

变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 系统的特殊孤子结构及孤子的裂变和湮没现象*

马松华† 任清褒 方建平 郑春龙

(丽水学院物理系 丽水 323000)

(2006 年 7 月 9 日收到 2007 年 5 月 11 日收到修改稿)

利用改进的 Riccati 方程映射法,得到了变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 系统的孤波解、周期波解和变量分离解.根据得到的孤波解,构造出了系统的几种不同形状的孤子结构,研究了孤子的裂变和湮没现象.

关键词:变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 系统,孤子结构,裂变,湮没

PACC: 0230, 0340, 0290

1. 引 言

目前,在流体力学、非线性光学和凝聚态物理等领域^[1-3]均发现了具有孤立子解的物理系统——非线性可积系统.人们在不同的非线性系统中得到了许多局域激发结构^[4-11],也提出了许多求解非线性方程的新方法^[12-18],其中最重要的方法之一是 Fang 等^[19]提出的拓展的 Riccati 方程映射法,该方法已在求解(1 + 1)维和(2 + 1)维非线性方程中得到了广泛应用.

前不久,我们对孤子间的相互作用进行了一些研究.文献[20]研究了非线性薛定谔系统的光孤子的弹性相互作用,文献[21]研究了 Boiti-Leon-Pempinelli 系统的 dromion 孤子的非弹性相互作用.除以上两种情况外,孤子间还存在着其他形式的相互作用,如裂变和湮没等.本文的工作是将改进的 Riccati 方程映射法应用于著名的变系数(2 + 1)维 Broer-Kaup 系统

$$\begin{aligned} u_{ty} - B(t) [u_{xy} - \alpha uu_x] - 2v_{xx} &= 0, \\ v_t + B(t) [v_{xx} + \alpha uv_x] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

并进一步研究其圈孤子结构、方孤子结构、梯形孤子结构以及单个 dromion 孤子的裂变现象和两个“亮暗”dromion 孤子的湮没现象.

2. Broer-Kaup 系统的孤波解、周期波解和变量分离解

首先叙述改进的 Riccati 方程映射法.对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_x, u_{xx}, u_{x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$\begin{aligned} u = A(x) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \phi^i [q(x)] + \frac{C_i(x)}{\phi^i [q(x)]} \\ + D_i(x) \phi^{i-1} [q(x)] \sqrt{\sigma + \phi^2 [q(x)]} \\ + \frac{E_i(x)}{\phi^{i-1} [q(x)] \sqrt{\sigma + \phi^2 [q(x)]}}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2. \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$, $D_i(x)$, $E_i(x)$ 和 $q(x)$ 为 x 的任意函数.将(3)(4)式代入(2)式就可以得到一组 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$, $D_i(x)$, $E_i(x)$ 和 $q(x)$ 的约束方程.通过约束方程求得变量 $A(x)$, $B_i(x)$, $C_i(x)$, $D_i(x)$, $E_i(x)$ 和 $q(x)$,再根据 Riccati 方程如下的孤波解、周期波解和变量分离解就可以确定所求方程的解:

* 浙江省自然科学基金(批准号:Y604106, Y606128)和丽水学院科研基金(批准号:FC06001, QN06009)资助的课题.

† E-mail: msh6209@yahoo.com.cn

$$\begin{aligned}
\phi &= -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma} q), \\
\phi &= -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma} q) \quad (\sigma < 0); \\
\phi &= \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} q), \\
\phi &= -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} q) \quad (\sigma > 0); \\
\phi &= -\frac{1}{q} \quad (\sigma = 0).
\end{aligned}
\tag{5}$$

为了寻找 Broer-Kaup 系统的新精确解,我们将改进的 Riccati 方程映射法用于(1)式.首先,对(1)式进行 $v = u_y$ 变换,得到

$$u_{ty} + B(t) [2u_y u_x + 2u u_{xy} + u_{xxy}] = 0. \tag{6}$$

再根据(3)式,设解为

$$\begin{aligned}
u &= f + g\phi(q) + h\sqrt{\sigma + \phi^2(q)} \\
&+ \frac{G}{\phi(q)} + \frac{H}{\sqrt{\sigma + \phi^2(q)}},
\end{aligned}
\tag{7}$$

其中 f, g, h, G, H 和 q 是 (x, y, t) 的任意函数.将(7)(4)式代入(6)式,并按 ϕ 的同次幂合并,提取 $\phi^i (i = 1, 2, \dots)$ 前的系数,其中包含 $\sqrt{\sigma + \phi^2(q)}$

项,设 $K = \sqrt{\sigma + \phi^2(q)}$,提取 K ,令 K 前的系数等于零,令不含 K 的系数也等于零,得到一系列方程.由这些方程可求得

$$\begin{aligned}
f &= -\frac{1}{2} \frac{q_t + B(t)q_{xx}}{B(t)q_x}, \\
g &= -\frac{1}{2} q_x, \\
h &= \frac{1}{2} q_x, \\
G &= \frac{B(t)q_{xy}q_t + q_{xxy}q_x\sigma + q_x^2q_{xyt}}{B(t)q_x^2q_y}, \\
H &= -\frac{1}{2} \frac{B(t)q_{yt}q_x - q_{xy}q_{xx}\sigma + 2q_tq_x^2q_{xxy}}{B(t)q_x^2q_y},
\end{aligned}
\tag{8}$$

$$q = \chi(x, t) + \varphi(y),$$

其中 $\chi = \chi(x, t), \varphi = \varphi(y)$ 是关于 (x, t) 和 y 的任意函数.

情形 1 设 $\sigma < 0$,可以得到 Broer-Kaup 系统的孤波解

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2} \frac{-B(t)\chi_{xx} - \chi_t + \chi_x^2 \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi))B(t)}{B(t)\chi_x} \\
&+ \frac{1}{2} i \chi_x \sqrt{-\sigma} \operatorname{sech}(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)),
\end{aligned}
\tag{9}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma \chi_x \varphi_y (\operatorname{isinh}(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)) - 1)}{\cosh^2(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi))}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1}{2} \frac{-B(t)\chi_{xx} - \chi_t + \chi_x^2 \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi))B(t)}{B(t)\chi_x} \\
&+ \frac{1}{2} \chi_x \sqrt{-\sigma} \operatorname{csch}(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)),
\end{aligned}
\tag{11}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma \chi_x \varphi_y}{\cosh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)) - 1}. \tag{12}$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 2 设 $\sigma > 0$,可以得到 Broer-Kaup 系统的周期波解

$$u_3 = -\frac{1}{2} \frac{B(t)\chi_{xx} + \chi_t + \chi_x^2 \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))B(t)}{B(t)\chi_x} + \frac{1}{2} \chi_x \sqrt{\sigma} \operatorname{sec}(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)), \tag{13}$$

$$v_3 = \frac{1}{2} \frac{\sigma \chi_x \varphi_y (\sin(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) - 1)}{\cos^2(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))}, \tag{14}$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \frac{-B(t)\chi_{xx} - \chi_t + \chi_x^2 \sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi))B(t)}{B(t)\chi_x} + \frac{1}{2} \chi_x \sqrt{\sigma} \operatorname{csc}(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)), \tag{15}$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \frac{\sigma \chi_x \varphi_y}{\cos(\sqrt{\sigma}(\chi + \varphi)) - 1}, \tag{16}$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

情形 3 设 $\sigma = 0$,可以得到 Broer-Kaup 系统的

变量分离解

$$u_5 = -\frac{1}{2} \frac{\chi_t + B(t)\chi_{xx}}{B(t)\chi_x} + \frac{\chi_x}{\chi + \varphi}, \quad (17)$$

$$v_5 = -\frac{\chi_x \varphi_y}{(\chi + \varphi)^2}, \quad (18)$$

其中 $\chi(x, t), \varphi(y)$ 为所示变量的任意函数.

3. Broer-Kaup 系统的特殊孤子结构及孤子的裂变和湮没现象

由于(9)–(18)式中都包含有任意函数 χ 和 φ , 使得系统的解变得相当丰富. 如设 $\chi = kx + ct, \varphi = ly$, 所有上述解均转化为行波解.

下面以(12)式为例, 讨论 Broer-Kaup 系统的相干孤子结构及孤子的裂变和湮没现象, 为了清楚和

方便起见, 设

$$V = v_2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma \chi_x \varphi_y}{\cosh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \varphi)) - 1}. \quad (19)$$

3.1. Broer-Kaup 系统的圈孤子、方孤子和棱形孤子结构

由于(19)式中的 χ 和 φ 的任意性, 不妨取 χ 和 φ 为如下简单形式:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= -x^2 + t^3, \\ \varphi(y) &= -y^2. \end{aligned} \quad (20)$$

于是, 可以得到一个特殊的“圈孤子”, 如图 1(a)所示(取 $t=2, \sigma=-1$). 从图 1(a)可见, 该孤子的结构呈环形, 且两个向上的“峰”是彼此相邻的, 这是我们发现的一种新的孤子结构. 图 1(b)是与图 1(a)相应的等值线图.

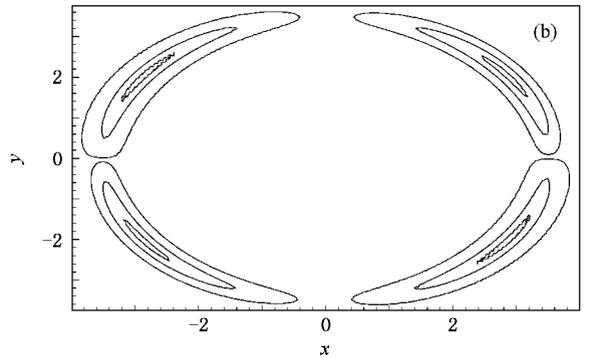
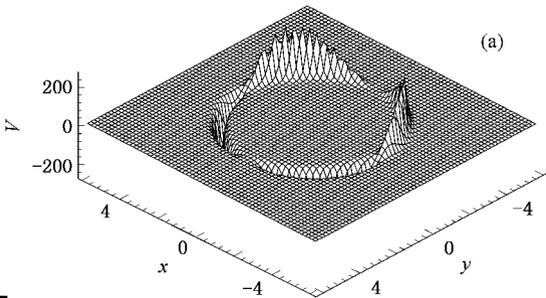


图 1 圈孤子结构 (a)(19)式利用(20)式得到的圈孤子解, 取 $t=2, \sigma=-1$; (b)相应的等值线图 ($|V|=10, 100, 200$)

如果取 χ 和 φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + 0.1 \exp(\Re(x + t, 1.0, 1.0)), \\ \varphi(y) &= 1 + 0.1 \exp(\Re(y, 1.0, 1.0)). \end{aligned} \quad (21)$$

于是, 可以得到如图 2(a)所示的“方孤子”(取 $t=0, \sigma=-1$). 从图 2(a)可以看到, 该孤子的结构呈现方形, 相应的等值线描述在图 2(b)中. (21)式中的 $\Re(\cdot)$ 为 Weierstrass 函数.

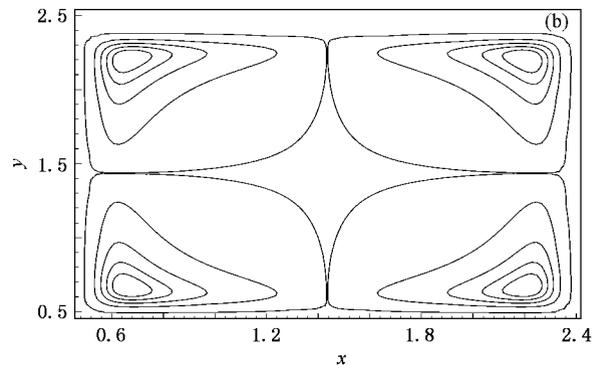
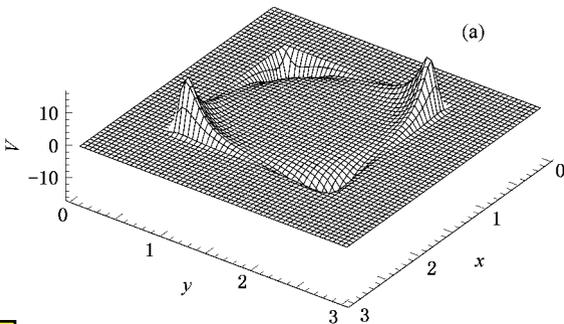


图 2 方孤子结构 (a)(19)式利用(21)式得到的方孤子解, 取 $t=0, \sigma=-1$ (b)相应的等值线图 ($|V|=0.01, 1, 4, 8, 12$)

如果取任意函数为如下形式：

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + 0.1 \exp(Z(1, x + t)), \\ \varphi(y) &= 1 + 0.1 \exp(Z(1, y)), \end{aligned} \quad (22)$$

则可以得到如图 3(a) 所示的“棱形孤子”(取 $t = 0, \sigma = -1$) 相应的等值线图如图 3(b) 所示。(22) 式中的 $Z(\cdot)$ 为 zeta 函数。

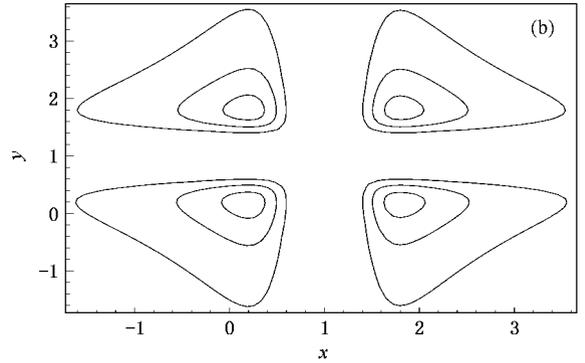
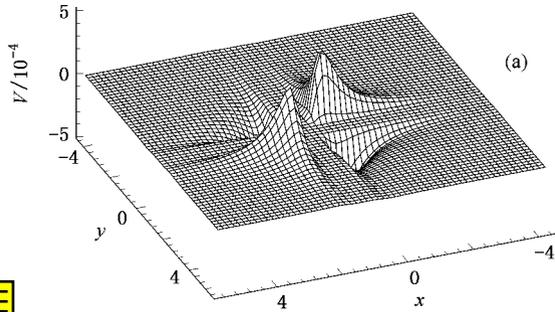


图 3 棱形孤子结构 (a) (19) 式利用 (22) 式得到的棱形孤子解 (取 $t = 0, \sigma = -1$) (b) 相应的等值线图 ($|V| = 0.00005, 0.0002, 0.0004$)

3.2. 孤子的裂变和湮没

许多学者研究了各类非线性系统孤子间的相互

作用, 这些作用大多是弹性的, 作用前后两个孤子的波幅、形状和传播速度都不发生改变. 以往对孤子的裂变和湮没现象研究得很少. 下面将侧重讨论孤

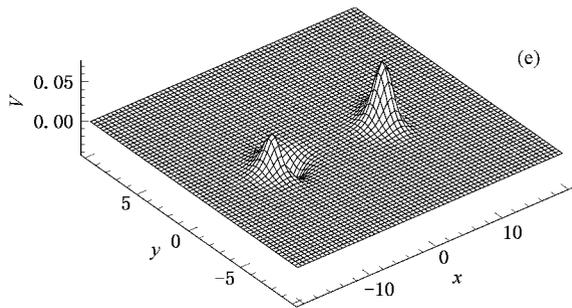
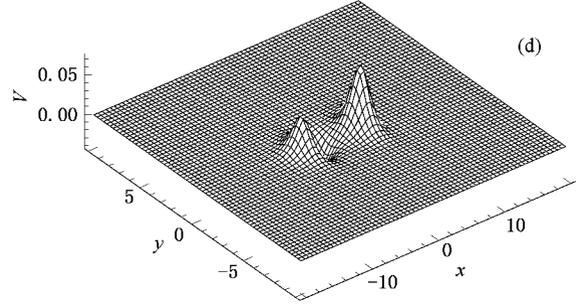
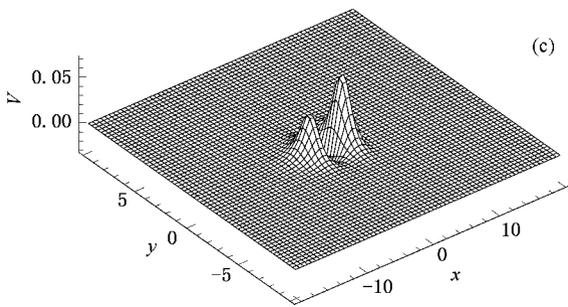
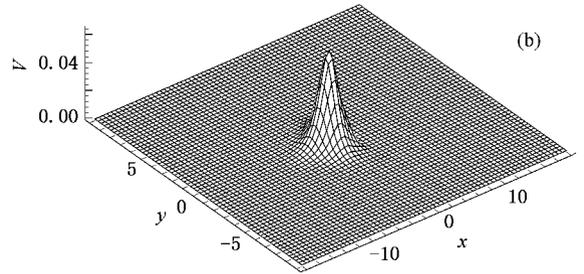
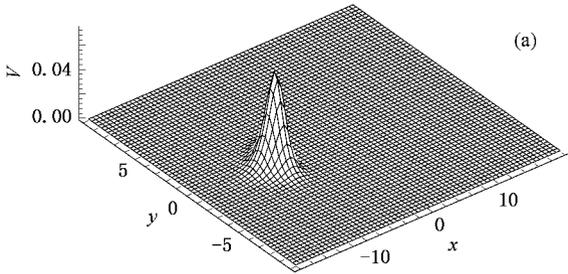


图 4 (19) 式利用 (23) 式得到的单个 dromion 孤子的裂变时间演化图 $\sigma = -1$. (a) $t = -8$, (b) $t = 0$, (c) $t = 2$, (d) $t = 4$, (e) $t = 8$

子的裂变和湮没现象.

根据 (19) 式, 取 χ, φ 为如下形式:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + \operatorname{sech}(x+t) + \exp(x-t), \\ \varphi(y) &= 1 + \tan(y). \end{aligned} \quad (23)$$

于是, 可以得到如图 4 所示的 dromion 孤子随时间 t 的裂变演化图. 取 $\sigma = -1$, 时间 t 分别为 $-8, 0, 2, 4, 8$. 从图 4 可以看出, 单个 dromion 孤子在运动过程中裂变为两个 dromion 孤子, 每个孤子的波幅都明显变小, 且沿着不同的方向运动. 通过仔细研究发现, 裂变后两个孤子速度的大小相等, 且均等于裂变前单个孤子的速度.

如果取

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= 1 + \exp(x^2 + t), \\ \varphi(y) &= 1 + \exp(y^2), \end{aligned} \quad (24)$$

则得到如图 5 所示的两个孤子(孤立波)随时间 t 的湮没演化图. 取 $\sigma = -1$, 时间 t 分别为 $-8, -4, 0, 0.8, 2$. 从图 5 可以看到, 两个“亮暗”dromion 孤子(孤立波)以相同的速度靠近, 然后发生相互作用, 作用后其速度变为零, 波幅也随时间减小, 最后变为零. 分析其原因这是由于两个孤子(孤立波)对应的波幅恰好大小相等、相位相反, 叠加后互相抵消了. 图 5(f) 是图 5(c) 放大的正视图. 从以上研究可知, 孤子(孤立波)不仅具有微观粒子的一些特点, 还具有宏观线性波的一些特性.

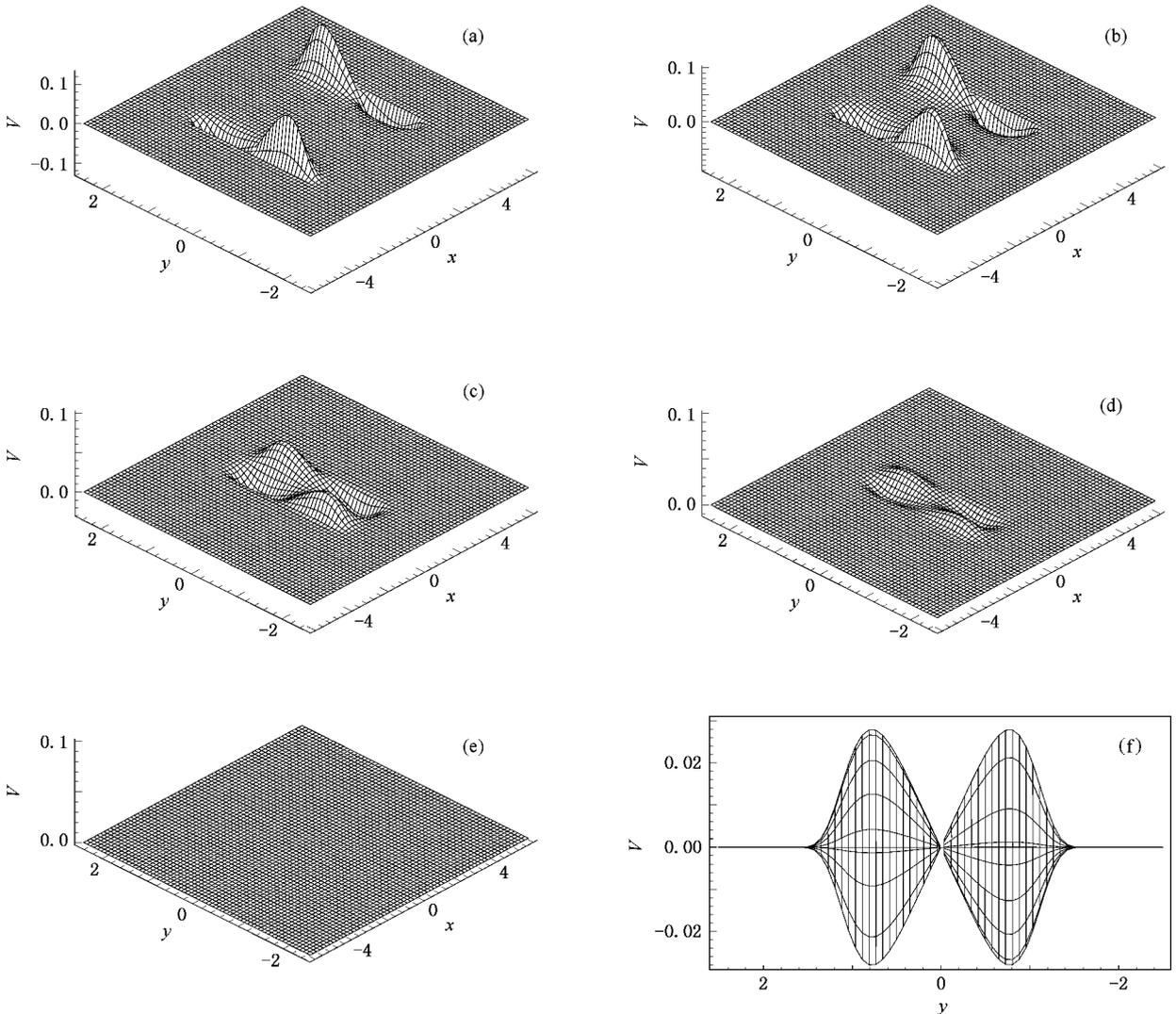


图 5 (19) 式利用 (24) 式得到的两个“亮暗”dromion 孤子的湮没时间演化图 $\sigma = -1$. (a) $t = -8$, (b) $t = -4$, (c) $t = 0$, (d) $t = 0.8$, (e) $t = 2$ (f) 是 (c) 图放大的正视图

4. 结 论

本文利用改进的 Riccati 方程映射法,得到了变系数(2+1)维 Broer-Kaup 系统的孤波解、周期波解和变量分离解. 根据所得到的孤波解(12)式,发现

了该系统一些新的孤子结构形式,包括圈孤子、方孤子和棱形孤子等. 侧重研究了 Broer-Kaup 系统中 dromion 孤子的裂变和湮没现象. 通过这些研究进一步证明了孤子(孤立波)既具有微观粒子的一些特点,又具有宏观线性波的一些特性.

- [1] Camassa R , Holm D D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [2] Tang X Y , Lou S Y , Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
- [3] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027
- [4] Ruan H Y , Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese)
[阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]
- [5] Zhang J F , Meng J P 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 655
- [6] Lou S Y 2003 *J. Phys. A : Math. Gen.* **36** 3877
- [7] Zheng C L , Chen L Q , Zhang J F 2004 *Chin. Phys.* **13** 0592
- [8] Zheng C L , Zhang J F 2003 *Chin. Phys.* **12** 11
- [9] Zheng C L , Fang J P , Chen L Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1468 (in Chinese) [郑春龙、方建平、陈立群 2005 物理学报 **54** 1468]
- [10] Zhang J F , Huang W H , Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [11] Zhu J M , Ma Z Y , Zheng C L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3248 (in Chinese) [朱加民、马正义、郑春龙 2004 物理学报 **53** 3248]
- [12] Lou S Y 1995 *J. Phys. A : Math. Gen.* **28** 7227
- [13] Ruan H Y , Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [14] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [15] Lou S Y , Tang X Y , Li J 2001 *Eur. Phys. J. B* **22** 473
- [16] Lai D W C , Chow K W 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** 1847
- [17] Lai D W C , Chow K W 2001 *J. Phys. Soc. Jpn.* **70** 666
- [18] Fang J P , Zheng C L , Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
- [19] Fang J P , Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 670
- [20] Ma S H , Fang J P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5611 (in Chinese) [马松华、方建平 2006 物理学报 **55** 5611]
- [21] Ma S H , Qiang J Y , Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese) [马松华、强继业、方建平 2007 物理学报 **56** 620]

Special soliton structures and the phenomena of fission and annihilation of solitons for the (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup system with variable coefficients *

Ma Song-Hua[†] Ren Qing-Bao Fang Jian-Ping Zheng Chun-Long

(Department of Physics , Lishui University , Lishui 323000 , China)

(Received 19 July 2006 ; revised manuscript received 11 May 2007)

Abstract

By an improved mapping approach , a series of excitations of the (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup system with variable coefficients is derived. Based on the derived solitary wave excitation , we obtain some special soliton structures and study the phenomena of fission and annihilation of solitons.

Keywords : (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup system with variable coefficients , soliton structures , fission , annihilation

PACC : 0230 , 0340 , 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant Nos. Y604106 , Y606128) and the Scientific Research Foundation of Lishui University , China (Grant Nos. FC06001 , QN06009).

[†] E-mail : msh6209@yahoo.com.cn