

# 超混沌 Rössler 系统构成的星形网络的混沌同步\*

秦 洁 于洪洁†

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

(2007 年 3 月 4 日收到, 2007 年 5 月 31 日收到修改稿)

通过对超混沌系统线性项与非线性项的适当分离配置, 构造一个特殊的非线性耦合函数作为单元之间的耦合函数, 提出非线性非对称耦合混沌同步方法, 研究超混沌 Rössler 系统单元按照星形连接形式组成网络的同步问题. 发现耦合强度在某一区域里存在着稳定的混沌同步现象, 分析并讨论了不同参数在耦合过程中对混沌同步过程及其稳定性的影响. 数值模拟结果证实该方法的有效性.

关键词: 超混沌同步, 非线性耦合, Rössler 系统, 星形网络

PACC: 0545

## 1. 引 言

超混沌系统的特点是至少在四维及更高维的非线性系统中具有两个或更多个正的 Lyapunov 指数  $\lambda$ , 它广泛存在于流体、化学、生物、社会、经济等众多领域中. 由于在保密通信及信息处理等方面具有诱人的应用潜力<sup>[1]</sup>, 混沌的同步与利用正在迅速发展, 而超混沌同步通信具有更大容量、更好保密性和更高效等优点而引起了人们的关注. 研究超混沌的控制和同步具有重要的实际意义, 不过超混沌比一般低维混沌系统的运动更复杂, 它具有多个不稳定性方向, 因此如何实现超混沌系统的控制与同步更具有挑战性.

超混沌同步的原理与一般混沌同步的原理基本上是相同的, 分为恒等同步和广义同步. 对于恒等同步, 简言之, 具有不同的初始条件的两个  $n$  维相同的或复制的超混沌系统, 如果它们分别用  $n$  维变量  $X$  和  $Y$  表示, 其中一个系统(例如  $Y$  系统)在  $m$  维输入反馈控制函数  $G$  的作用下,  $G=0$  时系统  $Y$  就是系统  $X$  的复制系统. 通常称系统  $X$  为驱动系统, 系统  $Y$  为响应系统. 从通信角度而言, 前者称为发射机系统, 后者称为接收机系统. 超混沌恒等同步的

任务是通过选择合适的控制器  $G(X, Y)$ , 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $Y(t) \rightarrow X(t)$ , 从而  $G(X, Y) \rightarrow 0$ , 使系统  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y - X\| = 0$ , 系统  $Y$  与系统  $X$  达到完全同步(包括幅度和相位),  $Y = X$ , 这就是恒等同步.

当然, 可以应用两个系统的误差动力学方程及 Lyapunov 函数方法论证超混沌同步. 这与用 Lyapunov 函数方法以及 Pecora 和 Carroll<sup>[2]</sup> 的同步原理对混沌同步的论证实质上都是等价的, 都能给出发生恒等同步的充分必要条件. 近几年, 人们对超混沌系统的同步进行了很多研究, 提出了一些可以达到超混沌系统同步的方法<sup>[3-9]</sup>.

由于混沌行为对初始条件和噪声的敏感性, 实际物理系统中很难观测到混沌同步. Pecora 和 Carroll 提出了一个使连续时间系统混沌同步的方法, 称为 PC 方法<sup>[2]</sup>. 当混沌系统的条件 Lyapunov 指数均为负数时, PC 方法用于同步这些混沌系统很简单有效. 但是对于存在一个或多个正 Lyapunov 指数的混沌或超混沌系统的同步问题, 就不能完全用 PC 方法来解决. Yu 和 Liu<sup>[10]</sup> 于 2003 年提出一个基于线性系统稳定性准则的混沌同步方法(简称为 SC 方法), 通过对驱动混沌系统的线性项与非线性项的适当分离, 构造一个受驱动系统的非线性项驱动的响应混沌系统, 利用线性系统稳定性准则保证两个系统的

\* 国家自然科学基金(批准号: 10572086)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050248031)资助的课题.

† E-mail: yuhongjie@sjtu.edu.cn

同步. SC 方法适用于自治、非自治混沌系统、高维混沌系统以及超混沌系统的同步,且方法简单有效. SC 方法是通过主系统变量单向驱使响应系统实现响应系统与主系统状态同步的. 文献 [11] 发展了 SC 方法, 提出利用非线性函数对称耦合实现超混沌系统同步的新方法, 即通过非线性耦合项的构造使两个超混沌系统对称耦合, 两个超混沌系统的状态变量互相驱使实现同步的目标. 这种方法基于同步误差方程的线性系统稳定性分析准则, 可保证系统的混沌同步, 而不需提供条件 Lyapunov 指数进行判断. 对于具有两个或更多正 Lyapunov 指数的超混沌系统也能实现理想的混沌同步, 是一种简单方便且有效的方法. 本文将进一步发展这种方法, 研究非对称耦合的两个超混沌 Rössler 系统的同步问题及由超混沌 Rössler 系统单元按照星形连接形式组成的网络的混沌同步问题. 在不同参数影响下, 观察了同步过程中的相图及时间历程, 比较了在耦合过程中部分参量发生变化的情况下对混沌同步过程及其稳定性的影响.

## 2. 非对称非线性耦合混沌系统同步

考虑如下描述的混沌连续-时间系统:

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t), \quad (1)$$

式中  $X(t) \in R^n$  为  $n$  维状态矢量,  $F: R^n \rightarrow R^n$ . 将  $F$  适当分离为

$$\dot{X}(t) = G(X(t)) - D(X(t), t), \quad (2)$$

式中  $G(X(t))$  是经过特殊配置的  $F(X(t), t)$  的线性部分, 即

$$G(X(t)) = AX(t). \quad (3)$$

这里  $A$  为满秩的常数矩阵, 通过适当的分离配置可使  $A$  的所有特征值均具有负实部.

$$-D(X(t), t) = F(X(t), t) - G(X(t))$$

为  $F(X(t), t)$  的非线性部分, 此时原系统 (1) 可写作

$$\dot{X}(t) = AX(t) - D(X(t), t). \quad (4)$$

本文讨论的同步为完全同步, 即恒等同步. 对于原连续-时间混沌系统 (4), 利用非线性函数  $D(X_1)$  与  $D(X_2)$  的差作为耦合函数, 构造如下两个新系统:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= AX_1(t) - D(X_1(t), t) \\ &\quad + \alpha [D(X_1(t), t) - D(X_2(t), t)] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= AX_2(t) - D(X_2(t), t) \\ &\quad + \beta [D(X_2(t), t) - D(X_1(t), t)] \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $X_1, X_2 \in R^n$  为所构造新系统的状态矢量, 耦合强度  $\alpha, \beta$  为常值, 当  $\alpha = \beta$  时, 为对称耦合. 当两个新系统 (5) 和 (6) 实现状态同步时, 即  $X_1(t) = X_2(t)$  时, 新系统 (5) 和 (6) 与原系统 (1) 一致, 保持其混沌动力特性. 取新系统 (5) 和 (6) 之间的同步误差

$$e(t) = X_1(t) - X_2(t).$$

当  $e(t)$  充分小时, 其变化规律近似用线性方程表示为

$$\dot{e}(t) = \left[ A + (\alpha + \beta - 1) \frac{\partial D}{\partial X} \right] e. \quad (7)$$

当  $\alpha + \beta = 1$  时,  $e(t)$  的零点为平衡点. 由于  $A$  的所有特征值实部均为负值, 根据线性系统稳定性准则, 同步误差的零点为渐进稳定, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e(t) \rightarrow 0$ . 此时即实现新系统 (5) 和 (6) 的状态矢量  $X_1(t)$  和  $X_2(t)$  的完全同步. 当  $\alpha + \beta \neq 1$  时, 需要计算方程 (7) 的条件 Lyapunov 指数, 若同步状态具有稳定性, 则条件 Lyapunov 指数为负值. 当  $\alpha = \beta = 0.5$  时, 就是文献 [11] 中的对称耦合实现两个混沌系统同步的情况.

## 3. 两个超混沌 Rössler 系统的对称与非对称耦合同步

超混沌 Rössler 系统可描述为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + x_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= b + x_1x_3, \\ \dot{x}_4 &= cx_4 - dx_3, \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $a = 0.25, b = 3.0, c = 0.05, d = 0.5$ . 数值分析显示系统有两个正 Lyapunov 指数,  $\lambda_1 = 0.11, \lambda_2 = 0.02$ , 表明此系统的超混沌性态. 将系统 (8) 的右端函数分离为函数  $G(X(t))$  和  $D(X(t))$  如下:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4) = - \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + 2ax_2 + x_4 \\ x_3 + x_1x_3 + b \\ 2cx_4 - dx_3 \end{pmatrix}.$$

矩阵  $A$  的特征值  $(-1, -0.25, -1, -0.5)$  均为负实数, 此时按照系统 (5) 和 (6) 通过非线性耦合构造两个新系统  $\dot{X} = F_1(X(t))$  和  $\dot{Y} = F_2(Y(t))$  如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 + x_3) + \alpha(x_1 - x_2 - x_3 - y_1 + y_2 + y_3), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2 + x_4 + \alpha(x_1 + 2ax_2 + x_4 - y_1 - 2ay_2 - y_4), \\ \dot{x}_3 &= b + x_1x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \alpha(x_3 + x_1x_3 - y_3 - y_1y_3), \\ \dot{x}_4 &= cx_4 - dx_3 + \alpha(2cx_4 - dx_3 - 2cy_4 + dy_3); \quad (9) \\ \dot{y}_1 &= -(y_2 + y_3) + \beta(x_1 - x_2 - x_3 - y_1 + y_2 + y_3), \\ \dot{y}_2 &= x_1 + ay_2 + y_4 + \beta(x_1 + 2ax_2 + x_4 - y_1 - 2ay_2 - y_4), \quad (10) \\ \dot{y}_3 &= b + y_1y_3 + \beta(x_3 + x_1x_3 - y_3 - y_1y_3), \\ \dot{y}_4 &= cy_4 - dy_3 + \beta(2cx_4 - dx_3 - 2cy_4 + dy_3). \end{aligned}$$

按照方程 (7) 列出同步误差的微分方程

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\alpha + \beta) & \alpha + \beta - 1 & 0 & 0 \\ 1 - (\alpha + \beta) & (1 - \alpha + \beta)a & 0 & 0 \\ (1 - (\alpha + \beta))y_3 & 0 & (1 - (\alpha + \beta))(y_1 + 1) - 1 & 0 \\ 0 & 0 & ((\alpha + \beta) - 1)d & (1 - \alpha + \beta)c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (11)$$

若系统 (9) 和 (10) 同步状态是稳定的, 则方程组 (11) 的条件 Lyapunov 指数均为负值. 首先对于两个超混沌 Rössler 系统对称耦合情况进行研究, 图 1 给出耦合强度  $\alpha = \beta = 0.5$  时的同步结果. 从图 1 可以看出,  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  的同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 很快趋于零. 数值模拟中初值采用  $x_1(0) = -5, x_2(0) = -2, x_3(0) = 0.15, x_4(0) = 10.5; y_1(0) = -5, y_2(0) = -4.2, y_3(0) = 0.15, y_4(0) = 10.5$ . 当  $\alpha + \beta = 1.0$  时, 如上所述, 由于 Jacobi 矩阵  $A$  的特征值实部均为负值, 满足线性系统稳定性准则, 其同步误差具有渐进稳定性, 不需计算条件 Lyapunov 指数. 图 1 的模拟结果表明, 两个超混沌 Rössler 系统 (9) 和 (10) 迅速实现混沌同步.

此外, 分别选取双耦合强度参数  $\alpha = \beta = 0.35$  和  $\alpha = \beta = 0.45$ , 进行了混沌同步过程的数值模拟. 图 2(a) 为  $\alpha = \beta = 0.35$  时状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  的同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  的变化. 从图 2(a) 可以看出,  $e_2(t)$  很快趋于零, 计算同步误差的最大 Lyapunov 指数为负值, 表明同步流形是稳定的. 图 2(b) 为  $\alpha = \beta = 0.45$  时状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  随迭代步  $i$  的时间历程图. 从图 2(b) 可以看出, 状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  迅速趋于一致, 实现系统状态的完全同步, 同步误差的最

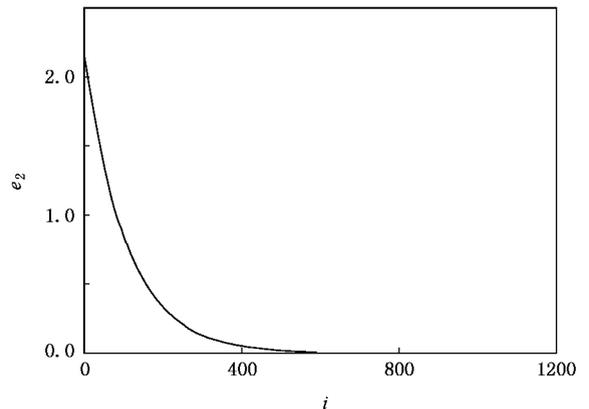


图 1 系统 (9) 和 (10) 的同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  的变化

大 Lyapunov 指数为负值, 混沌同步状态是稳定的.

在对称耦合  $\alpha = \beta$  的情况下, 通过数值模拟, 可以得到满足同步稳定性要求的耦合强度  $\alpha$  的范围, 当  $\alpha \in [0.24, 0.54]$  时, 在此区间内两个系统的同步状态具有较好的稳定性. 当  $\alpha \in [0, 0.23]$  时, 两个超混沌系统不能实现状态的完全同步. 图 3 显示  $\alpha = \beta = 0.1$  时, 两个系统的状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  未能实现同步 (取 3000 个迭代步).

当  $\alpha \in [0.55, \infty)$  时, 两系统的状态  $x_2(t)$  和

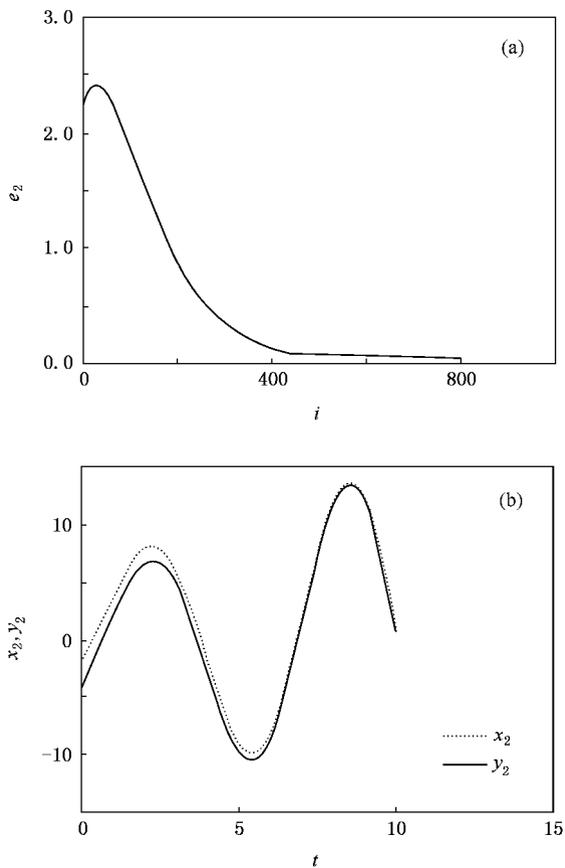


图 2 耦合强度分别为  $\alpha = \beta = 0.35$  和  $\alpha = \beta = 0.45$  的同步结果 (a) 同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  的变化,  $\alpha = \beta = 0.35$  (b) 两系统状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  随迭代步  $i$  的时间历程图,  $\alpha = \beta = 0.45$

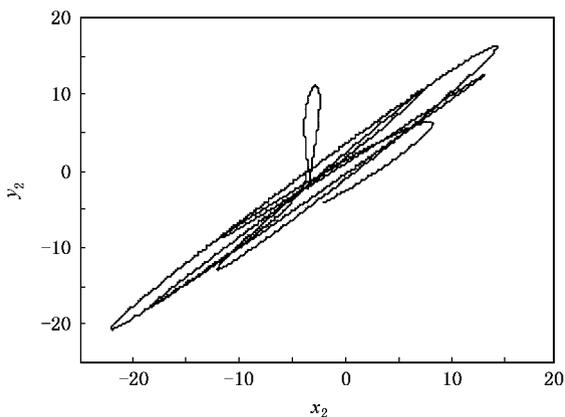


图 3  $\alpha = \beta = 0.1$  时状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  没有实现同步

$y_2(t)$  的数值溢出, 当然无法实现混沌同步, 可见较大的耦合强度可以改变混沌系统本身的动力特性. 分别取  $\alpha = 0.3, 0.34, 0.38, 0.42, 0.46, 0.5, 0.54$ ,  $\beta = \alpha$ , 作图比较同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化如图 4(a) 所示. 从图 4 可以看出,  $\alpha$  的取值对

两个超混沌 Rössler 系统的同步稳定性并无显著影响, 在耦合强度参数  $\alpha = 0.5$  附近的一段区域内, 能最有效地实现两个超混沌系统状态的同步.

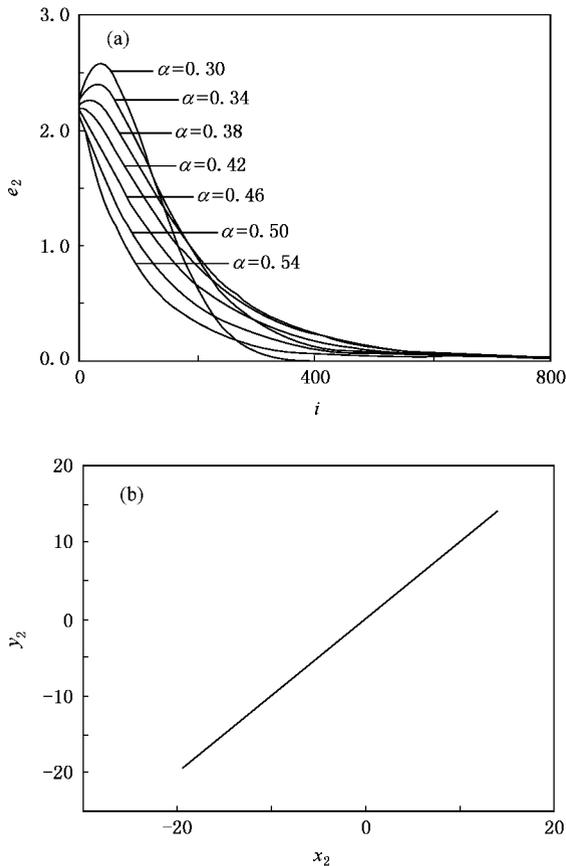


图 4 当  $\alpha = 0.3, 0.34, 0.38, 0.42, 0.46, 0.5, 0.54$  时的同步结果 (a) 同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化 (b)  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  的同步结果

Rössler 方程组右端的线性部分函数  $G(X(t))$  的配置并不唯一, 在保证常数矩阵  $A$  的所有特征值均具有负实部的情况下, 可将其取为

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

式中  $\mu$  为影响矩阵  $A$  的特征值的可调参数. 取  $\alpha = 0.5$ , 当  $\mu$  分别为  $0.1, 0.2, 0.3$  时, 矩阵  $A$  的特征值分别为  $(-1, -0.35, -1, -0.5)$ ,  $(-1, -0.45, -1, -0.5)$ ,  $(-1, -0.55, -1, -0.5)$ . 作图比较同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化如图 5 所示. 由图 5 可以看出,  $\mu$  的大小对两系统状态的同步并

无显著影响,即函数  $G(X(t))$  的常数矩阵  $A$  的选取虽然并不唯一,但只要满足其特征值具有负实部的条件,对同步稳定性的过程并无明显影响.图1—图5给出的结果均是针对  $\alpha = \beta$  的对称耦合情况.

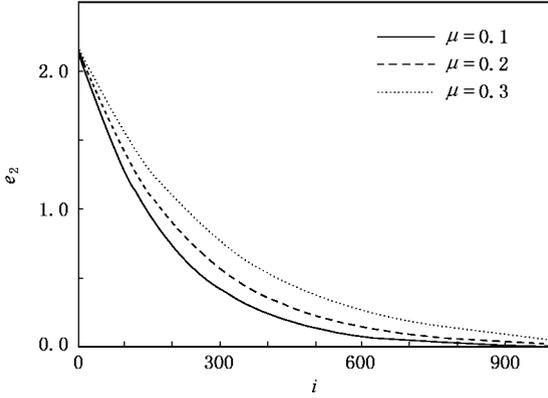


图5 取  $\alpha = \beta = 0.5$ ,  $\mu$  分别为 0.1, 0.2, 0.3 时,同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化

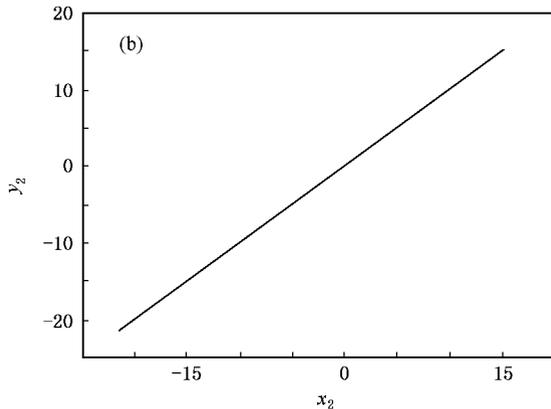
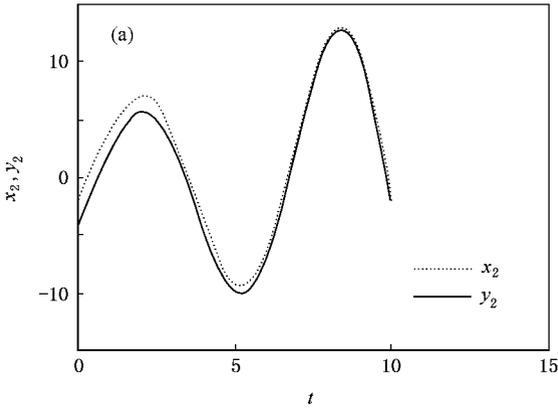


图6 取  $\alpha = 0.0, \beta = 1.0$  时的同步结果 (a)两系统状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步前后的时间历程 (b)两系统的状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步后的结果

对于非对称耦合的情况,图6给出  $\alpha = 0.0, \beta = 1.0$  时两系统的状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步后的结果,所有的状态点  $(x_2, y_2)$  都在直线  $x_2 - y_2 = 0$  上.

再取  $\alpha = 0.35, \beta = 0.65$ ,图7为两系统的状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  随迭代步  $i$  的时间历程及同步结果.

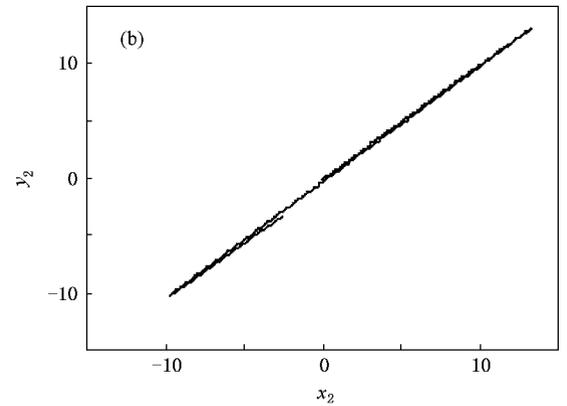
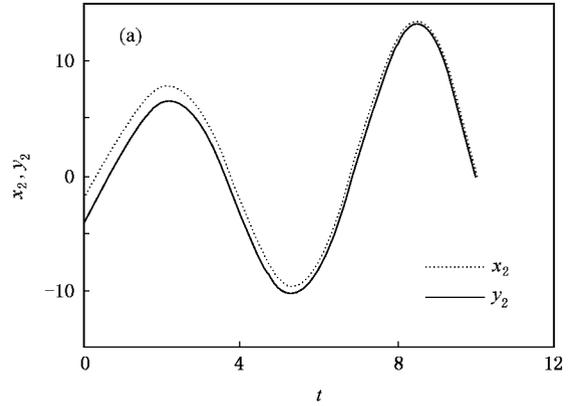


图7 取  $\alpha = 0.35, \beta = 0.65$  时的同步结果 (a)两系统状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步前后的时间历程 (b)两系统的状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  实现同步后的结果

令  $\beta = 1.0$ ,通过数值计算并作图,可以得到满足同步稳定性的耦合强度  $\alpha$  的范围,当  $\alpha \in [-0.24, 0.08]$  在此区间内两个系统的同步具有较好的稳定性.分别取  $\alpha = -0.2, -0.1, 0$  作图,比较两系统状态  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$  同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化如图8所示.由图8可以看出,在  $\alpha \in [-0.24, 0.08]$  内,  $\alpha$  的大小对两系统状态同步过程并无明显影响.

### 4. 星形连接的网络系统的同步

将非对称方法发展推广到由多个超混沌 Rössler 系统按照星形连接组成的网络系统.该系统可描

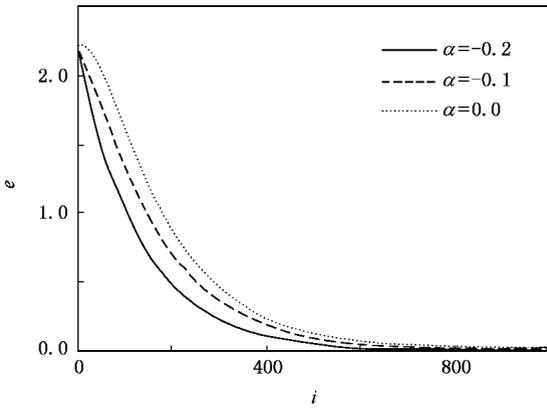


图 8 取  $\alpha = -0.2, -0.1, 0$  时, 同步误差  $e_2(t)$  随迭代步  $i$  ( $\Delta t = 0.01$ ) 的变化

述为

$$\dot{X}_i(t) = AX_i(t) - D(X_i(t)) + \alpha_i \sum_j \bar{G}_{ij} D(X_j(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

式中  $D(X(t))$  仍然是以上给出的非线性耦合函数,  $\bar{G}$  为星形连接系数矩阵,

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} N-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

令

$$e_1 = X_1 - X_2, \quad e_i = X_i - X_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

设第一个超混沌 Rössler 系统的耦合强度参数  $\alpha_1 = \alpha_{star}$ , 第  $i$  个超混沌 Rössler 系统的耦合强度参数  $\alpha_i = \beta_{star}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ) 则同步误差为

$$\dot{e}_1 = [A + ((N-1)\alpha_{star} + \beta_{star} - 1) \frac{\partial D}{\partial X}] e_1 \quad (15)$$

$$\dot{e}_i = [A + (\beta_{star} - 1) \frac{\partial D}{\partial X}] e_i \quad (i = 2, 3, \dots, N-1). \quad (16)$$

可明显看出, 当  $\alpha_{star} = 0.0, \beta_{star} = 1.0$  时,  $e_1$  及  $e_i$  的零点为平衡点. 由于  $A$  的所有特征值实部均为负值, 根据线性系统稳定性准则, 同步误差的零点为渐进稳定, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e_1 \rightarrow 0$  且  $e_i \rightarrow 0$ . 此时即实现该网络系统的状态变量完全同步. 当  $\alpha_{star} = 0.0, \beta_{star} = 1.0$  时, 这种情况就是属于网络中第一个神经元单元驱使其他神经元的情况. 取  $N = 4$ , 四个神经元的状态向量分别是

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \\ Y &= (y_1, y_2, y_3, y_4)^T, \\ Z &= (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \\ W &= (w_1, w_2, w_3, w_4)^T, \end{aligned}$$

有星形连接矩阵

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

从初始值  $X(0) = (-5, -2, 0.15, 10.5)^T, Y(0) = (-5, -4.2, 0.15, 10.5)^T, Z(0) = (-5, -8, 0.15, 10.5)^T, W(0) = (-5, -14, 0.15, 10.5)^T$  出发, 给出  $\alpha_{star} = 0.0, \beta_{star} = 1.0$ , 四个 Rössler 单元的第二个状态变量  $x_2(t), y_2(t), z_2(t)$  和  $w_2(t)$  实现同步前后的时间历程如图 9(a) 所示. 从图 9(a) 可以看出, 即使初始同步误差较大, 这几个超混沌系统也能很快实现同步.  $x_2(t), y_2(t), z_2(t), w_2(t)$  的同步结果如图 9(b) 所示.

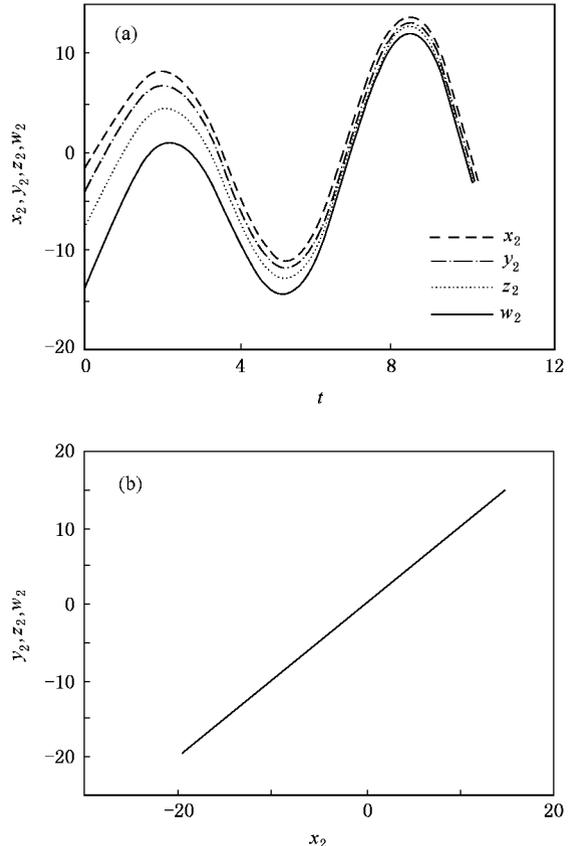


图 9 取  $\alpha_{star} = 0.0, \beta_{star} = 1.0$  时的同步结果 (a)  $x_2(t), y_2(t), z_2(t), w_2(t)$  同步前后的时间历程 (b) 系统状态  $x_2(t), y_2(t), z_2(t), w_2(t)$  的同步结果

图 10 显示  $x_2(t), y_2(t), z_2(t)$  和  $w_2(t)$  的同步误差  $e_1(t) = x_2 - y_2, e_2(t) = y_2 - z_2, e_3(t) = z_2 - w_2$  随迭代步  $i (\Delta t = 0.01)$  很快趋于零, 可以看出四个系统迅速实现同步.

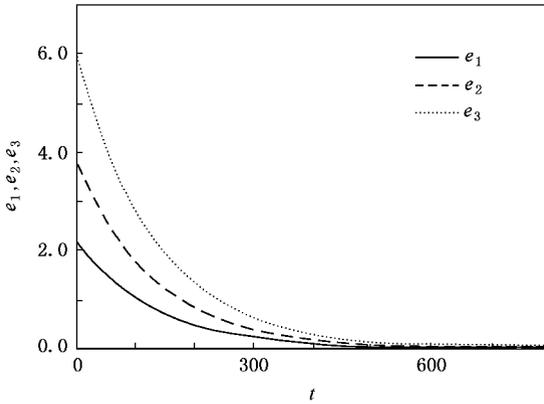


图 10 同步误差  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  随时间  $t$  的变化

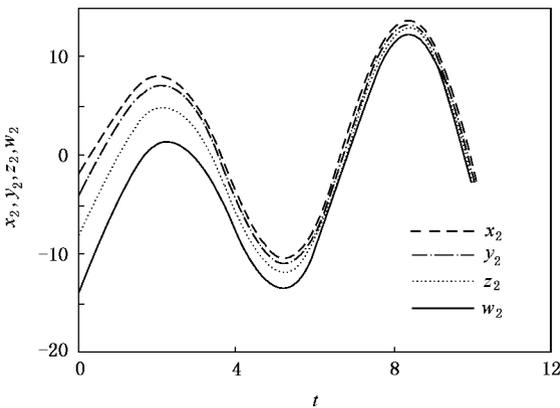


图 11 取  $\alpha_{star} = 0.02, \beta_{star} = 1.0$  时,  $x_2(t), y_2(t), z_2(t), w_2(t)$  同步前后的时间历程

令  $\beta_{star} = 1.0$ , 通过数值计算可以得到满足稳定性要求的  $\alpha_{star}$  的范围, 即  $\alpha_{star} \in [-0.117, 0.029]$ . 在此区间内, 星形连接的四个超混沌系统的同步具有较好的稳定性. 当  $\alpha_{star} = 0.02, \beta_{star} = 1.0$  时, 四个 Rössler 单元的第二个状态变量  $x_2(t), y_2(t), z_2(t)$  和  $w_2(t)$  实现同步前后的时间历程如图 11 所示.

### 5. 结 论

我们利用对称非线性耦合混沌同步方法, 研究超混沌 Rössler 系统的混沌同步. 提出非对称非线性耦合混沌同步的方法, 将该方法应用到超混沌系统单元通过非线性耦合按照星形连接形式组成的网络中. 在对称非线性耦合情况下, 发现在耦合强度  $\alpha = 0.5$  的邻近区域  $\alpha \in [0.24, 0.54]$ , 两个超混沌 Rössler 系统存在稳定的混沌同步现象. 在此范围内,  $\alpha$  的取值大小对两个系统状态的同步过程并无明显影响. 当满足 Jacobi 矩阵  $A$  的所有特征值均具有负实部的情况下, 矩阵  $A$  的配置不唯一. 还讨论了配置矩阵  $A$  的参数  $\mu$  的大小对两个系统状态的同步稳定性的影响情况. 数值模拟显示参数  $\mu$  对同步稳定性并无明显影响. 对于非对称非线性耦合混沌系统同步方法, 取  $\beta = 1.0$ , 当  $\alpha \in [-0.24, 0.08]$ , 在此区间内两个超混沌系统的同步状态具有较好的稳定性. 多个超混沌 Rössler 系统组成(星形连接)的网络系统的混沌同步中, 在耦合强度  $\alpha_{star} = 0.0, \beta_{star} = 1.0$  的邻近区域内, 该网络系统存在稳定的混沌同步现象. 令  $\beta_{star} = 1.0$ , 当  $\alpha_{star} \in [-0.117, 0.029]$ , 在此区间内星形连接的四个超混沌系统组成的网络系统的同步状态具有较好的稳定性.

[ 1 ] Huang R S, Huang J 2005 *Chaos and the Application* (Wuhan: Wuhan University Press) p394 (in Chinese) [ 黄润生、黄洁 2005 混沌及其应用(武汉: 武汉大学出版社)第 394 页 ]  
 [ 2 ] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [ 3 ] Peng J H, Ding E J, Ding M, Yang W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904  
 [ 4 ] Ail M K, Fang J Q 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5285  
 [ 5 ] Tamasevicius A, Genys A, Namajunas A, Mykolaitis G 1998 *Chaos Solitons Fract.* **9** 1403  
 [ 6 ] Cheng L, Zhang R Y, Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in

Chinese) [ 程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536 ]  
 [ 7 ] Zhang H, Ma X K, Yang Y, Xu C D 2005 *Chin. Phys.* **14** 86  
 [ 8 ] Ma J, Liao G H, Mo X H, Li W X, Zhang P W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5585 (in Chinese) [ 马 军、廖高华、莫晓华、李维学、张平伟 2005 物理学报 **54** 5585 ]  
 [ 9 ] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [ 蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997 ]  
 [ 10 ] Yu H J, Liu Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **314** 292  
 [ 11 ] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 (in Chinese) [ 于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029 ]

# Synchronization of star-network of hyperchaotic Rössler systems \*

Qin Jie Yu Hong-Jie<sup>†</sup>

( *Department of Engineering Mechanics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China* )

( Received 4 March 2007 ; revised manuscript received 31 May 2007 )

## Abstract

The synchronization of two symmetrical and nonsymmetrical nonlinear-coupled chaotic systems is discussed. A special nonlinear-coupling term is constructed by suitable separation between linear and nonlinear terms of the chaotic system , and the phenomenon of stable chaotic synchronization can be found in a certain region of the coupling strength. We used this method in hyperchaotic synchronization of Rössler system. The method can also be generalized to a form for hyperchaotic synchronization of networks linked by star coupling connection. By varying parameters in a region , we observed its effects on the stability of chaotic synchronization. Numerical calculation showed that the method is effective for hyperchaotic synchronization of Rössler system.

**Keywords** : synchronization of hyperchaos , nonlinear-coupled system , Rössler system , star-networks

**PACC** : 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10572086 ) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China( Grant No. 20050248031 ).

<sup>†</sup> E-mail : yuhongjie@sjtu.edu.cn