

基于 Fourier-Bessel 级数的 Bessel 型 超声场二次谐波近场特性研究*

杜宏伟 彭 虎 江朝晖 冯焕清

(中国科学技术大学电子科学与技术系, 合肥 230027)

(2006 年 12 月 18 日收到 2007 年 2 月 1 日收到修改稿)

将 Fourier-Bessel 级数引入 KZK 方程的求解, 用于计算黏滞媒质中零阶 Bessel 型超声场的二次谐波声场, 得到其级数形式的解析解, 并由此得出二次谐波声场在近场分布的一个新结论. 设声源表面声压分布为 $J_0(\alpha_0 r)$, 则二次谐波声压在近场的径向分布服从 $J_0^2(\alpha_0 r)$ 函数规律. 这一结论合理解释了相关的实验结果, 表明二次谐波声场在近场和远场有不同的径向分布, 从而解决了非线性 Bessel 型超声场二次谐波的近场分布问题. 研究还发现二次谐波声场具有类似基波声场的有限衍射特性, 给出了一个数值计算和仿真实例.

关键词: Fourier-Bessel 级数, KZK 方程, 非线性超声场, Bessel 波

PACC: 4325, 4335, 8760B, 0270

1. 引 言

Durnin^[1]于 1987 年得到了线性波动方程的一类非衍射通解, 在理论上预言了一种零阶 Bessel 波, 它在传播的过程中波束不会发散, 因此是一种非衍射波 (non-diffraction beam). 零阶 Bessel 波首先在光学实验中得到实现^[2]. 随后有限孔径的 Bessel 型超声换能器也被研制出来^[3]. 由于严格的非衍射波需要无限大的换能器孔径, 因此有限孔径 Bessel 型超声换能器的声场只能在一定距离内保持非衍射性, 所以又称为有限衍射声场 (limited diffraction sound field). Lu 对 Bessel 波的特性以及如何采用 Bessel 波实现高帧率超声成像进行了深入研究^[4-7].

非线性声学的理论和实验表明, 有限振幅声波在传播过程中会产生非线性效应, 因此可以利用人体组织自身产生的高次谐波进行超声成像, 目前非线性超声成像^[8]已成为一个研究热点, 它可以提高成像质量. 对非线性超声场的研究是非线性超声成像的基础. Qian 研究了非线性声传播的高阶近似^[9], 陆明珠等通过多目标控制实现了由非线性高强度聚焦超声场获得理想的温度场分布^[10], 薛洪惠等研究了聚焦超声波通过层状生物媒质的二次谐波声

场^[11]. Zhu 等用角谱方法研究了聚焦超声波通过层状生物媒质的非线性传播^[12], 李俊伦等研究了条状障碍物对非线性超声场的影响^[13]. KZK 方程是目前描述非线性超声场最为精确的方程, 它综合描述了超声传播过程中的衍射、非线性和吸收效应^[14], 求解 KZK 方程最常用的方法是频域、时域有限差分法^[15-17].

传统上对 Bessel 声场的研究多采用线性模型, 对其非线性特性的研究仍是当前非线性声学 and 超声学等领域的一个热点. 张宇、杜功焕研究了 Bessel 声场二次谐波的非衍射特性^[18]. Ding 研究了 Bessel 声场二次谐波的远场分布特性, 发现二次谐波在远场的径向分布服从 $J_0^2(2\alpha_0 r)$ 函数规律^[19]. Synnevag 通过实验研究了 Bessel 声场二次谐波的分布规律, 发现在近场区域二次谐波的波束宽度和基波相同, 但其声压幅度的主副瓣之比相对于基波分量有所增加^[20]. 但文章仅给出了实验结果, 并未进行理论研究.

到目前为止对于黏滞媒质中 Bessel 声场二次谐波的近场分布特性尚无理论研究报道, 主要难点在于如何由 KZK 方程的形式解推导出 Bessel 声场二次谐波的近场解析解. 本文提出了一种新方法, 解决了以上困难. 该方法将 Fourier-Bessel 级数引入 KZK

* 国家自然科学基金 (批准号: 60471057) 和中国科学技术大学青年科学基金 (批准号: KA2100230001) 资助的课题.

方程的求解,用于计算黏滞媒质中零阶 Bessel 型超声换能器的二次谐波声场,直接得到二次谐波声压在全场的级数解,由此得出二次谐波声场近场分布的一个新结论.设声源表面声压分布为 $J_0(\alpha_0 r)$,则二次谐波声压在近场的径向分布服从 $J_0^2(\alpha_0 r)$ 函数规律.这一结论合理解释了 Synnevag 的实验结果,表明二次谐波声场在近场和远场有不同的径向分布.研究还发现二次谐波声场具有类似基波声场的有限衍射特性.为了进一步验证以上结论,本文给出了一个数值计算和仿真实例.

文中最后讨论了 Bessel 声场二次谐波的特性对于非线性超声研究的意义.

2. 数学物理原理

2.1. Bessel 波

声波在均匀、各向同性媒质中传播的线性波动方程柱坐标形式为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

其中 $p(r, \phi, z, t)$ 为空间 (r, ϕ, z) 处、 t 时刻的声压, z 为传播方向.用分离变量法可得方程(1)的一类非衍射通解^[4,6,7],即

$$p_{J_n}(r, \phi, z, t) = J_n(\alpha_0 r) \cdot e^{in\phi} \cdot e^{i\beta_0 z} \cdot e^{-i\omega t} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

其中 $J_n(\cdot)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = (\omega/c)^2 = k^2$, k 为波数.注意到(2)式中 z 仅出现在 $e^{i\beta_0 z}$ 项中,因此声压 p_{J_n} 的幅度分布与声源的幅度分布呈同样的 Bessel 函数规律,即在整个声场中幅度的大小与分布均不随 z 变化,这种声场因此称为非衍射声场, p_{J_n} 所描述的一族声波称为 n 阶非衍射 Bessel 波.

特别地,当 $n=0$ 时,声场分布是轴对称的,与 ϕ 无关.相应的零阶 Bessel 波解为^[1,2,7]

$$p(r, z, t) = J_0(\alpha_0 r) \cdot e^{i\beta_0 z} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

2.2. KZK 方程

非线性超声研究中采用最多的模型方程是 KZK 方程,其一般形式如下^[15-17]:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \sigma \partial \tau} = ar_0 \frac{\partial^3 \bar{p}}{\partial \tau^3} + \frac{r_0}{2l_d} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \tau^2} + \frac{1}{4} \nabla_{\perp}^2 \bar{p}, \quad (4)$$

其中 $\bar{p} = p/P_0$ 为归一化声压, P_0 为声源表面峰值声压, p 为绝对声压; $\sigma = z/r_0$ 是归一化的轴向坐标, z 代表声传播方向, $r_0 = ka^2/2$ 是瑞利(Rayleigh)距离, k 为波数, a 为声源半径; $\tau = \omega(t - z/c) = \omega t - kz$ 是归一化延迟时间, ω 为基波角频率, c 为声速; $\alpha = D\omega^2/2c^3$ 是吸收系数, D 为声耗散率; $l_d = \rho_0 c^3 / \beta\omega P_0$ 是平面波在无损媒质中的冲击波形成距离, ρ_0 是媒质的静态密度, $\beta = 1 + B/2A$ 是媒质的非线性系数, B/A 是媒质的非线性参量; ∇_{\perp}^2 是径向 Laplace 算子,在直角坐标下的形式为 $(\partial^2/\partial \bar{x}^2) + (\partial^2/\partial \bar{y}^2)$,在极坐标下的轴对称形式为 $\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$ 其中 $\bar{x} = x/a$, $\bar{y} = y/a$ 及 $\xi = r/a$ 分别是归一化的直角坐标和径向坐标, r 是方程(1)中的径向坐标.

方程(4)右端三项分别描述了超声传播过程中的吸收、非线性和衍射效应.

2.3. 函数的 Fourier-Bessel 级数

根据特殊函数的相应理论,区间 $[0, l]$ 上的任意连续函数 $f(x)$,可以展开成如下 Fourier-Bessel 级数:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0\left(\frac{x_j}{l}x\right) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (5)$$

其中

$$A_j = \frac{\int_0^l x f(x) J_0\left(\frac{x_j}{l}x\right) dx}{\int_0^l x J_0^2\left(\frac{x_j}{l}x\right) dx} \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

x_j 是函数 $J_0(x)$ 的第 j 个零点.而

$$\int_0^l x J_0^2\left(\frac{x_j}{l}x\right) dx = \frac{l^2}{2} J_1^2(x_j), \quad (7)$$

因此有

$$A_j = \frac{2}{l^2 J_1^2(x_j)} \int_0^l x f(x) J_0\left(\frac{x_j}{l}x\right) dx. \quad (8)$$

一般地,(5)式右端的级数在 $[0, l]$ 上一致收敛,因此有 $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = 0$.

3. 基波和二次谐波声场解析解

3.1. 基波声场的解析解

对轴对称的圆形超声换能器,设基波声压和二

次谐波声压具有如下表达式：

$$\bar{p}_n(\xi, \sigma, \tau) = \bar{p}_n(\xi, \sigma) \exp(-i n \tau), \quad (n = 1, 2). \quad (9)$$

文献 19 给出了理想媒质中零阶 Bessel 声场基波和二次谐波的积分表达式,在本文所讨论的粘滞媒质中,考虑吸收效应,有^[16]

$$\bar{p}_1(\xi, \sigma) = \frac{2 \exp(-\alpha r_0 \sigma)}{i \sigma} \int_0^\infty \exp\left(i \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\sigma}\right) \times J_0\left(\frac{2\xi\xi'}{\sigma}\right) \bar{p}_1(\xi') \xi' d\xi', \quad (10)$$

$$\bar{p}_2(\xi, \sigma) = \frac{1}{2} \int_{\sigma'=0}^\sigma \int_{\xi=0}^\infty \frac{\xi'}{\sigma - \sigma'} \exp[-4\alpha r_0(\sigma - \sigma')] \times \exp\left[\frac{i\alpha(\xi^2 + \xi'^2)}{\sigma - \sigma'}\right] J_0\left(\frac{4\xi\xi'}{\sigma - \sigma'}\right) \times \bar{p}_1(\xi', \sigma') d\xi' d\sigma'. \quad (11)$$

(10) 式中的 $\bar{p}_1(\xi')$ 为换能器表面声压分布函数,应当指出 (10) 式和 (11) 式仅仅是一种形式解,对于具体的问题(如特定的声源条件)必须进行进一步的计算,才能求出具有明确物理意义的解析解,这正是该研究领域的一个主要难点.对于零阶 Bessel 声场,有

$$\bar{p}_1(\xi') = J_0(\alpha_0 \xi'), \quad (12)$$

其中 α_0 为 Bessel 函数的常值标量参数.

利用 Weber 积分公式

$$\int_0^\infty t e^{-u^2 t^2} J_n(vt) J_n(wt) dt = \frac{1}{2u^2} \exp\left(-\frac{v^2 + w^2}{4u^2}\right) I_n\left(\frac{vw}{2u^2}\right), \quad (13)$$

其中 $I_n(\cdot)$ 为第一类修正 Bessel 函数,且有

$$I_n(it) = i^n J_n(t). \quad (14)$$

把 (12) 式代入 (10) 式可得黏滞媒质中零阶 Bessel 声场基波声压为

$$\bar{p}_1(\xi, \sigma) = J_0(\alpha_0 \xi) \exp\left(-\frac{i}{4} \alpha_0^2 \sigma\right) \exp(-\alpha r_0 \sigma). \quad (15)$$

上式表明,在任意确定的轴向位置上,基波声压的径向分布都是相同的, $J_0(\alpha_0 \xi)$ 函数规律,因此是一种非衍射声场.但随着传播距离的增加,由于吸收效应的存在,基波声压幅度以指数规律衰减.

3.2. 二次谐波声场的解析解

下面重点讨论二次谐波声场的求解.

把 (15) 式代入 (11) 式可得

$$\bar{p}_2(\xi, \sigma) = \frac{\exp(-4\alpha r_0 \sigma)}{2} \int_0^\sigma \frac{\exp(2\alpha r_0 \sigma')}{\sigma - \sigma'}$$

$$\times \exp\left(\frac{i2\xi^2}{\sigma - \sigma'}\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \alpha_0^2 \sigma'\right) \times \left[\int_0^\infty \exp\left(\frac{i2\xi'^2}{\sigma - \sigma'}\right) J_0\left(\frac{4\xi\xi'}{\sigma - \sigma'}\right) \times J_0^2(\alpha_0 \xi') \xi' d\xi' \right] d\sigma'. \quad (16)$$

记 (16) 式中关于 ξ' 的积分为 I_1 , 并利用变量代换,则有

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_0^2} \int_0^\infty \exp\left[\frac{i2\xi'^2}{\alpha_0^2(\sigma - \sigma')}\right] J_0\left[\frac{4\xi\xi'}{\alpha_0(\sigma - \sigma')}\right] \times J_0^2(\xi') \xi' d\xi'. \quad (17)$$

考虑 Bessel 函数的性质

$$J_0(x) \approx \sqrt{2/\pi x} \cdot \cos(x - \pi/4), \quad x > 1,$$

因此,当 ξ' 充分大时, $J_0^2(\xi') = 1/\xi'$, 随着 ξ' 的增加它衰减很快,可近似认为其波形分布在有限区间 $[0, l]$ 上,在此之外其值为零.

这样,利用 (5) 式有

$$J_0^2(\xi') = \sum_{j=1}^\infty A_j J_0(\lambda_j \xi') \quad (0 \leq \xi' \leq l), \quad (18)$$

其中

$$A_j = \frac{2}{l^2 J_1^2(x_j)} \int_0^l \xi' J_0^2(\xi') J_0(\lambda_j \xi') d\xi', \quad \lambda_j = x_j/l.$$

(18) 式代入 (17) 式可得

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_0^2} \sum_{j=1}^\infty A_j \left\{ \int_0^\infty \exp\left[\frac{i2\xi'^2}{\alpha_0^2(\sigma - \sigma')}\right] J_0(\lambda_j \xi') \times J_0^2\left[\frac{4\xi\xi'}{\alpha_0(\sigma - \sigma')}\right] \xi' d\xi' \right\}. \quad (19)$$

利用 Weber 积分公式 (13) 得

$$I_1 = \frac{1}{\alpha_0^2} \sum_{j=1}^\infty A_j \left\{ \frac{i\alpha_0^2(\sigma - \sigma')}{4} \exp\left[\frac{\lambda_j^2 \alpha_0^2(\sigma - \sigma')}{8i}\right] \times \exp\left(-\frac{i2\xi^2}{\sigma - \sigma'}\right) J_0(\lambda_j \alpha_0 \xi) \right\}, \quad (20)$$

(20) 式代入 (16) 式可得

$$\bar{p}_2(\xi, \sigma) = \frac{i \exp(-4\alpha r_0 \sigma)}{8} \sum_{j=1}^\infty \left\{ A_j J_0(\lambda_j \alpha_0 \xi) \times \left\{ \int_0^\sigma \exp\left[\frac{\lambda_j^2 \alpha_0^2(\sigma - \sigma')}{8i}\right] \exp(2\alpha r_0 \sigma') \times \exp\left(-\frac{i}{2} \alpha_0^2 \sigma'\right) d\sigma' \right\} \right\}. \quad (21)$$

注意 (21) 式对于任意 σ 均成立,即对 Bessel 声场二次谐波的全场分布均成立.记 (21) 式中关于 σ' 的积分为 $I_2(\sigma, \lambda_j)$, 注意 I_2 和 λ_j 有关,但由于 $\lim_{j \rightarrow \infty} A_j = 0$,

因此 (21) 式中求和指标 j 的上限可以近似取为充分大的正整数 J , 当 $j > J$ 时, $A_j \approx 0$. 这样, $\lambda_j (j = 1, 2, \dots, J)$ 有界, 而 α_0 为固定常数, 因此在近场区域, 当 σ 充分小时 ($\sigma - \sigma' \rightarrow 0$), 故有 $\lambda_j^2 \alpha_0^2 (\sigma - \sigma') \rightarrow 0$. 于是 I_2 与求和指标 j 无关, 此时 (21) 式为

$$\begin{aligned} \bar{p}_2(\xi, \sigma) &\approx \frac{i \exp(-4\alpha r_0 \sigma)}{8} I_2(\sigma) \\ &\times \left[\sum_{j=1}^J A_j J_0(\lambda_j \alpha_0 \xi) \right] \\ &\approx \frac{i \exp(-4\alpha r_0 \sigma)}{8} I_2(\sigma) J_0^2(\alpha_0 \xi). \end{aligned} \quad (22)$$

从 (22) 式可知二次谐波声压的近场径向分布服从 $J_0^2(\alpha_0 \xi)$ 函数规律. 注意到 ξ, σ 和 r, z 仅差一比例系数, 因此在以上推导过程和结论中将变量 ξ, σ 换成 r, z 同样成立.

3.3. 分析与讨论

1) 由于本文和文献 [19] 都是对于 Bessel 声场的二次谐波特性进行研究, 因此应当指出它们的几点区别.

首先, 文献 [19] 研究的是 Bessel 声场的二次谐波在远场的分布特性, 而本文研究的是二次谐波在近场的分布特性, 因此在研究对象上区别于文献 [19].

其次, (17) 式是一个关于 Bessel 函数的无穷积分

$$\int_0^\infty e^{-u^2 x^2} J_0(vx) J_0^2(wx) x dx,$$

这一特殊函数积分无法直接得出结果. 文献 [19] 是

把 $J_0^2(x)$ 转化成 $J_0^2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2xs \sin t) dt$, 再代

入积分计算, 在计算过程中采用了数值方法最后得出远场声场 ($\alpha_0^2 \sigma$ 充分大) 的近似分布特性, 但对于近场区域, 则该方法无效. 本文则采用 Fourier-Bessel 级数展开的方法进行计算, 计算过程中没有采用数值近似, 因此在研究方法上不同于文献 [19].

最后, 文献 [19] 的结论对于近场不成立. 本文的研究则对于二次谐波的近场分布特性进行了描述, 结论表明二次谐波在近场具有完全不同于远场的分布特性, 因此在研究结论上不同于文献 [19].

此外, 文献 [19] 忽略了方程的吸收项, 这在一定程度上降低了计算的复杂度. 但其结论表明二次谐波沿轴向的幅度分布随传播距离的增加而趋于无穷大 (正比于 $\sqrt{\sigma}$), 这显然不符合客观情况, 其原因就

在于忽略了吸收效应. 事实上, 二次谐波沿轴向的分布有一个产生、增强、衰减的过程. 在接近换能器表面的近场区域, 二次谐波分量很小, 此后由于非线性效应其幅度逐渐增强, 而由于吸收效应的存在, 谐波分量在达到最大值后开始衰减, 并不会随着传播距离的增加趋于无穷大. 因此文献 [19] 的结论只能对于沿轴向的某一有限场区近似成立. 本文考虑了媒质的吸收效应, 按照本文的 (21) 式, 二次谐波沿轴向的幅度分布有一个指数衰减因子 $\exp(-4\alpha r_0 \sigma)$, 它描述了由吸收效应引起的二次谐波沿轴向的衰减. 由 (21) 式可以发现, 当 σ 充分大时, 二次谐波声场趋于 0, 这和现有的非线性声场理论与实验相符合.

2) 从 (21) 式可以看出, 对于远场区域 ($\sigma - \sigma' \rightarrow 0$) 的条件不能满足, 此时 I_2 和 λ_j 有关, 即 $I_2(\sigma, \lambda_j)$ 会影响 Fourier-Bessel 级数的系数分布, 从而二次谐波声压的径向分布不再服从函数规律. 关于远场声场的详细讨论可见文献 [19].

3) 由于 $\sigma = z/r_0$, 而 r_0 一般远大于 0, 因此对于近场区域, σ 充分小的条件完全可以满足. 以下文的计算参数为例, $r_0 \approx 1308 \text{ mm}$, 若 $z = 13 \text{ mm}$, 则 $\sigma \approx 0.01$.

4) 图 1 是函数 $J_0(x), J_0^2(x)$ 的波形图. 可以看出相对于 $J_0(x)$, 函数 $J_0^2(x)$ 衰减更快, 其主要能量集中在一个有限区间 $[0, l]$ 上. 事实上因为声源的孔径总是有限的, 因此其表面声压分布是函数在 $J_0(x)$ 一个有限区间 $[0, l]$ 上的截断, 这样本文上述的推导过程对于实际情况也是完全合理的. 文献 [7] 中的实验也证明了 Bessel 声场的能量在径向集中在一个有界区域内.

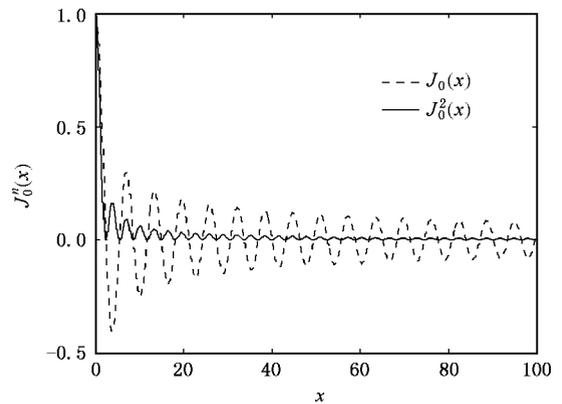


图 1 $J_0(x), J_0^2(x)$ 的波形图

5) 按照本文的结论, 在近场区域基波和二次谐波的径向分布分别服从 $J_0(x)$ 和 $J_0^2(x)$ 函数规律,

因此波束宽度相同. 二次谐波幅度的主瓣和第一副瓣之比即 $J_0^2(x)$ 的前 2 个极值点之比约为 16 dB. 这些都和文献 [20] 的结果符合较好.

6) 综合本文和文献 [19] 的结论, 二次谐波声场在近场和远场都是非衍射的, 仅在近场到远场的过渡区域其径向分布比较复杂, 因此可以认为二次谐波声场具有有限衍射特性.

4. 数值计算和仿真

采用频域有限差分方法求解 KZK 方程, 计算采

用文献 [7, 17] 中的参数.

基波频率 $f = 1 \text{ MHz}$, $\alpha_0 = 1.20245 \text{ mm}^{-1}$, $a = 25 \text{ mm}$, $c = 1.5 \times 10^6 \text{ mm/s}$, $\beta = 3.5$, $\alpha = 0.00253 \text{ Np/mm}$, $P_0 = 0.657 \text{ MPa}$, $l_d = 241.2 \text{ mm}$, 径向最大计算值取 $r_{\text{max}} = 250 \text{ mm}$, 即认为在此范围之外声场为零, 文献 [7] 中的实验结果表明这一假设是合理的. 轴向最大计算值取 $z_{\text{max}} = 210 \text{ mm}$. 径向、轴向步长分别记为 $\Delta\xi$, $\Delta\sigma$, 取 $\Delta\xi = 10^{-2}$, $\Delta\sigma = 10^{-4}$. 取 $t = 1 \text{ s}$, 即认为声场已处于稳态.

图 2 是二次谐波声压在不同轴向位置处的径向分布曲线. 为了和零阶 Bessel 函数进行对比, 各声压

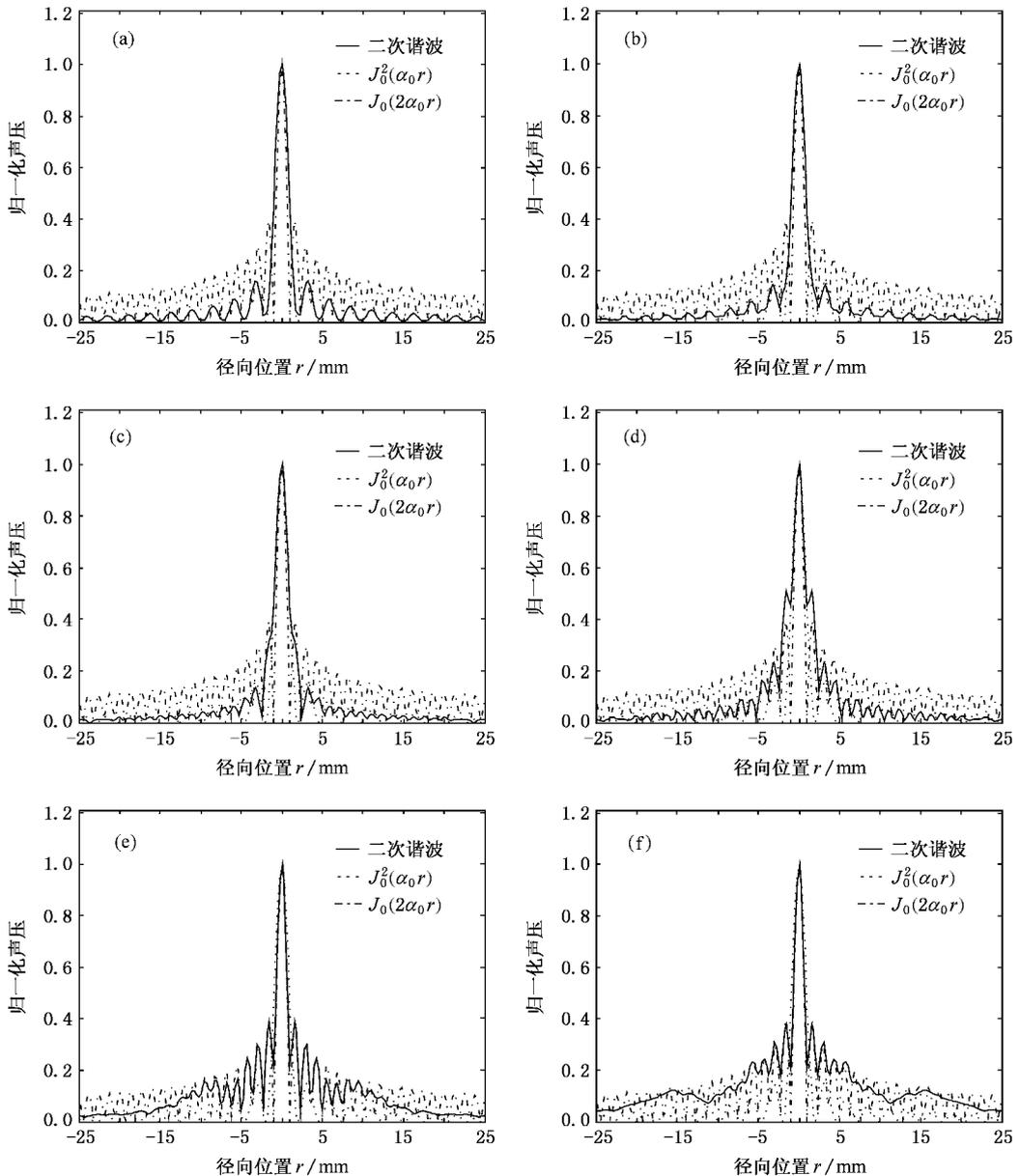


图 2 二次谐波声压幅度径向分布曲线 (a) $z = 10 \text{ mm}$ (b) $z = 20 \text{ mm}$ (c) $z = 30 \text{ mm}$ (d) $z = 50 \text{ mm}$ (e) $z = 100 \text{ mm}$; (f) $z = 150 \text{ mm}$

均用其峰值进行归一化.图 2(a)~(f)表明,二次谐波声压幅度在近场的径向分布和函数 $J_0(\alpha_0 r)$ 的波形一致,而随着传播距离的增加,各主副瓣根部出现“膨胀”现象,此后从各主副瓣根部“分裂”出新的副瓣,逐渐过渡到远场的 $J_0(2\alpha_0 r)$ 函数形状.这一现象和文献[20]中的结果一致,同时也验证了本文和文献[19]中关于二次谐波在近场和远场分布的结论.

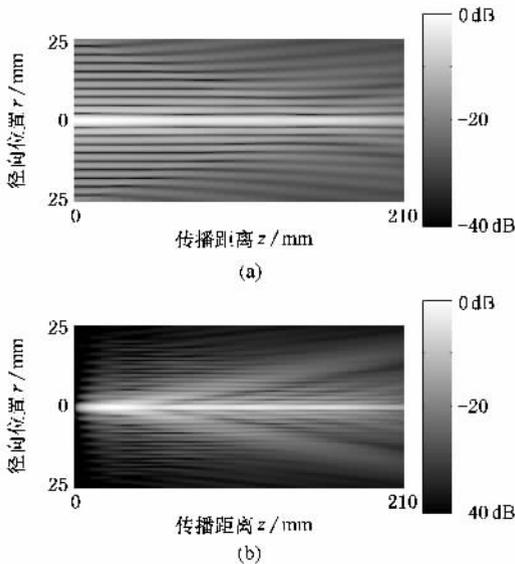


图 3 基波和二次谐波声场仿真图 (a)基波声场 (b)二次谐波声场

图 3 是基波和二次谐波声场的仿真图,可以看出由于超声换能器的孔径有限,因此基波和二次谐

波声场都只是具有有限衍射特性,波束存在发散现象.并且由于吸收效应的存在,在传播距离比较大时,声场衰减很大.

5. 结论与意义

本文通过 Fourier-Bessel 级数展开的方法计算出黏滞媒质中零阶 Bessel 声场二次谐波声压在全场的级数解,由此得出二次谐波声场在近场分布的一个新结论.该结论表明二次谐波声场同样具有有限衍射特性,但在近场和远场区域有不同的径向分布.设声源表面声压分布为 $J_0(\alpha_0 r)$,则二次谐波声压在近场的径向分布服从 $J_0^2(\alpha_0 r)$ 函数规律.这一新的研究结论合理解释了相关的实验结果.文章同时给出了数值计算和仿真实例,进一步验证了以上结论.

按照本文的结论,Bessel 型超声换能器基波声场的主瓣和第一副瓣的幅度比约为 8 dB,二次谐波声场在近场区域的主瓣和第一副瓣的幅度比可以提高到约为 16 dB,而波束宽度不变;在远场区域波束宽度只有基波声场波束宽度的 1/2,但主瓣和第一副瓣的幅度比低于 8 dB.这意味着利用二次谐波进行成像在近场区域可以有效降低副瓣对成像产生的影响,而在远场区域则可以提供较高的图像分辨率.

随着非线性超声研究的深入,新的理论与方法不断涌现^[21-28],大大促进了医学超声的发展.本文的研究结果对非线性超声的研究具有一定的理论意义.

- [1] Durnin J 1987 *J. Opt. Soc. Am.* **4** 651
- [2] Durnin J, Miceli J J, Jr, Eberly J H 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1499
- [3] Hsu D K, Margetan F J, Thompson D O 1989 *Appl. Phys. Lett.* **55** 2066
- [4] Lu J Y, Greenleaf J F 1995 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **42** 649
- [5] Lu J Y, Zou H H, Greenleaf J F 1995 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **42** 850
- [6] Lu J Y 1997 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **44** 181
- [7] Paul D F, Cheng J Q, Lu J Y 2002 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **49** 1179
- [8] Burns P N, Simpson D H 2000 *Ultrasound in Med. & Biol.* **26** 19
- [9] Qian Z W 1995 *Chin. Phys.* **4** 670
- [10] Lu M Z, Wan M X, Shi Y, Song Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 928 (in Chinese) [陆明珠, 万明喜, 石屹, 宋延淳 2002 物理学报 **51** 928]
- [11] Xue H H, Liu X Z, Gong X F, Zhang D 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5233 (in Chinese) [薛洪惠, 刘晓宙, 龚秀芬, 章东 2005 物理学报 **54** 5233]
- [12] Zhu X F, Zhou L, Zhang D, Gong X F 2005 *Chin. Phys.* **14** 1594
- [13] Li J L, Liu X Z, Zhang D, Gong X F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2809 (in Chinese) [李俊伦, 刘晓宙, 章东, 龚秀芬 2006 物理学报 **55** 2809]
- [14] Kuznetsov V P 1971 *Sov. Phys. Acoust.* **16** 467
- [15] Li Y D, Zagzebski J A 2000 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **47** 1000
- [16] Aanonsen S I, Barkve T, Tjøtta J A, Tjøtta S 1984 *J. Acoust. Soc. Am.* **75** 749
- [17] Baranger T N, Closset E, Cathignol D 2001 *IEEE Ultrasonics Symposium* 479

- [18] Zhang Y ,Du G H 1997 *Technical Acoustics* **16** 128 (in Chinese)
[张 宇、杜功焕 1997 声学技术 **16** 128]
- [19] Ding D S ,Lu Z H 1996 *Appl. Phys. Lett.* **68** 608
- [20] Synnevag J F ,Holm S 1998 *IEEE Ultrasonics Symposium* 1885
- [21] Hao X H ,Gao S K ,Gao X R 1999 *IEEE Trans. Med. Imag.* **18** 787
- [22] Shou W D ,Duan S M ,He P Z ,Xia R M ,Qiari D C 2006 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **53** 564
- [23] Zhang Y ,Wang Y Y ,Wang W Q 2003 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelect. Freq. Contr.* **50** 561
- [24] Tao Q ,Wang Y Y ,Peter F ,Wang W Q ,Jose C 2004 *Ultrasound in Med. & Biol.* **30** 369
- [25] Wang W Q ,Wang Y Y ,Yu J G 2002 *Technical Acoustics* **21** 4 (in Chinese) [王威琪、汪源源、余建国 2002 声学技术 **21** 4]
- [26] Gao S K 2002 *Chinese Journal of Medical Instrumentation* **26** 391 (in Chinese) [高上凯 2002 中国医疗器械杂志 **26** 391]
- [27] Liang B ,Zhu Z M ,Cheng J C 2006 *Chin. Phys.* **15** 412
- [28] Lu Y G ,Dong Y W 2006 *Chin. Phys.* **15** 2030

Study on the property of the second harmonic in the nearfield of a Bessel ultrasonic field based on the Fourier-Bessel series *

Du Hong-Wei Peng Hu Jiang Zhao-Hui Feng Huan-Qing

(Department of Electronic Science and Technology ,University of Science and Technology of China ,Hefei 230027 ,China)

(Received 18 December 2006 ; revised manuscript received 1 February 2007)

Abstract

A new method based on the Fourier-Bessel series is applied in KZK equation to calculate the second harmonic component of a zero-order Bessel ultrasonic field in viscous medium. An analytical solution of a series form is obtained and a new conclusion is drawn. Assuming the source sound pressure to be $J_0(\alpha_0 r)$, the second harmonic sound pressure has a radial distribution of $J_0^2(\alpha_0 r)$ function profile in the near field. This conclusion explains the experimental results reported in literature appropriately and indicates that the second harmonic field has different radial distributions in the near and far field, thus solves the problem of radial distribution of the second harmonic in the nearfield of Bessel ultrasonic field. Moreover, the conclusion implies that the second harmonic field has similar limited diffraction property as the fundamental. A numerical computation and simulation example is given subsequently.

Keywords : Fourier-Bessel series , KZK equation , nonlinear ultrasonic field , Bessel beam

PACC : 4325 , 4335 , 8760B , 0270

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60471057) and the Youth Foundation of the University of Science and Technology of China (Grant No. KA2100230001).