

# 非线性左手材料中的二次谐波<sup>\*</sup>

陈 亮<sup>†</sup> 梁昌洪 党晓杰

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

(2007 年 1 月 2 日收到 2007 年 3 月 24 日收到修改稿)

基于电磁场理论,推导出无耗非线性左手材料中二次谐波的曼利-诺关系,及相位匹配条件下正向基波与逆向二次谐波的能量转换过程及其空间分布.验证了可将无耗非线性左手材料的入射面作为反射镜,把能量以二次谐波的形式反射.同时分别给出有限厚度介质板中基波和二次谐波的场强分布数值结果,验证了结论的正确性.最后从相位失配角度说明了相位匹配是分析非线性左手材料二次谐波的重要条件.这为研究左手材料的非线性理论奠定了基础.

关键词:左手材料,非线性效应,二次谐波,相位匹配

PACC:4110H

## 1. 引 言

介电常数  $\epsilon$  和磁导率  $\mu$  是描述物质基本电磁性质的两个重要参数,决定着电磁波在物质中的传播特性.左手材料(left-handed metamaterials)是一种特殊微结构周期排列的复合介质材料,其特性受控于结构单元几何形状及其空间分布,能同时得到负介电常量和负磁导率<sup>[1]</sup>.左手材料中传播的电磁场分量  $E, B$  与波矢  $k$  满足“左手定则”,电磁波的相速度与群速度方向相反,从而呈现出许多奇异的物理光学特性,如逆 Doppler 效应、逆 Cherenkov 效应、完美透镜效应、负折射效应<sup>[2-11]</sup>.近年来对左手材料的研究主要集中在线性左手材料,即材料的介电常数和磁导率与电场和磁场的强度无关.然而,为了实现对左手材料的可调,即通过场强的变化来控制材料的传输特性,则需要对非线性左手材料进行深入地研究.

Zharov 等提出将构成左手系材料的带缝环状谐振器(split ring resonators, SRRs)和金属线条嵌入非线性电介质中会产生磁滞非线性效应,而非线性电介质(如二极管)填充 SRRs 的缝隙也会产生相应的非线性效应<sup>[12]</sup>.波在非线性左手材料中传播,将会产生许多奇异的物理现象,包括孤波、二次谐波的产

生以及三波耦合<sup>[13,14]</sup>等等.文献[15]和[16]分别研究了相位畸变小信号条件下的半无限大非线性左手材料和有限厚度非线性左手平板中的二次谐波现象.文中提出将近场转化为二次谐波,从而突破吸收这一左手媒质应用中的极限.文献[17]研究了相位匹配条件下的多稳态非线性二次谐波,假设入射基波为双负特性而二次谐波为双正特性,从而在非线性材料中产生反向流动的奇异现象.

本文推导出无耗非线性左手材料中二次谐波混合基本方程及曼利-诺关系,分别分析了有限厚度和半无限大非线性左手平板中,相位匹配条件下正向基波与逆向二次谐波的能量转换过程和空间分布,发现了一些特殊的性质.同时给出有限厚度平板中场强分布数值结果,对文中结论进行了验证.最后从相位失配角度说明了相位匹配是分析非线性左手材料二次谐波的重要条件.

## 2. 非线性左手材料的二次谐波混合基本方程及曼利-诺关系

### 2.1. 模型及基本方程

为保证储能为正,实际左手材料必然是色散及有耗的<sup>[18]</sup>,然而损耗对非线性左手材料中各次谐波

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 60601028)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: chli198301@tom.com

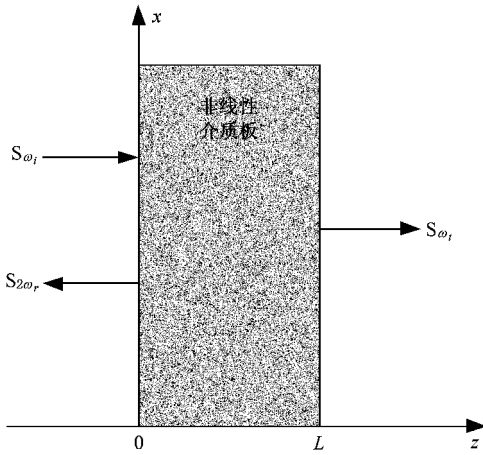


图 1 无耗非线性介质板模型

解影响很小<sup>[19]</sup>. 假设一无耗非线性介质板 (如图 1), 厚度为  $L$ . 该介质在基频  $\omega$  处表现出双负特性 ( $\mu(\omega) < 0, \epsilon(\omega) < 0$ ), 而在二次谐波  $2\omega$  处, 表现出双正特性 ( $\mu(2\omega) > 0, \epsilon(2\omega) > 0$ )<sup>[17]</sup>. 一基频  $\omega$  的平面波  $s_\omega$  沿  $z$  方向垂直入射介质板, 假设基波在  $z = 0$  处全入射, 由于实际中基波产生的反射只在介质外产生波形叠加, 而本文主要讨论介质中波的变化过程, 并分别得到各次谐波分量的数值解, 故在分析过程中忽略基波的反射. 由于材料在基频表现双负特性, 基波矢  $k_\omega$  方向与  $s_\omega$  相反, 沿  $-z$  方向. 根据相位匹配条件,  $k_{2\omega} = 2k_\omega$ , 且  $2\omega$  处材料为双正, 二次谐波的波矢  $k_{2\omega}$  与能流  $s_{2\omega}$  同向, 沿  $-z$  方向, 入射平面波表示为

$$H(\omega, z) = h(\omega, z)e^{j\phi_\omega}/2, \quad (1)$$

式中  $\phi_\omega$  为相位,  $h(\omega, z)$  为振幅.

考虑二次谐波的产生过程, 除了产生的  $2\omega$  和频外, 还应考虑得到  $\omega$  的差频过程. 而左手材料的非线性效应主要由波的磁分量引起<sup>[19]</sup>, 则无耗均匀磁性介质的非线性波动方程为

$$\begin{aligned} &\nabla^2 H(2\omega, z) + \epsilon(2\omega)\mu(2\omega)\frac{(2\omega)^2}{c^2}H(2\omega, z) \\ &= -\frac{(2\omega)^2}{c^2}\chi_{2\omega}H^2(\omega, z), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\nabla^2 H(\omega, z) + \epsilon(\omega)\mu(\omega)\frac{(\omega)^2}{c^2}H(\omega, z) \\ &= -\frac{(\omega)^2}{c^2}\chi_{2\omega}H(2\omega, z)H^*(\omega, z), \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\chi_{2\omega}$  为二阶非线性磁化率张量<sup>[16]</sup>,  $\chi_{2\omega} = \frac{(\pi a^2)^3 \omega_0^4}{c^3 d^3 U_c R_d \omega^2} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^{-2}$ ,  $a$  为谐振环半径,  $R_d$  为二

极管电压为零时的微分电阻,  $U_c$  为由二极管伏安特性  $I = I_0(e^{U/U_c} - 1)$  定义的特性参数.

尽管该介质无耗, 但由于非线性效应关系, 引起波波相互作用. 对频率为  $\omega$  和  $2\omega$  的谐波而言, 可能有部分能量耦合至其他谐波分量上去, 或者其他谐波的能量耦合至该分量. 故  $H(\omega, z)$  和  $H(2\omega, z)$  为空间坐标的函数, 在小信号条件下, 根据微扰理论, 假设  $H(\omega, z)$  和  $H(2\omega, z)$  为  $z$  的慢变化函数, 可得到二次谐波的混合基本方程

$$\begin{aligned} \frac{dH(2\omega, z)}{dz} &= j\frac{2\epsilon(2\omega)\omega^2}{k_{2\omega}c^2} \\ &\times \chi_{2\omega}H^2(\omega, z)\exp(-j\Delta kz), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH(\omega, z)}{dz} &= j\frac{\epsilon(\omega)\omega^2}{2k_\omega c^2}\chi_{2\omega}H(2\omega, z) \\ &\times H^*(\omega, z)\exp(j\Delta kz), \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\Delta k = k_{2\omega} - 2k_\omega$ .

### 2.2. 左手材料中的曼利-诺关系

左手材料非线性系统与其他的非线性系统一样, 在频率变换的过程中, 所有频率分量的总能量应该是守恒的. 根据波的混合方程, 由(4)式乘以  $H^*(2\omega, z)k_{2\omega}/\epsilon(2\omega)$  与(5)式的共轭乘以  $H(\omega, z)k_\omega/\epsilon(\omega)$  相加得到

$$\begin{aligned} &\frac{k_\omega}{\epsilon(\omega)}\frac{d|H(\omega, z)|^2}{dz} \\ &+ \frac{k_{2\omega}}{2\epsilon(2\omega)}\frac{d|H(2\omega, z)|^2}{dz} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

而能流可表示为  $s = |H(\omega)|^2 k_\omega/\epsilon(\omega)$ , 且相位匹配条件  $k_{2\omega} = 2k_\omega$ , 假设  $\mu(\omega) = -\mu(2\omega)$ , 则  $\epsilon(\omega) = -\epsilon(2\omega)$ . (6)式积分得到

$$|H(\omega, z)|^2 - |H(2\omega, z)|^2 = c. \quad (7)$$

上式为曼利-诺关系的另一表示形式,  $c$  为积分常数. 而右手材料中的曼利-诺关系<sup>[20]</sup>为

$$|H(\omega, z)|^2 + |H(2\omega, z)|^2 = c. \quad (8)$$

两者表达式上的区别, 决定了材料中基波和二次谐波能量分布的不同, 如图 2.

### 3. 非线性左手平板中的二次谐波

基频  $\omega$  的平面波垂直入射无耗非线性左手平板后, 一路上不断地感生二阶非线性磁化强度, 成为引起二次谐波的波源, 它产生的辐射波向相反方向输出平面  $z = 0$  处传播. 由能量守恒

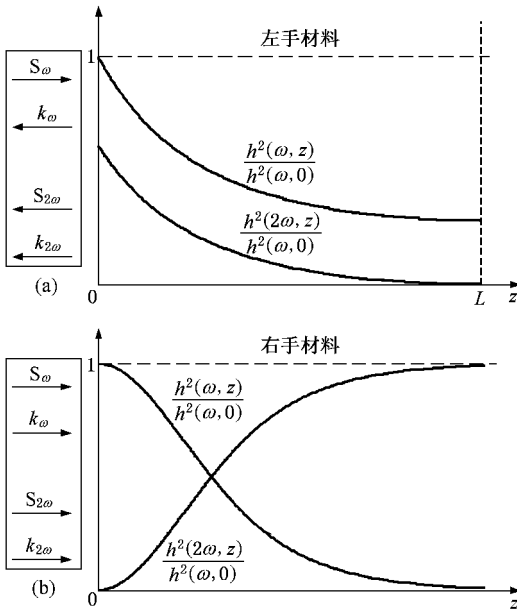


图 2 相位匹配条件下,基波和二次谐波的归一化能量分布随距离  $z$  的变化曲线 (a)左手材料 (b)右手材料

$$s(2\omega, iz) + s(\omega, iz) = s(2\omega, 0) + s(\omega, 0), \quad (9)$$

$$|H(\omega, iz)|^2 - |H(2\omega, iz)|^2 = |H(\omega, 0)|^2 - |H(2\omega, 0)|^2. \quad (10)$$

将上式与平面波表达式(1)代入波的混合方程(4)式中,在相位匹配条件下( $\Delta k = 0$ ),得到

$$\begin{aligned} & \frac{dh(2\omega, iz)}{dz} \\ &= -\frac{\epsilon(2\omega)\omega^2}{k_{2\omega}c^2} \chi_{2\omega} [h^2(2\omega, iz) + h^2(\omega, 0) - h^2(2\omega, 0)] \exp\left[j\left(2\phi_{\omega} - \phi_{2\omega} - \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad (11) \end{aligned}$$

因为上式除指数项外,其他各项都为实数,故必须有  $2\phi_{\omega} - \phi_{2\omega} - \pi/2 = 0$ ,即基频与二次谐波相位差为常数  $\pi/2$ ,这与双正非线性材料中情况一致。

左手平板中二次谐波能流方向  $s_{2\omega}$  与基波能流方向  $s_{\omega}$  相反,决定边界条件  $h(2\omega, L) = 0$ ,利用积分  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ ,可求得(11)式的解为

$$h(2\omega, iz) = \sigma \tan[\sigma\kappa(L - z)]. \quad (12)$$

上式即为介质板中二次谐波的场分布表达式,式中  $\sigma = \sqrt{h^2(\omega, 0) - h^2(2\omega, 0)}$ ,  $\kappa = \epsilon(2\omega)\omega^2 \chi_{2\omega}/k_{2\omega}c^2$ .

同样,根据(10)式可得基波在介质板中的场分布表达式

$$h(\omega, iz) = \sigma \sec[\sigma\kappa(L - z)]. \quad (13)$$

图 2(a)即为介质板中归一化能量分布图,可见介质板中基波能量逐渐减小,转化为二次谐波,而由于二次谐波能流方向相反,能量同样随着  $z$  的增大而减小,在  $z = L$  处减小为 0,且两者能量之差处处相等。

当左手平板为半无限大时,即在  $z > 0$  的区域介质板厚度  $L \rightarrow \infty$ ,在相位匹配条件下,由于基波能量不断转化为二次谐波,同时两者能流反向,导致在  $z \rightarrow \infty$  处基波和二次谐波能量都减小为零,而在  $z = 0$  处二者大小相等。边界条件  $h(2\omega, 0) = h(\omega, 0)$ ,即入射波能量全部转化为反射的二次谐波,从而验证了无耗非线性左手材料的入射面作为反射镜,其反射效率可达到 100%。再代入(10)能量守恒关系,得到  $h(2\omega, iz) = h(\omega, iz)$ 。重新求解方程(11),可得场分布表达式

$$h(2\omega, iz) = h(\omega, iz) = \frac{h(\omega, 0)}{1 + h(\omega, 0)\kappa z}. \quad (14)$$

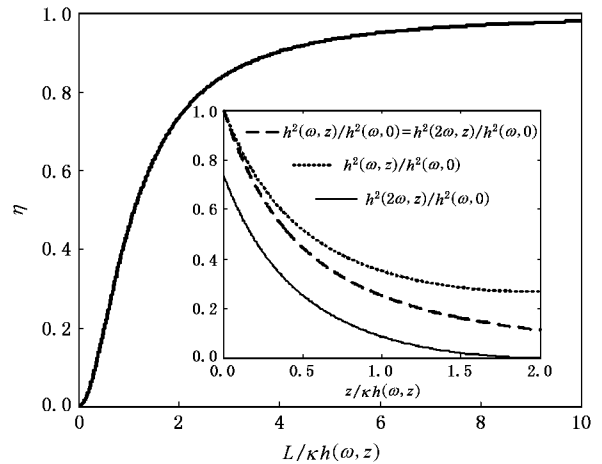


图 3 二次谐波转化率随归一化介质板厚度  $L/kh(\omega, z)$  的变化曲线(插图为基波的转化系数和二次谐波的反射系数随归一化坐标系数  $z/kh(\omega, z)$  的变化曲线)

图 3 为输入基波向输出二次谐波的能量转换率  $\eta$  与归一化介质板厚度  $L/kh(\omega, z)$  之间的关系,  $\eta = h^2(2\omega, 0)/h^2(\omega, 0)$ 。可见随着介质板厚度增大,基波向二次谐波的转换率逐渐变大,当板厚  $L \rightarrow \infty$  时,  $\eta \rightarrow 1$ 。图中插图为  $L/kh(\omega, z) = 2$  时介质板内能量分布图,图中点线为基波转化系数  $\eta^2(\omega, z)/h^2(\omega, 0)$  随  $z/kh(\omega, z)$  变化曲线,实线为二次谐波转化系数  $h^2(2\omega, z)/h^2(\omega, 0)$  随  $z/kh(\omega, z)$  变化曲线,虚线为介质板厚度无限大时,基波与二次谐波能量处处相同,  $h^2(\omega, z)/h^2(\omega, 0) = h^2(2\omega, z)/h^2(\omega, 0)$ ,即基波的能量完全转化为二次谐波。

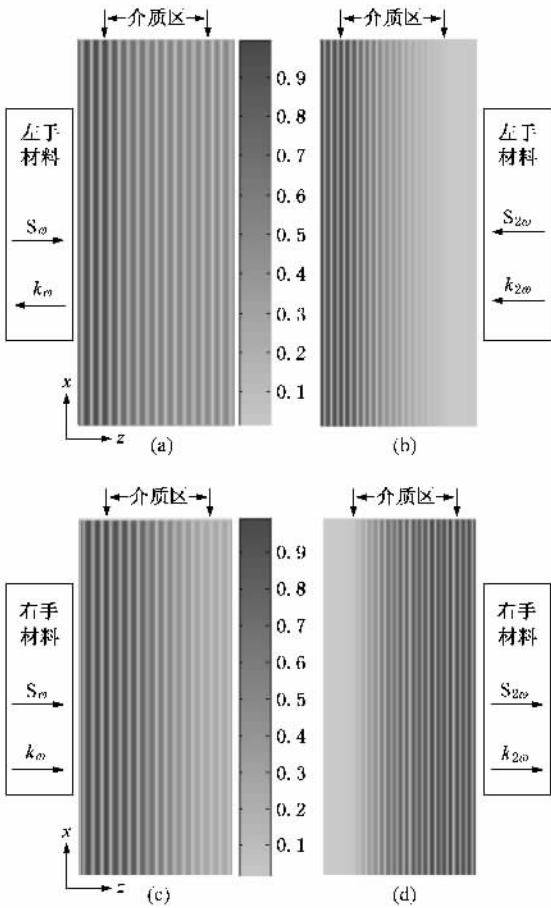


图4 场强分布图 (a)左手非线性材料中基波 (b)左手非线性材料中二次谐波 (c)右手非线性材料中基波 (d)右手非线性材料中二次谐波

为验证上述结论,应用文献[17]中模型 $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ ,  $\mu(\omega) = 1 + F\omega^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$ , 分别选择参数  $f_0 = 5 \text{ GHz}$ ,  $f_p = 7 \text{ GHz}$ ,  $F = 0.3$ ,  $a = 3 \text{ mm}$ ,  $d = 8 \text{ mm}$ ,  $U_c R_d = 1$  相位匹配的基频为  $f_F = 5.537 \text{ GHz}$ , 计算得到介质板厚度为  $L/\kappa h(\omega, z) = 2$  时的场强分布数值结果,如图4(a)为基波场强分布,图4(b)为二次谐波场强分布,可以看出介质板内基波场强沿  $z$  方向逐渐减小,而波形更密的二次谐波场强沿  $-z$  方向由 0 逐渐增大.同时计算得到了右手材料中场分布数值结果,为保证相位匹配条件 $\epsilon(\omega)$ 和 $\mu(\omega)$ 均取左手材料中该值的绝对值,而其他值不变.图4(c)为基波场强分布,对比图4(b)和图4(d),可观察到二次谐波在左、右手材料中传播方向相反.

#### 4. 相位失配条件下左手材料中的二次谐波

相位失配,即  $\Delta k \neq 0$ ,在小信号近似条件下,仍能求解(11)式,假定  $dH(\omega, z)/dz \approx 0$ ,  $H(\omega, z) = H(\omega, 0)$ (4)式改写为

$$dH(2\omega, z)/dz = j2\kappa H^2(\omega, 0) \exp(-j\Delta k z), \quad (15)$$

边界条件  $H(2\omega, L) = 0$ , 积分后可得

$$H(2\omega, z) = -j2\kappa H^2(\omega, 0) \times \frac{2\text{sin}[\Delta k(L-z)2] \exp(-j\Delta k(L+z)2)}{\Delta k}, \quad (16)$$

振幅为

$$|H(2\omega, z)| = 4\kappa h^2(\omega, 0) \left| \frac{\text{sin}[\Delta k(L-z)2]}{\Delta k} \right|. \quad (17)$$

可见,在相位失配时,二次谐波的振幅在零与最大值  $4\kappa h^2(\omega, 0)/\Delta k$  之间振荡,振荡周期为  $T = \Delta k/4\pi$ .当相位失配程度增大时,二次谐波的幅度减小,这正说明了文中讨论波的耦合时没有考虑更高次谐波的原因.因为在二次谐波满足相位匹配时,更高次谐波与基波的失配程度更为严重,因而它们的振幅要比二次谐波小得多.

#### 5. 结 论

基于电磁场理论,从理论上推导了无耗非线性左手材料的曼利-诺关系.根据微扰理论,得到小信号条件下的二次谐波的混合方程,分别分析了相位匹配条件下,有限大和半无限大无耗非线性左手介质平板中基波与二次谐波的能量转换过程和空间分布,由于两者能流方向相反,能量均沿基波入射方向由大到小分布.板厚无限大时,两者能量大小相同,即验证了可将无耗非线性左手材料的入射面作为反射镜,把能量以二次谐波的形式反射.同时给出有限厚度介质板中场强分布数值结果,验证了文中结论的正确性.

最后分析了相位失配条件下,失配程度对二次谐波幅度的影响,说明了相位匹配是分析非线性左手材料二次谐波现象的重要条件.本文的工作,将非线性理论扩展到了左手材料的领域,为实现对左手材料的可调奠定了基础.

- [ 1 ] Veselago V G 1968 *Sov. Phys. Usp.* **10** 509
- [ 2 ] Luo C Y ,Ibanescu M H ,Johnson S G *et al* 2003 *Science* **299** 368
- [ 3 ] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966
- [ 4 ] Fang N ,Zhang X 2003 *Appl. Phys. Lett.* **82** 161
- [ 5 ] Wiltshire M C K ,Pendry J B ,Young I R *et al* 2001 *Science* **291** 849
- [ 6 ] Gomez S G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 77401
- [ 7 ] Shen J T ,Platzman P M 2002 *Appl. Phys. Lett.* **80** 3286
- [ 8 ] Houck A A ,Brock J B ,Chuang I L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 137401
- [ 9 ] Chen L ,He S L ,Shen L F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2386 ( in Chinese ) [ 陈 龙、何塞灵、沈林放 2003 物理学报 **52** 2386 ]
- [ 10 ] Zhang G M ,Peng J C ,Jian Z J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1846 ( in Chinese ) [ 张高明、彭景翠、翦知渐 2006 物理学报 **55** 1846 ]
- [ 11 ] Zheng Q ,Zhao X P ,Fu Q H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5683 ( in Chinese ) [ 郑 晴、赵晓鹏、付全红 2005 物理学报 **54** 5683 ]
- [ 12 ] Zharov A A ,Shadrivov I V ,Kivshar Y S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 03740121
- [ 13 ] Shadrivov I V ,Kivshar Y S 2005 *J. Opt. A : Pure. Appl. Op.* **7** 568
- [ 14 ] Shadrivov I V ,Sukhorukov A A ,Kivshar Y S 2004 *Phys. Rev. E* **69** 01661721
- [ 15 ] Agranovich V M ,Shen Y R ,Baughman R H ,Zakhidov A A 2004 *Phys. Rev. B* **69** 165112
- [ 16 ] Zharov A A ,Zharova N A ,Shadrivov I V ,Kivshar Y S 2005 *Appl. Phys. Lett.* **87** 091104
- [ 17 ] Shadrivov I V ,Zharov A A ,Kivshar Y S 2006 *J. Opt. Soc.* **23** 529
- [ 18 ] Smith D R ,Kroll N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2933
- [ 19 ] Shadrivov I V ,Zharov A A ,Zharova N A ,Kivshar Y S 2005 *Radio Science* **40** 003191
- [ 20 ] Manley J M ,Rowe H E 1959 *Proc. IRE* **47** 2115

## Second-harmonic generation in nonlinear left-handed metamaterials \*

Chen Liang<sup>†</sup> Liang Chang-Hong Dang Xiao-Jie

( National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology ,Xidian University ,Xi 'an 710071 ,China )

( Received 2 January 2007 ; revised manuscript received 24 March 2007 )

### Abstract

Based on the electromagnetic theory ,the Manly-Rowe relations for nonlinear left-handed metamaterials are studied. Energy conversion process and spatial distribution of forward-propagating wave of fundamental frequency and backward-propagating second harmonic wave under phase-matching condition are investigated. That a surface of nonlinear left-handed metamaterials operates as an effective mirror which reflects the energy in the form of second harmonics is demonstrated. Numerical results of field intensity distribution of a finite thickness metamaterial slab is given. Finally ,the importance of phase-matching condition to the investigation of nonlinear left-handed metamaterials is illustrated from the viewpoint of phase-mismatching. This work provides a basis for studying nonlinear left-handed metamaterials.

**Keywords** : left-handed metamaterials , nonlinear effect , second harmonics , phase-matching condition

**PACC** : 4110H

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60601028 ).

<sup>†</sup> E-mail : chli198301@tom.com