

高瑞利数下水平自然热对流的幂律关系*

孙 亮^{1)†} 孙一峰³⁾ 马东军⁴⁾ 孙德军⁴⁾

1) 中国科学技术大学地球与空间科学学院, 合肥 230026)

2) 中国科学院大气物理研究所 LASG 国家重点实验室, 北京 100029)

3) 中国科学院研究生院生物运动力学实验室, 北京 100049)

4) 中国科学技术大学力学和机械工程系, 合肥 230027)

(2007 年 1 月 29 日收到, 2007 年 4 月 9 日收到修改稿)

采用数值模拟方法, 研究了高度和宽度比为 1:10 的狭长矩形腔内的水平自然热对流. 根据对瑞利数 (Rayleigh 数) Ra 在 $10^4 < Ra < 10^{11}$ 内情形的计算结果, 将流动分为三个不同的区间: 线性区、连续过渡区、1/5 次幂律区. 虽然流量和努塞尔数 (Nusselt 数) Nu 随瑞利数的变化都包括了三个参数演化区间, 但从一个区间到另外一个参数区间的转变时并不是同步的, 其中努塞尔数的转变总是超前流量的转变. 对比前人的研究发现, 流量 1/3 次幂律的结果是由于瑞利数不够高所致. 此外, 模拟结果也表明 Siggers 等的理论分析过高估计了热通量强度, 实际的温度边界层内努塞尔数和瑞利数为 1/5 次幂律关系.

关键词: 水平自然对流, 1/5 次幂律, 瑞利数, 努塞尔数

PACC: 4725Q, 9210M

1. 引 言

大洋热盐环流 (thermohaline circulation, 也称“温盐环流”), 作为沿地球经向运动的大尺度环流, 对全球气候变化有着重要的影响^[1-5]. 关于大洋热盐环流形成和驱动的物理机理问题, 也在近年来得到了广泛的关注. 其中一个基本问题是热盐环流能否仅仅依靠海气表面的浮力通量驱动方式得以维持^[1,3]? 为此, 人们采用对顶部加热的水平自然热对流 (horizontal convection) 的研究来探讨这个问题. 无论是实验^[6,7]还是数值计算都表明, 顶部加热能产生明显的水平环流^[8-13]. 为了能估计真实大洋环流强度, 需要在极高瑞利数下的流动规律.

虽然实验时的普朗特数 (Prandtl 数) Pr 各不相同, 但从 Rossby^[6]的实验到 Wang 等^[7]的实验都给出了流量随瑞利数呈 1/5 次幂增长的关系. 受实验条件限制, 他们实验的瑞利数极限大约在 10^{10} 左右, 而且相应的热通量不能同时精确测定. 而受计算条件的限制, Paparella 和 Young^[9]的计算 ($0.1 < Pr < 10$),

以及 Siggers 等^[11]的计算中 ($0.2 < Pr < 4$), 瑞利数都要低一个量级. Siggers 等^[11]模拟结果为流量大约介于瑞利数的 1/4 次幂到 1/3 次幂之间, 而努塞尔数 Nu 和瑞利数 Ra 呈 1/5 次幂关系. 孙亮等^[13]的计算结果 ($Pr = 10$) 与 Siggers 相似, 流量连续依赖于瑞利数, 从最初的线性增长到 $Ra = 10^8$ 后呈 1/3 次幂关系.

另一方面, Paparella 和 Young^[9]分析了 Pr 固定而当热扩散系数趋于 0 的极限情形, 此时的热通量也为 0. 更进一步, Siggers 等从理论上给出了无量纲的热通量 (即 Nu) 上限正比于 Ra 的 1/3 次幂. 然而他们的计算却不支持 Nu 与 Ra 间的 1/3 次幂律关系. 于是他们提出两种可能性: 1) 他们的理论估计过高; 2) 他们计算所用的瑞利数不够高. 针对上述两种可能性, 我们需要高瑞利数下的计算结果来进行分析.

本文的目的在于通过数值模拟在高瑞利数下的流动 ($Ra > 10^{10}$), 拟合出流量、热通量和瑞利数的关系, 并为估计大洋中浮力驱动环流的强度提供参考.

* 国家自然科学基金 (批准号: 40705027, 10602056, 40675027) 和中国博士后科学基金资助的课题.

† 通讯作者, E-mail: sunl@ustc.edu.cn; sunl@ustc.edu

2. 模 型

大尺度环流具有的垂直尺度和水平尺度相比很小. 为了更真实模拟大洋中的流动, 我们用数值方法研究了高度和宽度比为1:10矩形域内的流动, 它比以往实验和数值研究中所采用的形状比还要小. 所以, 我们仍然采用传统的中间加热, 两极冷却方式向海洋施加加热强迫.

水平热对流模型如图 1 所示, 在长 $L = 1$ 、高为 h 的矩形腔的顶部存在水平的温度分布, 中间温度高、两端温度低, 图中的等值线为等温线.

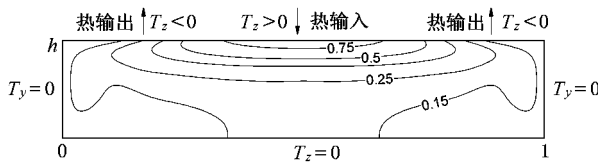


图 1 水平自然对流模型

采用 Boussinesq 近似和使用流函数为变量, 我们得到完整的方程和边界条件如下^[4-14]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{K}(T, \psi) = Pr^{-1/2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathcal{K}(\omega, \psi) = Pr^{1/2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) + Ra \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (1b)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega, \quad (1c)$$

$$\omega|_{z=h} = \omega|_{y=0} = \omega|_{y=1} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=h} = \psi|_{y=0} = \psi|_{y=1} = 0, \quad (1d)$$

$$T(y)_{z=h} = \frac{1}{2} [\cos(2\pi y - \pi) + 1],$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0, \quad (1e)$$

其中 Jacobi 算子 $\mathcal{K}(\phi, \psi) = \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x$ 是非线性对流项. 控制流动的两个重要参数分别为普朗特数 (Pr) 和瑞利数 (Ra). 普朗特数 Pr 定义为黏性扩散系数 ν 和热扩散系数 κ 之比, $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$. 瑞利数 Ra 定

义为 $Ra = \frac{g\alpha \Delta T L^3}{\nu \kappa}$, g 是重力加速度, α 是密度随温度变化的线膨胀系数, ΔT 是顶部中央和两端的温度差. 我们关心的物理量包括: 流函数的最大值 Ψ_{max} , 它反映了自然热对流的强度; 努塞尔数 Nu , 它

反映从外界输送到流场中的热量强弱^[13].

我们采用有限差分算法数值求解上述方程. 为了保证数值精度, 非线性对流项用二阶 Arakawa 守恒格式^[15] 并采用边界附近加密的非均匀网格. 关于数值方法的详细介绍以及相关算例的验证可以参考文献 [13, 14]. 此外, 我们选取 Wang 等^[7] 的实验作为数值计算的验证, 实验参数如下: $Pr = 8$, $Ra = 1.28 \times 10^9$, 高度和宽度比为 0.675. 图 2 给出了采用 128×96 网格时, 数值计算流场的结果, 它与实验相似. 其中流函数最大值 Ψ_{max} 为 60.64, 与实验结果 61.29 相差大约 1%.

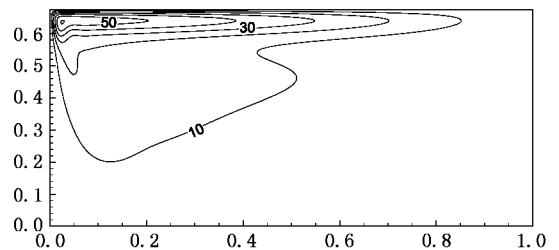


图 2 $Pr = 8, Ra = 1.28 \times 10^9$ 时的流场图(流函数的等值线间隔为 10)

下面我们采用数值计算研究高度和宽度比为 1:10, $Pr = 1$ 时, Ψ_{max}, Nu 与 Ra 的关系. 为了保证在高瑞利数下的计算结果, 我们采用了 1024×192 的网格, 以保证结果误差大约为 1%.

3. 结 果

3.1. 流动图像

当瑞利数较小时, 流动很弱, 上下热量交换以热传导为主, 此时流动是近似线性的^[8, 11]. 而当瑞利数较高的时候, 对流活动加强, 对流传热和表面热通量平衡. 图 3 给出了 $Ra = 10^7$ 时的流场和温度场分布. 流场受中间加热两端冷却的强迫驱动作用, 在中部出现较弱的上升流, 而在两端边界附近出现较强的下沉流. 相应地, 温度场因为对流活动而变形, 并出现“暖舌”现象(图 3(b)中的阴影部分). 这是由于顶部附近存在着较强的向极流动; 而底部附近的向心流动将低温冷水带向中央, 在靠近两端的顶部形成逆温层. 如图 3(b)中 $T = 0.3$ 的等温线在顶部附近向低温端伸出, 在底部附近向高温端伸出.

当瑞利数较高时, 流场呈复杂形态. 图 4 给出了 $Ra = 10^{10}$ 时的流场和温度场分布. 总体来看, 此

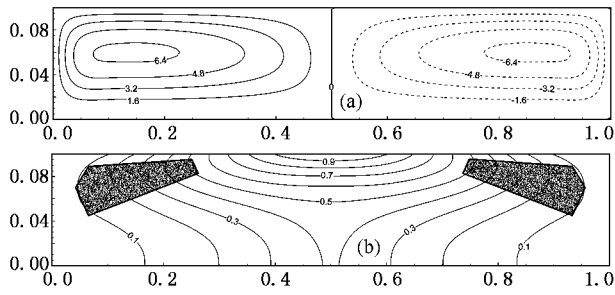


图3 $Ra = 10^7$ 时的流场(a)和温度场(b)分布((b)中的阴影部分为“暖舌”区)

时的流场和温度场都与 $Ra = 10^7$ 时有所不同. 首先图 4(a) 中的下沉环流一分为二:一支仅能下沉到中部,一支能下沉到底部,在图 4(a) 中表现为主环流具有两个涡心. 此外,在底部离左右边界 $1/10$ 附近形成了反向的二级环流. 这两个二级环流与主环流不存在质量交换(死水区),所以它们对于主环流的对流传热没有贡献. 与图 3(b) 类似,等温线比较集中,位于中心区域,大致与水平方向平行. 但图 4(b) 中等温线密集于顶部附近,形成了很强的温度边界层,以及温跃层. 流场主体是低温冷水,除顶部边界层附近外大部分温度低于 0.2,这与图 3(b) 中形成强烈对比.

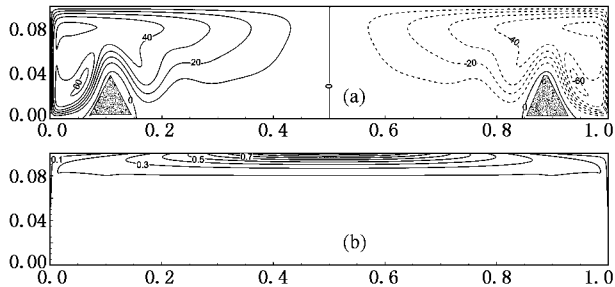


图4 $Ra = 10^{10}$ 时的流场(a)和温度场(b)分布((a)中的阴影部分为“死水区”,实线为正值,虚线为负值)

对比图 3 和图 4 中的温度分布,我们发现随着瑞利数的增大,在顶部逐渐形成温度边界层,除左右两端外,流场中部底部温度呈均匀分布. 伴随着温度边界层的形成,同时形成了稳定的层结. 从相应的流场分布可以看到,温度边界层内的水平温度梯度驱动了上层环流,而下层环流则主要受运动学支配和温度梯度的分布无关.

3.2. 流动规律

前面给出了两种特殊的瑞利数下环流的流动图

像. 这里,我们更系统地讨论环流的整体性质,特别是对瑞利数的敏感性研究. 为此,我们计算了流量和热通量随瑞利数变化的关系.

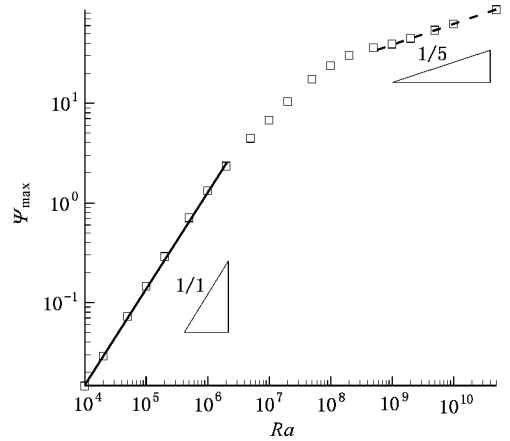


图5 流量(Ψ_{\max})和瑞利数(Ra)的关系(其中“□”为直接数值模拟的结果. 在高瑞利数下,流量和 Ra 的 $1/5$ 次幂成正比)

首先我们考察出了流量(Ψ_{\max})和瑞利数的关系. 在大洋热盐环流的研究中,流量一直是被用于衡量热盐环流强度的主要物理量. 从图 5 可见,当瑞利数小于 10^6 时,流量和瑞利数呈线性关系;当瑞利数大于 10^9 时,流量和瑞利数的 $1/5$ 次幂成正比;两者中间是过渡区间. 其中,高瑞利数时有

$$\Psi_{\max} = 0.62 Ra^{1/5}. \quad (2)$$

与 Siggers 等^[11]的计算结果相似,当瑞利数在 10^8 到 10^9 附近时,流量接近 $1/3$ 或 $1/4$ 次幂的关系. 但当瑞利数足够高后,流量出现明显的 $1/5$ 次幂律关系. 这说明在高瑞利数下,流量和热通量仍然满足 $1/5$ 次幂律关系. 所以 Siggers 等所得到的流量和瑞利数的幂律关系仅仅是过渡区间内的,并不能真正反映高瑞利数下的极限情形.

其次,我们也给出 Nu 随 Ra 变化的曲线. 如图 6 所示,在低瑞利数时,最大热通量密度几乎不变,随瑞利数增加而缓慢增长. 事实上,此时的热通量由热传导过程所主导,是线性区间^[8,11,12]. 当瑞利数超过某一临界值(约 10^5)时,自然对流占优, Nu 随 Ra 增加而迅速增加. 直到 $Ra = 10^8$ 附近, Nu 和 Ra 之间又出现 $1/5$ 次幂律关系:

$$Nu = 0.75 Ra^{1/5}, \quad (3)$$

与 Siggers 等的计算结果类似,我们在整个参数区间内都没有找到理论所预言的 $1/3$ 次幂律区. 但是,我们的参数区间大了两个数量级. 从我们的数值计算中,支持了 Siggers 等的第一种假设:原先的理论分

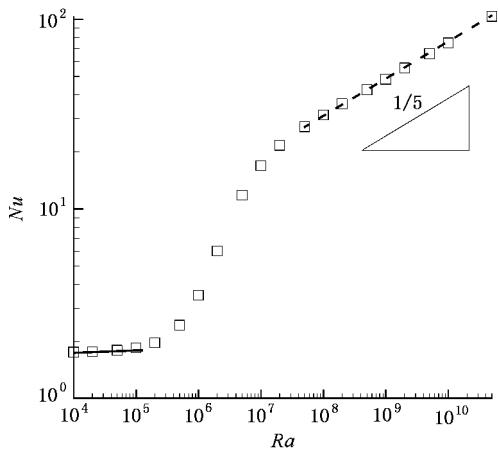


图6 努塞尔数 (Nu) 和瑞利数 (Ra) 的关系(其中“□”为直接数值模拟的结果. 在高瑞利数下, Nu 和 Ra 的 $1/5$ 次幂成正比)

析过高的估计了热通量强度. 根据 Rossby^[6], 以及 Quon 和 Ghil^[8] 的分析, 顶部附近的温度边界层厚度与瑞利数的 $1/5$ 次幂成正比, 这正可以说明 Nu 与 Ra 的 $1/5$ 次成正比.

对比图 5 和图 6, 我们看到瑞利数从低到高的变化过程中, 都经历了三个区间: 线性区、连续过渡区、 $1/5$ 次幂律区. 虽然流量和热通量随瑞利数的变化都包括三个参数演化区间, 但从一个区间到另外一个参数区间的转变时并不是同步的, 其中热通量的转变总是超前流量的转变.

4. 结 论

通过数值计算, 我们得到了流量、热通量密度随瑞利数变化的曲线, 并归纳出高瑞利数下的流动规律: 当瑞利数足够高时, 无论流量还是热通量都和瑞利数的 $1/5$ 次幂成正比. 我们的结果表明 Siggers 等的理论对热通量估计过高, 上述理论需要进一步进行研究. 此外, 我们发现, 流量随瑞利数线性增长区连续过渡到 $1/5$ 次幂律区. 以往的数值模拟中, 非 $1/5$ 次幂律关系的原因是瑞利数落在过渡区内.

- [1] Wunsch C 2002 *Science* **298** 1179
- [2] Sun L, Mu M 2003 *Acta Oceanol. Sin.* **25** 111 (in Chinese) [孙亮、穆 穆 2003 海洋学报 **25** 111]
- [3] Wunsch C, Ferrari R 2004 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **36** 281
- [4] Liu Y, Guan Y, Lin Y 2006 *Adv. Earth Sci.* **21** 1185 (in Chinese) [刘 宇、管玉平、林一骅 2006 地球科学进展 **21** 1185]
- [5] Zhou T, Wang S, Zhang X. 2000 *Adv. Earth Sci.* **15** 654 (in Chinese) [周天军、王绍武、张学洪 2000 地球科学进展 **15** 654]
- [6] Rossby H T 1965 *Deep-Sea Res.* **12** 9
- [7] Wang W, Huang R X 2005 *J. Fluid Mech.* **540** 49
- [8] Quon C, Ghil M 1992 *J. Fluid Mech.* **245** 449
- [9] Paparella F, Young W R 2002 *J. Fluid Mech.* **466** 205
- [10] Zhan J M, Li Y X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 828 (in Chinese) [詹杰民、李毓湘 2002 物理学报 **51** 828]
- [11] Siggers J H, Kerswell R R, Balmforth N J 2004 *J. Fluid Mech.* **517** 55
- [12] Lu Y H, Zhan J M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4774 (in Chinese) [卢玉华、詹杰民 2006 物理学报 **55** 4774]
- [13] Sun L, Sun Y F, Sun D J *et al* 2006 *J. Hydrodyn. A* **21** 252 (in Chinese) [孙 亮、孙一峰、孙德军等 2006 水动力学研究与进展 A 辑 **21** 252]
- [14] Sun L, Ma D J, Sun D J *et al* 2006 *J. Hydrodyn. A* **21** 363 (in Chinese) [孙 亮、马东军、孙德军等 2006 水动力学研究与进展 A 辑 **21** 363]
- [15] Arakawa A 1966 *J. Comput. Phys.* **1** 119



Power law of horizontal convection at high Rayleigh numbers^{*}

Sun Liang^{1,2)} Sun Yi-Feng³⁾ Ma Dong-Jun⁴⁾ Sun De-Jun⁴⁾

1) School of Earth and space Sciences , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China)

2) LASG . , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Science , Beijing 100029 , China)

3) The Laboratory for Biomechanics of Animal Locomotion , Graduate University of Chinese Academy of Sciences , Beijing 100049 , China)

4) Department of Modern Mechanics , University of Science and Technology of China , Hefei 230027 , China)

(Received 29 January 2007 ; revised manuscript received 9 April 2007)

Abstract

The horizontal convection at high Rayleigh number (Ra) in a rectangle cavity with aspect ratio of 1:10 is numerically simulated. The horizontal convection is an important model to understand the ocean circulation and the power laws of the flow are the most concerned. According to the results within the regime of $10^4 < Ra < 10^{11}$, three continuous regimes are obtained: the linear regime ($10^4 < Ra < 10^6$), the transition regime ($10^6 < Ra < 10^8$) and the 1/5-power law regime ($10^8 < Ra < 10^{11}$). For the flow strength, a 1/3-power law of Ra is fitted when Ra is not high enough ($10^7 < Ra < 10^8$). However, a 1/5-power law is obtained when Ra is high enough ($10^8 < Ra < 10^{11}$). The 1/5-power law confirms the analysis of Rossby and implies that 1/3-power law of Ra for Nusselt number by Siggers *et al.* is an over estimation.

Keywords : horizontal convection , 1/5-power law , Rayleigh number , Nusselt number

PACC : 4725Q , 9210M

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40705027 , 10602056 , 40675027) , and the China Postdoctoral Science Foundation.