

基于多元局部多项式方法的 混沌时间序列预测*

周永道^{1)†} 马洪¹⁾ 吕王勇^{1)‡} 王会琦¹⁾

1) 四川大学数学学院, 成都 610064)

2) 四川师范大学数学与软件科学学院, 成都 610068)

(2006 年 8 月 14 日收到, 2007 年 5 月 15 日收到修改稿)

根据 Takens 定理, 把混沌时间序列构造为一组序列对, 然后用多元局部多项式方法来预测其序列. 这种核估计方法可以结合局域法与全局法的优点, 使得预测的精度更高. 仿真结果表明, 该方法非常有效.

关键词: 混沌时间序列, 多元局部多项式方法, 核估计

PACC: 0545

1. 引 言

混沌现象是自然界中广泛存在的一种不规则运动, 是一种由确定的非线性动力系统生成的复杂行为. 该现象介于确定关系和随机关系之间, 是对现有确定模式的推广. 因此, 混沌时间序列的特性使其在信号处理、通信、控制、社会经济、生物医学等领域中有着越来越重要的应用. 随着混沌理论和应用技术研究的不断深入, 混沌系统的建模和预测已成为近几年来的一个重要研究热点.

对于混沌时间序列的预测, 现已有一些方法^[1-11], 主要分为局域法和全局法两类. Farmer 和 Sidorowich^[1]于 1987 年提出了局域预测法, 这类方法的特点是计算量小、简单易行, 缺点是不能预测历史数据中没有的新点. 全局预测法可以克服这个缺点, 目前人们常采用多项式模型^[2-4]、神经网络^[5,6]作为工具实现全局预测. 然而全局预测法存在两个主要问题: 预测模型的未知参数多和建模所需要的样本点多.

为了克服这两种方法的各自缺点, 本文采用类似于相空间重构的思想, 使用一种新的非参数估计方法, 即多元局部多项式^[12]方法来预测混沌时间序列. 该方法在局域法和全局法的多项式模型之间建

立桥梁, 可以在样本不是太大的情况下使得预测精度足够高, 而且其计算量小、易于实现.

2. 混沌时间序列的重构模型

假设观测的混沌时间序列为 $\{x(t), t = 1, 2, \dots, N\}$. 对于这种非线性序列的预测, 我们不能在时域上直接采用线性模型. 根据 Takens 定理, 混沌时间序列可以进行相空间重构后再进行处理. 现设延迟矢量和轨迹矩阵为

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_L], \quad (1)$$

式中

$$X_i = (x(i), x(i + \tau), \dots, x(i + (m - 1)\tau))^T \\ (i = 1, 2, \dots, L), \quad (2)$$

这里 m 为嵌入维数, τ 为延迟时间,

$$L = N - (m - 1)\tau.$$

对合适的嵌入维数 m 及时间延迟 τ , 重构相空间在嵌入空间中的“轨线”, 在微分同胚意义下与原系统是“动力学等价”的. 因而存在一个光滑映射 $F: R^m \rightarrow R^m$, 给出相空间轨迹的表达式

$$X_{i+1} = F(X_i) \quad (i = 1, 2, \dots, L). \quad (3)$$

但是由于真实的映射是未知的, 人们往往寻找 F 的一个逼近模型 \hat{F} , 从而在预测向量中分离出原来序列的预测值. 下面我们采用重构的思想来构造序列

* 国家自然科学基金(批准号: 10571127)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20040610004)资助的课题.

† E-mail: zhouyongdao@sohu.com

对,然后使用非参数估计方法来拟合序列对.

假设重构向量如(2)式所示,设 $Y_i = x_{i+(m-1)\tau+T}$,其中 T 为预测步长,从而可以构造序列对 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^S$,其中 $S = L - T$, X_i 为 m 维向量.设该序列对来自于模型

$$Y_i = M(X_i) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

我们的目的是通过序列对 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^S$,得到 $M(x)$ 的估计 $\hat{M}(x)$.为了预测原序列,只需把向量 $X_L = (x(N-(m-1)\tau), x(N-(m-2)\tau), \dots, x(N))^T$ 代入(4)式即得原序列的 T 步预测 $\hat{Y}_L = \hat{M}(X_L)$.

3. 多元局部多项式估计

3.1. 估计方法

估计多元函数 $M(x)$,使用多元局部线性核估计方法比经典的 Nadaraya-Watson 核估计方法与 Gasser-Muller 核估计方法有更小的均方误差^[12].

现假设 $M(x)$ 的 $p+1$ 阶导数存在,而且在点 x 处连续.此时,我们可以用 p 阶多元多项式来局部地近似 $M(z)$,

$$M(z) \approx \sum_{0 \leq |k| \leq p} \frac{1}{k!} D^k M(y) |_{y=x} (z-x)^k, \quad (5)$$

式中

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_m),$$

$$k! = k_1! k_2! \dots k_m!,$$

$$|k| = \sum_{i=1}^m k_i,$$

$$\sum_{0 \leq |k| \leq p} = \sum_{j=0}^p \left(\sum_{k_1=0}^j \dots \sum_{k_m=0}^j \right)_{j=k_1+k_2+\dots+k_m},$$

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m},$$

$$D^k M(y) = \frac{\partial^k M(y)}{\partial y_1^{k_1} \dots \partial y_m^{k_m}}.$$

设 $K(u)$ 为 R^m 上的非负核函数, h 为窗宽.给定序列 $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^S$,考虑多元加权最小二乘

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_S; Y_1, Y_2, \dots, Y_S) \\ = \sum_{i=1}^S \left[Y_i - \sum_{0 \leq |k| \leq p} b_k(x) (X_i - x)^k \right]^2 \\ \times K_h(X_i - x), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $K_h(u) = h^{-m} K(u/h)$, $u \in R^m$.设 $\hat{b}_k(x)$ 为(6)式的解,则根据(5)式可得 $D^k M(x)$ 的估计值为

$$k \hat{b}_k(x).$$

为了计算简单,取(5)式中的阶数 $p=1$.此时,(6)式变为

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_S; Y_1, Y_2, \dots, Y_S) \\ = \sum_{i=1}^S [Y_i - b_0 - (X_i - x)^T b_1]^2 K_h(X_i - x). \end{aligned} \quad (7)$$

设 $k(x) = (b_0(x), b_1(x)^T)^T$,则(7)式的解为

$$\hat{b} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y, \quad (8)$$

式中

$$X = \begin{pmatrix} 1 & (X_1 - x)^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & (X_S - x)^T \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_S \end{pmatrix},$$

$$W = \text{diag}(K_h(X_1 - x), \dots, K_h(X_S - x)).$$

从而可得 $M(x)$ 的局部最小二乘估计

$$\hat{M}(x) = e_1^T (X^T W X)^{-1} X^T W Y, \quad (9)$$

式中 $m+1$ 维向量 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.这里选取阶数为 1,不会太影响估计的精度.文献[13]证明了一元情况下局部线性估计具有很好的最小最大性质.

3.2. 参数选取

在多元局部多项式估计中,需要选取合适的参数,使估计尽可能优化.

首先是窗宽的选取.窗宽对多元局部多项式估计有决定性的影响.太大的窗宽会导致模型估计的偏差偏大,而太小的窗宽虽然可以减少偏差,但会增加估计的方差.因此存在一个唯一的最优窗宽使得预测均方误差达到最小.一般地,用最小化均方误差来得到最优窗宽

$$\hat{h}_{opt} = \arg \min_h \int (M(x) - \hat{M}(x))^2 dx. \quad (10)$$

然而(10)式中的理论窗宽 \hat{h}_{opt} 不能直接求出.下面采用搜索的方法来选取窗宽:当窗宽 h 从小到大变化时,比较目标函数的值,然后选择使目标函数最小的窗宽即为近似最优窗宽.

设 $h_l = C^l h_{min}$,其中 h_{min} 为最小值, C 为膨胀系数.我们寻找在区间 $[h_{min}, h_{max}]$ 内使目标函数最小的 h ,这里目标函数为预测均方误差,记为 E_{MS} .

首先设 $h = h_{\min}$,然后用膨胀系数 C 来增大 h ,并计算每个 h 的目标函数值.当 $h > h_{\max}$ 时停止,此时选取使 $E_{MS}(h)$ 最小的 h 即为近似最优窗宽,其中的 E_{MS} 用估计值

$$e_{MS} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

来代替, I 为预测的个数.在本文中,选取

$$h_{\min} = 2h_m/n, \\ h_{\max} = h_m/2,$$

其中 $h_m = \max_{i,j} \|X_i - X_j\|$, $C = 1.1$. 相比于其他方法,这种选择窗宽的方法非常快捷.

为了更接近理想的最优窗宽,可以在上述搜索过程的基础上,缩小区间再搜索一遍.即假设 j 使得 $C^j h_{\min}$ 为上述搜索过程的最优窗宽,此时再把小区间 $[C^{j-1} h_{\min}, C^{j+1} h_{\min}]$ 分成相等的 n 个区间.设

$$h_i = h_{\min} C^{j-1} \left(1 + \frac{i}{n} (C^2 - 1) \right) \\ (i = 1, \dots, m - 1),$$

在这个 $n - 1$ 个窗宽中,使得 e_{MS} 最小的窗宽即为近似最优窗宽.显然,这种搜索方法可以很快地选取窗宽.

其次是核函数的选取.这里我们选取核函数为球 Epanechnikov 核,

$$K(x) = \frac{3}{4} \frac{\Gamma(m/2)}{\Gamma(m/2 + 2)} (4\pi^{m/2})^{-1} (1 - \|x\|^2)_+, \quad (11)$$

式中 $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\|x\| = (x_1^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$, $\Gamma(\cdot)$ 为 Γ 函数.由文献[14]可知,这是最优的核函数.

4. 仿真结果及讨论

为了验证多元局部多项式方法的有效性,选取多项式的阶数为 1 并在计算机仿真中采用如下的 Lorenz 混沌模型:

$$\dot{x} = \sigma(x + y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \quad (12)$$

式中 $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$. 对于(12)式的 Lorenz 模型,只考察分量 x 的预测.假定初值条件 $x_0 = 5$, $y_0 = 5$, $z_0 = 5$,利用四阶 Runge-Kutta 算法求解 Lorenz 系统的数值解,采样间隔时间 $\Delta t = 0.02$. 产生关于

x 的混沌时间序列如图 1 所示.求解获得 2000 点数据后按下式对混沌时间序列进行归一化处理:

$$u(n) = \frac{x(n) - \min(x(n))}{\max(x(n)) - \min(x(n))}, \quad (13)$$

式中 $x(n)$ 为原始混沌时间序列, $u(n)$ 为归一化的混沌时间序列.将实际值 $u(n)$ 介于预测值区间 $[y(n) - 1\%y(n), y(n) + 1\%y(n)]$ 的预测称为 1% 有效预测,而将实际值 $u(n)$ 介于预测值区间 $[y(n) - 5\%y(n), y(n) + 5\%y(n)]$ 的预测称为 5% 有效预测,其中 $y(n)$ 为 $u(n)$ 的预测值.同时考虑其预测的均方误差和绝对误差

$$e_{MS} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (u(i) - \hat{u}(i))^2, \quad (14)$$

$$e(n) = u(n) - y(n), \quad (15)$$

式中 I 为预测的个数.以下取延迟时间 $\tau = 1$.

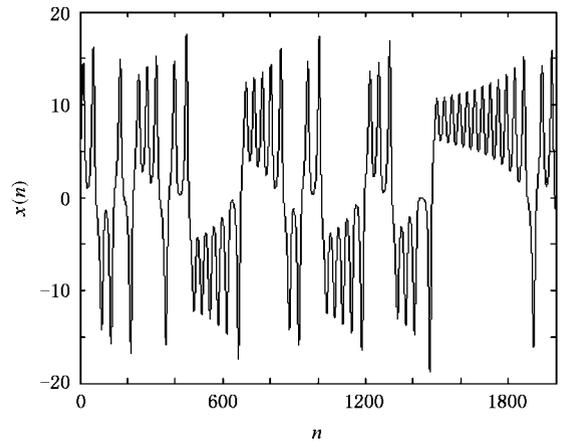


图 1 Lorenz 混沌时间序列 x 分量

我们选取前 1000 点作为观测数据,后 1000 个点作一步预测,即预测步长 $T = 1$.为了考察多元局

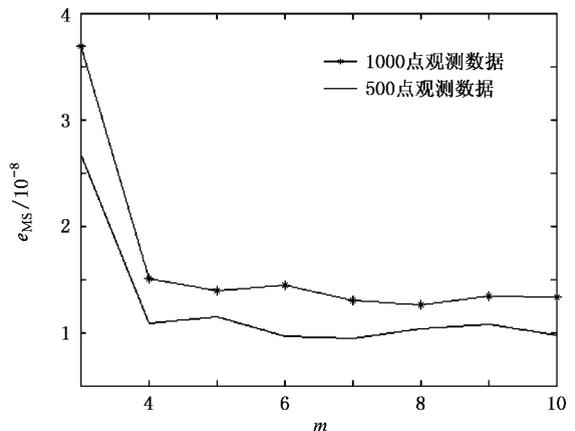


图 2 不同嵌入维数的一步预测均方误差

部线性方法的有效性,把观测数据减少一半,即选取前面 1000 点的后 500 点作为观测数据.图 2 表示嵌入维数 m 从 3 到 10 的预测均方误差,其中不同的嵌入维数都选取不同最优窗宽.从图 2 可知,1000 个观测数据时,最优嵌入维数为 7,而 500 个观测数据的最优嵌入维数为 8.当嵌入维数相同时,500 点观测数据的预测均方误差比 1000 点时要大,这是非参数估计的一大特点,即样本越多估计越准确.具体

的仿真结果如图 3 所示.图 3(a)(c)表明多元局部多项式方法对小数据的预测精度高,且图 3(b)(d)显示其预测的绝对误差也相当小.而从表 1 可知,多元局部多项式估计的有效预测率非常高.对于一步预测而言,不管观测数据为 500 点或 1000 点,其均方误差比文献 3—11 普遍低若干个数量级.这里的嵌入维数是根据具体的观测数据而定的,这是非参数估计的优点之一.

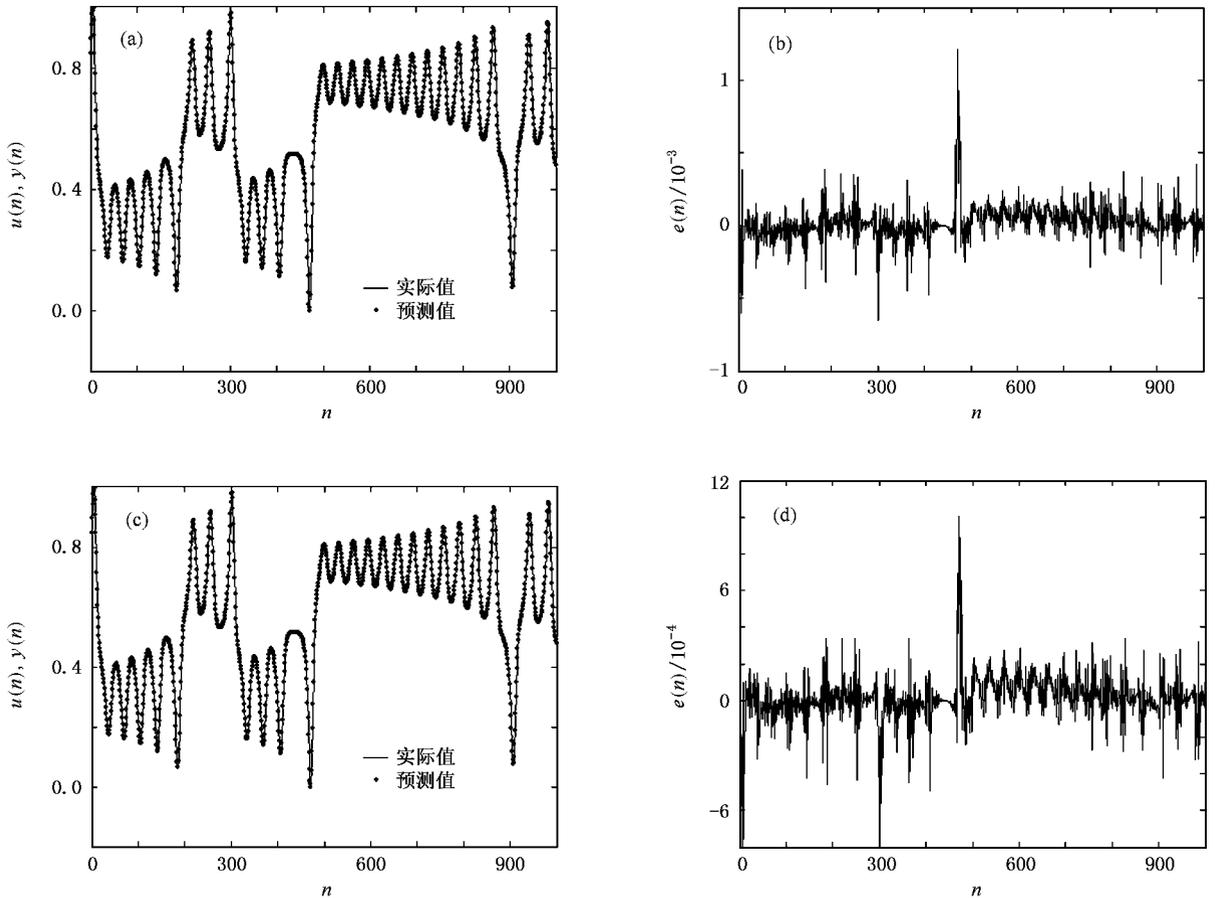


图 3 多元局部线性方法对 Lorenz 系统 x 分量的一步预测结果 (a)1000 个观测数据的实际值与预测值 (b)1000 个观测数据的预测绝对误差 (c)500 个观测数据的实际值与预测值 (d)500 个观测数据的预测绝对误差

为了考察该方法的多步预测性能,选取预测步长 $T=10$,其预测结果如表 1 所列.从表 1 可知,观测数据为 500 点或 1000 点的 10 步预测的 5% 有效预测率也可达到 90% 左右,虽然其 1% 有效预测率有所下降.这种估计误差是在可以接受的范围内,而且其均方误差也较小.1000 点的仿真结果如图 4 所示,而 500 点的仿真结果是类似的,故省略.图 4 显示多步预测的精度也较高.

表 1 不同观测数据用多元局部多项式方法的预测结果

T	观测数据	m	有效预测率/%	e_{MS}
1	1000	7	99.8(99.7)	9.4522×10^{-9}
1	500	8	99.8(99.7)	1.2673×10^{-8}
10	1000	4	94.7(64.0)	8.5904×10^{-5}
10	500	7	89.7(50.0)	2.3485×10^{-4}

注:有效预测率中,括号前为 5% 有效预测率,括号中为 1% 有效预测率.

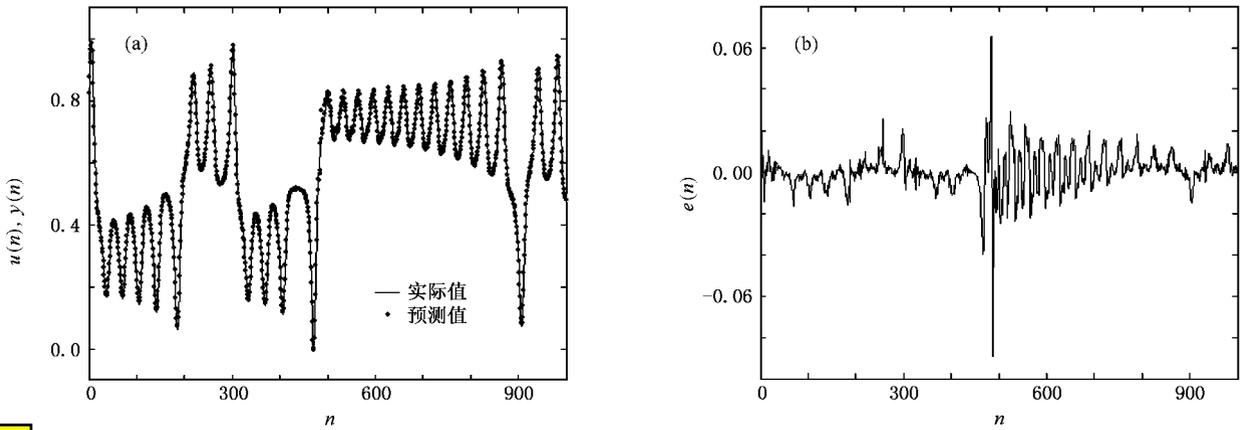


图4 1000点的多元局部多项式方法的10步预测 (a)1000个观测数据的实际值与预测值 (b)1000个观测数据的预测绝对误差

5. 结 论

本文基于 Takens 重构思想,把混沌时间序列构造为一组序列对,然后用多元局部多项式的方法来

预测原始序列.该方法综合了局域法与全局法的优点,可以根据具体的数据决定嵌入维数 m 的大小,因此使得预测的精度较高.仿真结果表明,该方法非常有效,是混沌时间序列预测一种新的有效尝试.

[1] Farmer J D, Sidorowich J J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 845

[2] Casdagli M 1989 *Physica D* **35** 335

[3] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese)
[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403]

[4] Zhang S, Xiao X C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5062 (in Chinese)
[张 森、肖先赐 2005 物理学报 **54** 5062]

[5] Tan W, Wang Y N 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 795 (in Chinese) [谭文、王耀南 2003 物理学报 **52** 795]

[6] Gao L Y 1995 *Physica D* **85** 225

[7] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese)
[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403]

[8] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2333 (in Chinese)
[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 2333]

[9] Gan J C, Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1096 (in Chinese)
[甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1096]

[10] Gan J C, Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1102 (in Chinese)
[甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1102]

[11] Meng Q F, Zhang Q, Mu W Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1666 (in Chinese) [孟庆芳、张 强、牟文英 2006 物理学报 **55** 1666]

[12] Ruppert D, Wand M P 1994 *Ann. Stat.* **22** 1346

[13] Fan J 1993 *Ann. Stat.* **21** 196

[14] Fan J, Zhang W 1999 *Ann. Stat.* **27** 1491

Prediction of the chaotic time series using multivariate local polynomial regression^{*}

Zhou Yong-Dao^{1)†} Ma Hong¹⁾ Lü Wang-Yong¹⁾²⁾ Wang Hui-Qi¹⁾

¹⁾ *College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*

²⁾ *College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China*

(Received 14 August 2006 ; revised manuscript received 15 May 2007)

Abstract

According to the Takens theorem, we reconstruct the chaotic time series to multivariate data and use the multivariate local polynomial estimator to predict the chaotic time series. This kernel estimator has the advantages of both the local model and the global model. The simulation shows that the estimator can predict the chaotic time series accurately.

Keywords : chaotic time series, multivariate local polynomial regression, kernel estimator

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10571127) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China(Grant No. 20040610004).

[†] E-mail : zhouyongdao@sohu.com