椭圆波导 (b)矩形脊加载椭圆波导

其中 Γ 表示脊加载波导边界, \hat{n} 表示垂直于波导边界 Γ 的单位向量.

这里采用 Rayleigh-Ritz 方法将边界值问题用泛函表示, 通过泛函相对于其变量的极小值来求解. 由于这里是柱形结构, 在横截面上的二维泛函表达式为^[10]

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_D \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{k_c^2}{2} \iint_D \phi^2 dx dy, \quad (3)$$

其中 D 表示脊加载波导横截面所在区域.

将纵向场 Φ 用多项式序列求和来表示

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \psi_i. \quad (4)$$

采用矩阵来描述泛函表达式(3), 有

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \iint_D [C]^T \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^T + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^T \right] [C] dx dy - \frac{k_c^2}{2} \iint_D [C]^T \psi [C] dx dy, \quad (5)$$

表达式中的上标 T 表示转置, 其中 $[C]^T = [C_1, C_2, \dots, C_m]$, $[\psi]^T = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m]$. 对泛函 $F(\Phi)$ 求极值, 即 F 对场 Φ 表达式中各系数 C_i 求偏导等于零, 有

$$[K][C] = k_c^2 [M][C], \quad (6)$$

其中矩阵 K 和 M 中的元素为

$$k_{ij} = \iint_D \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7)$$

$$m_{ij} = \iint_D \psi_i \psi_j dx dy.$$

(6)式是一个广义本征值问题, 由(7)式可以看出 $[K]$ 、 $[M]$ 均为对称矩阵, 且 $[M]$ 是正定的, 可以将 $[M]$ 进行 Cholesky 分解 $[M] = [L][L]^T$ $[L]$ 为下三角矩阵^[11]. 则(6)式可表示为普通本征值求解问题

$$([L]^T [K] [L]^T)^{-1} - k_c^2 I [L]^T [C] = 0, \quad (8)$$

其中 I 为单位矩阵, 括号中第一式中的上标 -1 表示对矩阵求逆.

对 TM 模式(4)式中多项式函数 ψ_i 表示为

$$\psi_i(x, y) = G(x, y) f_i(x, y). \quad (9)$$

对 TE 模式表示为

$$\psi_i(x, y) = f_i(x, y). \quad (10)$$

(9)式中的 $G(x, y)$ 为波导横截面上的限制函数, 即描述边界 Γ 的函数表达式, 如图 1(a)结构的限制函数为

$$G(x, y) = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right] \times [x^2 + (y - b)^2 - R^2] \times [x^2 + (y + b)^2 - R^2]. \quad (11)$$

这样多项式函数(9)式在边界 Γ 处等于零, 使得纵向场满足 Dirichlet 边界条件, 对 TE 模式(10)式本身已满足 Neumann 边界条件. 对于图 1(b)中加载矩形脊的椭圆波导, 虽然函数 $|x \pm c/2| |y \pm d| = 0$ 可以描述图中的矩形脊, 但这样构成的场表达式在脊波导中强行加入了 4 个多余的电壁, 而采用超二次函数来描述矩形脊可以避免这一问题, 这样限制函数为

$$G(x, y) = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\left| \frac{2x}{c} \right|^{100} + \left| \frac{y + \frac{b-d}{2}}{b-d} \right|^{100} - 1 \right) \\ & \times \left(\left| \frac{2x}{c} \right|^{100} + \left| \frac{y - \frac{b-d}{2}}{b-d} \right|^{100} - 1 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

下面讨论函数 $f_i(x, y)$ 的构造, 设

$$r = \text{Int}(\sqrt{i-1}), \quad (13)$$

符号 Int 表示取整. 定义

$$t = (i-1) - r^2. \quad (14)$$

当 t 为偶数时,

$$s = t/2, f_i(x, y) = x^r y^s. \quad (15)$$

t 为奇数时,

$$s = (t-1)/2, f_i(x, y) = x^s y^r. \quad (16)$$

从上面可以看到 $f_i(x, y)$ 的次数为 $r+s$.

3. 数值计算

脊波导主要用于拓展带宽^[12,13], 这里带宽表示波导单一模式传输的频率范围. 对椭圆光滑波导而言, 当长轴 $2a$ 与短轴 $2b$ 比值为 2 时获得最大带宽, 是半径为 a 圆光滑波导的两倍, 与长为 $2a$ 宽为 $2b$ 的矩形波导相比则小 25%^[14]. 这里对两种脊波导进行计算, 一种是加载圆形脊的椭圆波导如图 1(a), 由于脊为光滑曲面, 可以避免高压击穿, 从而可用于高功率微波器件. 另一种为加载普通矩形脊的椭圆波导如图 1(b). 在前面理论分析中已将波动方程边界值问题转换为(8)式中矩阵 $[L]^{-1}[K]([L]^T)^{-1}$ 本征值的求解, 求出不同的本征值, 即截止波数 k_{ci} , 同时可得到对应本征向量 $[L]^T[C]$, 从而求得 C_i . 由(4)式可得到各模式的场表达式. 对于 TE 模式, 不同的结构在进行本征值计算时只是矩阵元素(7)式中积分区域不同, 在多项式的构造上是一样的. 对 TM 模式, 除积分区域不同外, 多项式构造上限制函数的具体表示也不相同, 如(11)和(12)式分别对应圆形脊加载和矩形脊加载椭圆结构的限制函数.

图 2(a) 给出圆形脊加载椭圆波导最低的 6 个模式随着脊半径 R 变化时截止频率变化趋势, 并与 HFSS 电磁仿真软件进行了比较, 图中模式前面的下标 c, s 分别表示偶型和奇型模式, 计算时模式场表达式(4)采用 60 项求和. 图 2(b) 给出不同求和项数对 $c_{H_{11}}$ 截止频率计算精度的影响, 可以看到当达到

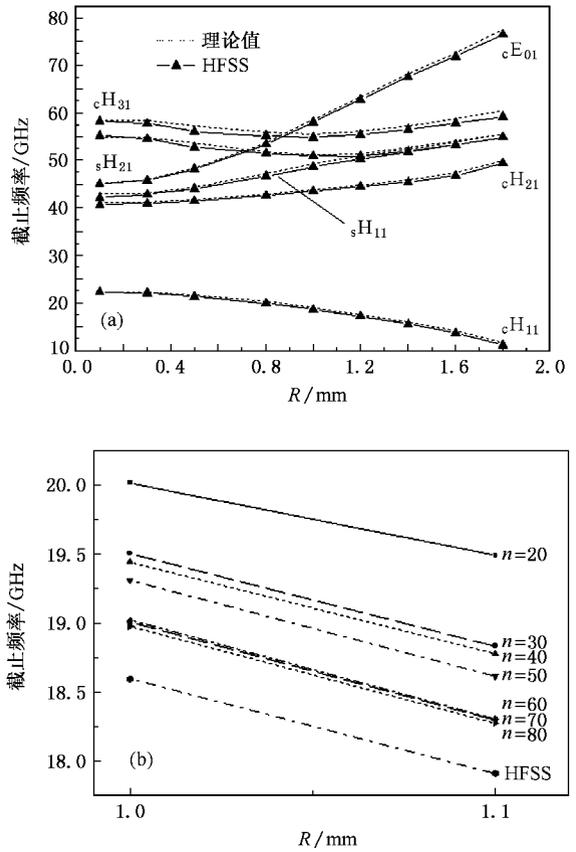


图 2 圆形脊加载椭圆波导截止频率 ($a = 4 \text{ mm}, b = 2 \text{ mm}$)

60 项时收敛变得非常缓慢, 这时计算结果与 HFSS 仿真结果的相对误差在 2% 左右. 对高次模采用 60 项计算, 误差则为 1% 或更小. 对于主模 $c_{H_{11}}$, 脊所在位置正是电场最强的位置, 随着脊半径 R 的增加, 主模截止频率降低, 而高次模式如 $c_{H_{21}}, s_{H_{11}}$ 和 $c_{E_{01}}$, 加载脊对磁场的影响以及波导横向尺寸减小, 使得截止频率逐渐升高. 对于 $s_{H_{21}}$ 和 $c_{H_{31}}$ 模式, R 较小时脊对其电场的扰动使得截止频率下降, 随着半径增加横向尺寸影响超过电场扰动的影响, 使模式截止频率提高. 当脊半径 R 较大时, $s_{H_{21}}$ 和 $s_{H_{11}}$ 模式的截止频率趋于一致, 这是由于脊之间间隙减小, 波导在横向被近似分离成两个独立腔, 使得 $s_{H_{21}}$ 和 $s_{H_{11}}$ 成为简并模式.

当椭圆长短轴不变, 随着圆形脊半径的增加, 最低模式 $c_{H_{11}}$ 截止频率逐渐减小而高次模式截止频率增加, 从而使得脊加载波导带宽得到拓展. 而对于圆形脊加载矩形波导 (meinke waveguide)^[15], 脊半径的增加导致最低模式截止频率降低, 而第一高次模截止频率变化缓慢. 所以虽然矩形波导带宽比椭圆波导宽, 随着脊半径的增加, 圆形脊加载的椭圆波导带

宽逐渐接近甚至超过 Meinke 波导的带宽,如图 3 所示.这里采用归一化带宽 $\lambda_{c1}/\lambda_{c2}$ 为主模截止波长 λ_{c2} 为第一高次模的截止波长. Meinke 波导中矩形波导长为 $2a$,宽 $2b$,圆形脊半径 R .

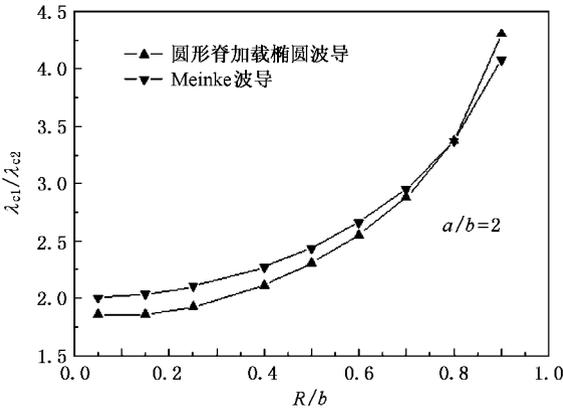


图 3 圆形脊加载椭圆波导与 Meinke 波导带宽比较

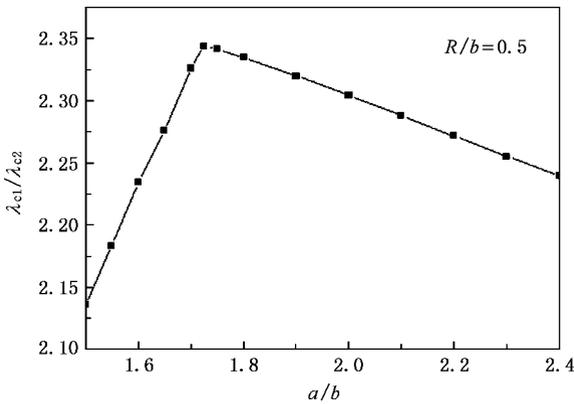


图 4 圆形脊加载椭圆波导长轴变化对带宽的影响

图 4 给出当椭圆短轴与脊半径不变时椭圆长轴变化对脊波导带宽的影响.当椭圆离心率较小时,椭圆长轴的增加导致最低模式 ${}_{c}H_{11}$ 截止频率降低而第一高次模 ${}_{s}H_{11}$ 截止频率升高使得带宽增加较快.但由于这时的第二高次模 ${}_{c}H_{21}$ 的截止频率随长轴增加而降低.当 $R/b = 0.5, a/b = 1.71$ 时 ${}_{c}H_{21}$ 模式和 ${}_{s}H_{11}$ 模式截止频率相等,脊波导带宽获得最大值.随着椭圆长轴进一步增加, ${}_{c}H_{21}$ 模成为第一高次模,这时虽然主模截止频率继续下降,但 ${}_{c}H_{21}$ 模下降更快,导致脊波导的带宽减小.

波导加载矩形脊是一种常用结构,这里给出加载矩形脊椭圆波导带宽变化情况.图 5 和图 6 分别为脊宽和脊深变化对带宽的影响.从图 5 可以看到

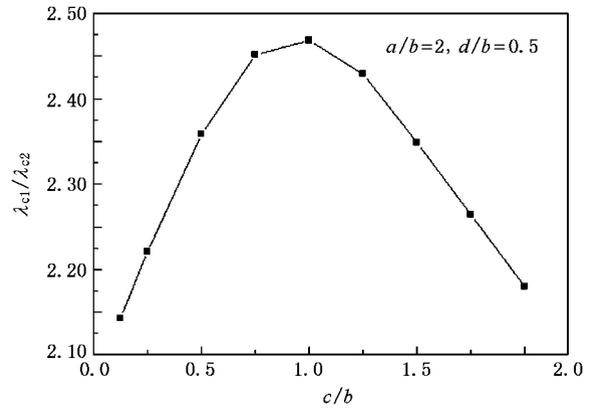


图 5 矩形脊加载椭圆波导脊宽变化对带宽的影响

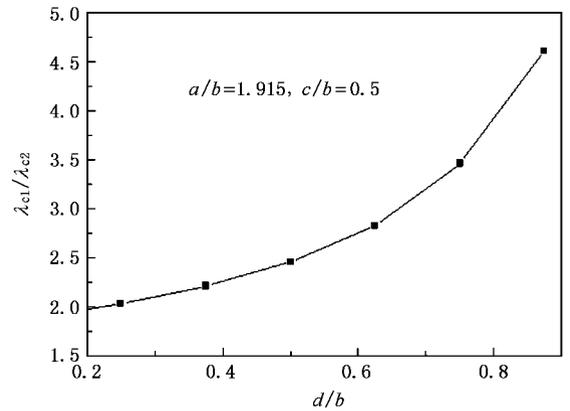


图 6 矩形脊加载椭圆波导脊深变化对带宽的影响

有一最佳宽度 $c = b$ 使得带宽最大,这是由于脊宽较窄时脊宽的增加使得最低模式 ${}_{c}H_{11}$ 截止频率降低而第一高次模式 ${}_{c}H_{21}$ 的截止频率增加,而当脊宽大于脊深两倍时 ${}_{c}H_{11}$ 模式截止频率开始增加而 ${}_{c}H_{21}$ 的截止频率降低,从而使得带宽下降.图 6 为脊深加大使得带宽增加的情况,这与普通脊加载矩形波导的性质一样.

4. 结 论

本文采用 Rayleigh-Ritz 法和多项式表示对两种脊加载椭圆波导进行了分析.对 TE 模式,这种方法适合任意形状的脊波导.对 TM 模式,由于限制函数的存在,只能分析单一函数描述的脊(如圆/椭圆形脊)的情况.对加载圆形脊椭圆波导,TE, TM 模式的数值计算与 HFSS 电磁软件仿真结果均能很好地符合.在脊半径较大时带宽接近甚至超过 Meinke 波导.椭圆长轴增加导致第一高次模式 ${}_{s}H_{11}$ 被 ${}_{c}H_{21}$ 代

替,这样椭圆长/短轴比有一最佳值使得带宽最大.对于矩形脊加载椭圆波导,脊宽增加使得主模截止频率降低到一定值后开始增加,而第一高次模 $c_{H_{21}}$ 截止频率先增加再降低,从而也存在一个最大带宽

的脊宽尺寸.最后分析了脊深变化的影响,脊深加大带宽也随着增加.本文研究所得到的脊加载椭圆波导带宽随结构尺寸的变化而改变的结果,对实际脊波导设计具有指导意义.

- [1] Montgomery J R 1971 *IEEE Trans. Micro. Theory Tech.* **19** 547
- [2] Hamid A K 2004 *J. of Electromagn. Waves and Appl.* **18** 1427
- [3] Stankovic L, Jovicevic S 1990 *IEEE Trans. Micro. Theory Tech.* **38** 296
- [4] Laura P A A, Saffell B Jr 1967 *J. Acoust. Soc. Am.* **41** 836
- [5] Davies J B, Kretschmar J G 1972 *Proc. Inst. Electr. Eng.* **119** 519
- [6] Wang B K, Lam K Y, Leong M S *et al* 1994 *Proc. Inst. Electr. Eng.* **141** 483
- [7] Lin S L, Li L W, Yeo T S *et al* 2000 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **48** 876
- [8] Lin S L, Li L W, Yeo T S *et al* 2001 *IEEE Micro. Wireless Components Lett.* **11** 388
- [9] Cooray F R 2005 *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **53** 3255
- [10] Jim J M 1993 *The Finite Element Method in Electromagnetics* (New York : Wiley)
- [11] Golub G H, Van Loan C F 1996 *Matrix Computations* (Baltimore : Johns Hopkins University Press)
- [12] Wei Y Y, Wang W X, Gong Y B, Zhou P 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 949 (in Chinese) [魏彦玉、王文祥、宫玉彬、周 鹏 2000 物理学报 **49** 949]
- [13] Bai N F, Liu X, Xiao J B, Zhang M D, Sun X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4933 (in Chinese) [柏宁丰、刘 旭、肖金标、张明德、孙小菡 2005 物理学报 **54** 4933]
- [14] Kretschmar J G 1970 *IEEE Trans Micro. Theory Tech.* **18** 547
- [15] Meinke H H, Lange K P, Ruger J F 1963 *Proc. IEEE* **51** 1436

Analysis of ridged elliptical waveguide by polynomial representation^{*}

Xu Jin[†] Wang Wen-Xiang Yue Ling-Na Gong Yu-Bin Wei Yan-Yu

(College of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

(Received 4 March 2007 ; revised manuscript received 3 April 2007)

Abstract

Application of ridged rectangular and circular waveguides has been found in many areas. In this paper, with the Rayleigh-Ritz method and polynomial representation, the wave propagation characteristics in the ridged elliptical waveguide are analyzed. The numerical results are in good agreement with calculation using electromagnetic field simulation software. The variation of bandwidth with physical dimensions has been studied. It is helpful for optimizing this kind of structure.

Keywords : Rayleigh-Ritz method, elliptical waveguide, ridged

PACC : 4110F, 0365D

^{*} Project supported by the State Key Program of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60532010), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60401005), the Fok Ying-Tong Education Foundation for Young Teachers in the Higher Education Institutions of China (Grant No. 91063).

[†] E-mail : alionxj@uestc.edu.cn