基于多重耦合映像格子的 信号初值恢复研究*

庞 全 武 薇[†] 范影乐

(杭州电子科技大学生物医学工程及仪器研究所 杭州 310018)(2006年11月6日收到 2007年6月1日收到修改稿)

利用耦合映像格子恢复信号初值是信号处理研究中一个重要的问题.耦合映像格子具有混沌系统的初值敏感 性,当初值受到噪声污染时将会影响到系统对其的恢复.提出了一种由多个一维耦合映像格子系统并列耦合而成 的多重耦合映像格子系统,通过将多个一维系统耦合,使因受到噪声干扰而趋向于指数分离的混沌轨道相互靠近, 以达到抑制噪声的目的.数值仿真表明,该系统具有较强的抗噪声能力和较高的鲁棒性.在耦合系数选取适当的情 况下,即使初始信号受到噪声干扰,该多重耦合系统仍然能够很好地恢复信号初值的统计特性,且对单个初值的恢 复情况及与初始信号的相关度等性能都远优于单一的一维系统.

关键词:耦合映像格子,恢复信号的统计特性,多重耦合 PACC:0545,0250

1.引 言

耦合映像格子(CML)模型^[1]是 1984 年由 Kaneko提出,它将系统演化过程分解成一系列简单 过程顺序进行,因此容易得到时空行为与系统参数 之间的对应规律.另外,此模型是基于对时空的半宏 观描述,具有数值计算效率高、并行程度好等优点, 因此在时空混沌的研究工作中备受关注^[2],现已在 多个领域得到了发展与应用,包括信号检测、气象预 报、混沌系统、神经网络、混沌控制等^[3-6].随着混沌 理论的日趋成熟,对于 CML的研究得到了进一步的 深入.

最近,在信号处理研究中,基于 Logistic 映射的 CML 粗略恢复初值的方法被提出,并进行了初步的 实验研究^[7],该研究并未考虑到格子的初始信号分 布可能受到噪声污染,仅局限于对未受噪声污染的 初值进行恢复.在此基础上,一种采用时变映像系数 对 Logistic 映射的系数 λ 进行修正的方法被提出,其 适用于有噪情况下的信号估计^[8].该方法局限于采 用 Logistic 映射作为混沌动力函数的情形 ,而对于其 他更具有一般性的映射函数,需要对系数进行重新 推导修正,由于初始信号受到一定的噪声扰动不可 避免 根据混沌系统具有对初值和参数敏感的特性, 噪声的干扰就会使混沌轨道趋向指数分离,而耦合 起来的混沌系统能够相互控制和影响 通过适当的 耦合可以使本来分离的轨道反而相互靠近^{9]},从而 达到抑制噪声影响的效果.本文将 n(n > 1)个一维 CML系统在空间上进行并列耦合,并将该多重耦合 后的 CML 系统应用于对信号初值的恢复,本文的 方法不仅充分考虑了 CML 格点之间的耦合作用, 而且不局限于某个单一混沌动力系统函数,具有 更广泛的应用价值,文中通过数值仿真,从恢复信 号的统计特性、对单个初值的恢复情况以及所恢 复信号与初始信号的相关度等三个方面,将改 进后的系统与单一 CML 系统进行了性能比较. 仿真结果表明,改进后的多重耦合的 CML 系统 较单一的 CML 系统的信号恢复精度有很大的 提高且具有更强的噪声抑制能力和较高的鲁 棒性.

^{*} 国家自然科学基金(批准号 50302027),浙江省自然科学基金(批准号 502127)和浙江省科技计划重点项目(批准号 2007C23074)资助的 课题。

[†] E-mail:wein.wu@gmail.com

2. 模型与方法

2.1. 一维 CML 模型与方法

一维 CML 模型是一个在时间和空间上离散,但 状态变量仍保持连续的动力学系统,其仅耦合最近 邻的局部耦合模型为

$$x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon) f(x_n(i)) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) [f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))], \quad (1)$$

其中 n 表示离散化后的时间 ,i = 1 ,2 ,... ,L 是格子 长度 ,而 L 是格子数 , ε 是耦合系数 ,周期性边界条 件由 $x_n(i) = x_n(i + L)$ 实现.

(1) 武中的一维 CML 模型,只有一个时间过程 和一个空间过程——反应和扩散.在离散化过程中, 认为反应过程可以用局部非线性动力学来替代,并 与扩散过程分开考虑²¹.因此,令该反应过程为动力 系统函数 f(x),且 $f^{-1}(x)$ 存在.由于用于恢复初值 的 CML 系统是一个混沌系统,其不同的初值可以确 定不同的序列 x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_n , x_{n+1} ,… = { x_i } 称 为轨道.按符号动力学方法¹⁰¹,对于每一条轨道 { x_i },把 x_i 与 x_c 按下式相比较后可以将轨道{ x_i }突 为符号序列 $S_n = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_n\}$:

$$s_{i} = \begin{cases} 0 & (x_{i} \in [0, x_{c}]), \\ 1 & (x_{i} \in (x_{c}, 1]), \end{cases}$$
(2)

其中 x_e 为临界值.这样,对于 CML 系统,从初值 x_0 出发的轨道就可以由序列 S_n 完全描述,这个符号序 列也可以看成是初值 x_0 的动力学编码^[7].又由于 f^{-1} 存在,因此可以从该编码中恢复出初值 x_0 .

$$x_{0} = \lim_{n \to \infty} f_{s_{0}}^{-1} \circ f_{s_{1}}^{-1} \circ \dots \circ f_{s_{j}}^{-1} \circ \dots \circ f_{s_{n-1}}^{-1} (x_{n})$$

$$\approx f_{s_{0}}^{-1} \circ f_{s_{1}}^{-1} \circ \dots \circ f_{s_{j}}^{-1} \circ \dots \circ f_{s_{N-2}}^{-1} (x_{N-1}), (3)$$

第*j-*1个CML系统

其中符号。表示映射的集合,*j* = 0, 1, ..., *N* – 1, *N* , 而 *N* 为符号序列的长度.

考虑到一维单峰 Logistic 映射作为典型的非线 性混沌系统,对其研究较为深入,因此 CML 中的动 力系统函数 ƒ(x)一般采用一维单峰 Logistic 映射. 一维单峰 Logistic 映射的映射方程为^[11]

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n).$$
 (4)

由(4)式可得

$$x_n = f_{s_n}^{-1} (x_{n+1})$$

=[1+(2 s_n - 1) $\sqrt{1 - 4x_{n+1}/\lambda}$]/2, (5) 其中 s_n 是(2)式中当 x_c = 0.5 时所得到的符号序列 值.在没有噪声的情况下,对满 Logistic 映射(λ = 4), 当映射步数 *M* = 50 时,理论上由(3)式所得到估计 值的误差小于 10⁻¹⁵数量级^[12].

2.2. 多重耦合的 CML 模型与方法

第 *i*+1 个CML 系统

用于恢复初值的 CML 系统是混沌系统 同样具 有对初值的敏感性.因此 若初值中混有噪声必然会 引起混沌轨道的漂移,造成本应一致的轨道出现指 数分离 影响到所恢复初值的精度,倘若将多个混沌 系统耦合 则可以使得混沌轨道因耦合而相互靠近, 将因噪声引起的轨道分离抑制在一定范围内 从而 提高系统对初值的恢复精度,目前的研究大多仅关 注基于单一的一维 CML 系统的初值恢复方法,由于 受到噪声扰动影响 就不可避免地存在着轨道漂移 现象.本文设想将 n(n > 1)个一维 CML 系统并列耦 合并借鉴二维 CML 系统模型构成多重耦合系统 图 1) 以实现在较好地抑制噪声干扰的基础上恢复初 值.需要指出的是 这里所谓的二维 CML 系统 是指 在二维空间上的一个 CML 模型 :而多重耦合的 CML 系统 是指图 1 所示的在一个二维空间上进行耦合, 耦合的基本单元是一维 CML 系统 参与每次耦合的 基本单元数由 n 决定,其中所借鉴的二维 CML 模

↓		↓		Ļ			
 (<i>i</i> -1, <i>j</i> -1)	R_2	(<i>i</i> -1, <i>j</i>)	R_1	(<i>i</i> -1, <i>j</i> +1)	R_2		
 (<i>i</i> , <i>j</i> –1)	R_1	(<i>i</i> , <i>j</i>)		(<i>i</i> , <i>j</i> +1)	R_1		
 (<i>i</i> +1, <i>j</i> -1)	R_2	(<i>i</i> +1, <i>j</i>)	R_1	(i+1, j+1)	R_2	•••	
•••							

第 / 个CML系统

)

型为

$$x_{n+1}(i \ j) = (1 - \epsilon) f(x_n(i \ j)) + \epsilon \sum_{\substack{(i',j') \in K(i,j)}} f(x_n(i',j')). \quad (6)$$

这里(*i*,*j*)为二维 CML 中的格子坐标 ,*R*(*i*,*j*)为坐 标点(*i*,*j*)的近邻区域 ,*f*(*x*)为动力系统函数 ,ε 是 耦合系数.

由于耦合强度越大,耦合对轨道的拉近效果越 明显^[7],为了使初值恢复系统对噪声的抑制效果更 为明显,可以根据(1)和(6)式用n个一维CML系统 构成一个新的多重耦合的CML系统,并对耦合系数 部分做一定的改进,以使其能更好地抵抗噪声的影 响.改进后的多重耦合的CML系统如图1所示.图1 中,...,第j-1列,第j列,第j+1列,...分别代表 一维的CML系统,且j=1,2,3,...,n,其中n为参 与耦合的一维CML系统总数.边界条件如下:当j=1时,j-1=n;当j=n时,j+1=1.这说明在该多 重耦合的CML的格子坐标中,不同的列代表不同的 一维CML系统,而每个一维CML系统在相同的行 具有相同的信号初值,但是其所受到的噪声扰动是 随机的.倘若令第j个系统为x,则可得到多重耦合 的CML系统模型为

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i \ j) &= (1 - \varepsilon) f(x_n(i \ j)) \\ &+ \varepsilon \Big[\alpha \sum_{(i' \ j') \in R_1(i \ j)} f(x_n(i' \ j'))), \\ &+ \frac{\alpha}{m_{(i' \ j') \in R_2(i \ j)}} \sum_{j \in R_2(i \ j)} f(x_n(i'' \ j'')) \Big] , (7) \end{aligned}$$

其中(*i*,*j*)可视为第*j*个 CML 系统 *x* 中的格子坐标; $R_1(i,j)$ 为坐标点(*i*,*j*)的最近邻区域,如图 1 中标有 R_1 的格子; $R_2(i,j)$ 为坐标点(*i*,*j*)的次近邻区域,如图 1 中标有 R_2 的格子; ϵ 和 *a* 是耦合系数.由于最近邻点较次近邻点与初值恢复点的关系更为紧密,因此(7)式中次近邻点对恢复点的耦合系数设定为最近邻点的 1/*m*,其中 *m* > 1.

3. 数值仿真与分析

3.1. 耦合系数的选取

为了使改进后的多重耦合的 CML 系统能够得 到最佳的初始信号恢复值,首先应对耦合系数 ε 和 α进行训练,以选择最优值.令该耦合系数对于所恢 复初值的均值和误差这两个统计特性的影响作为选 择评判标准.误差可用所恢复初值的均方根误差 (RMSE)来衡量,即

$$e_{\rm rms} = \sqrt{\sum_{i=1}^{L} [s(i) - \tilde{x}(i)]^2 / L}$$
, (8)

其中 s 表示未受噪声干扰的信号初值 , x 表示恢复 信号初值.

数值仿真取 *n* = 3 ,即三个一维 CML 系统进行 耦合.令三个系统的输入初始信号分别为

$$x_n = s_n + w_{n1}$$
,
 $y_n = s_n + w_{n2}$,
 $z_n = s_n + w_{n3}$,

其中 s_n 为信号初值,取值为(0,1)上均匀分布的随 机数; $w_n = \{w_{n1}, w_{n2}, w_{n3}\}$ 为高斯噪声, $w_n \sim N(0, 0.1^2$),映射步数 M = 50. 对三个系统按图 1 中所示, 根据(7)式进行映射,其中动力系统函数 f(x)采用 Logistic 映射,m = 16. 并由(3)式恢复信号初值.该 过程中需分别对两个耦合系数进行训练,即固定一 个系数不变,另一个系数从0.01 变化到 1,步长为 0.01. 并比较恢复初值的均值 μ_r 与 e_{ms} ,选取 ε 和 α 的最优值.限于篇幅,这里仅给出了当 $\alpha = 0.32$ 时, ε 从0.01 变化到 1 所得到的 μ_r 与 e_{ms} 比较(图 2).当 ε 取值在 0.3—0.4 时,系统所得到的 μ_r 与未受噪 声污染的 s_n 的均值 $\mu_{\rm B}$ 为相近,且其 e_{ms} 最小.因



图 2 两种系统恢复信号初值的均值 μ_r 与 e_{ms} 随耦合系数 ε 的 变化情况 (a) μ_r 随 ε 的变化情况 (b) e_{ms} 随 ε 的变化情况

此,当 $\epsilon \in (0.3, 0.4)$, $\alpha = 0.32$ 时,该多重耦合的 CML系统达到最佳初值恢复状态.在下面所进行的 仿真中,如无特别说明,均采用 $\epsilon = 0.32$, $\alpha = 0.32$, M = 50.

3.2.恢复信号初值的特性分析

0.09

令多重耦合的 CML 系统输入的初始信号为

$$x_n = s_n + w_{n1}$$
,
 $y_n = s_n + w_{n2}$,
 $z_n = s_n + w_{n3}$,



10000 *L* 其中信号初值 $s_n \sim N(\mu, 0.1^2)$,噪声 $w_n \sim N(0, 0.1^2)$.对信号分别按一维 CML 系统模型和改进后 的多重耦合的 CML 系统模型进行耦合映像,并根据 (3)式恢复出信号初值.首先,固定信号初值的均值 为 $\mu = 0.5$,为了观察耦合格子数 *L* 的变化对所恢复 信号初值的影响,令 *L* 从 1000 递增到 20000,步长为 1000. 然后,固定 *L* = 20000,令 μ 从 0.2 递增到 0.8, 步长为 0.05,观察信号初值的均值 μ 变化对所恢复 信号初值的影响.从图 3(a)-(d)可以看出,在初始 信号受噪声干扰的情况下,与原一维 CML 系统相 比,多重耦合的 CML 系统所恢复信号的均值 μ_r 和





μ



图 3 不同情况下,两种系统恢复信号初值与信号初值的均值、方差和 e_{ms} 的比较 (a) μ_r 与 μ 随 L 的增加比较 (b) σ_r 与 σ 随 L 的增加比较 ,(c) μ_r 与 μ 随 μ 的增加比较 (d) σ_r 与 σ 随 μ 的增加比较 (e)两个系统恢复初值的 e_{ms} 随 L 的增加比较 ,(f)两个系统恢复初值的 e_{ms} 随 μ 的增加比较

20000

方差 σ_r 与信号初值 s_n 的均值 μ 和方差 σ 更为接近 L 力增加是收敛的.

为了更好表示所恢复初值的误差的统计特性, 可以用 e_{ms}来衡量该改进系统对初值恢复的性能优 劣.从图 <u>3</u>(e)(f)可以看出,随着格子数的变化,单 一和多重耦合的 CML 系统所得到恢复值的 e_{ms}均逐 渐趋向稳定,且多重耦合的 CML 系统的 e_{ms}明显小 于单一系统的 e_{ms}.由此可知,对于多重耦合的 CML 系统,系统间的耦合作用能够很好抑制噪声对初始 信号的干扰,且鲁棒性较强.

从上述仿真中可知,在统计特性上,该多重耦合的 CML 系统的初值恢复性能要优于单一 CML 系统。如果要评判系统对单个初值的恢复特性,则必须考虑单个恢复值的准确度.信号的恢复误差大小反映了恢复值的准确程度,而恢复误差可用绝对误差来表示.因此,可以采用绝对误差来判断系统对每一个初值恢复的优劣程度.绝对误差计算公式为



 $e(i) = |s(i) - \tilde{x}(i)|. \tag{9}$

如图 4 所示,信号初值 S 为(0,1)上均匀分布的 随机数,噪声 $w_n \sim N(00.1^2)$ 图中给出了初始信号 为受噪声干扰与未受噪声干扰两种情况下,单一 CML 系统和多重耦合的 CML 系统的恢复初值 S_r 与 信号初值 S 的比较.由图 4 可知,多重耦合后系统 的 S_r 与 S 的逼近程度较高,性能优于单一系统.当 初始信号受噪声干扰时(图 4(a)),在 S = 0.5 附近 时,单一 CML 系统的 S_r 偏离 S 最多,其绝对误差也 最大;多重耦合的 CML 系统,此时 S_r 与 S 的绝对误 差并不是很大.在 S 未受到噪声干扰的情况下(图 4 (b)),在 S = 0.5 附近,单一系统的 S_r 明显偏离了 S,且波动范围远远大于多重耦合系统的 S_r ;而多重 耦合系统的 S_r 与 S 能够达到很好的拟合效果.由 此可以说明,多重耦合的 CML 系统对于单个初值恢 复的精度要高于单一 CML 系统.



图 4 初始信号含噪声和无噪声两种情况下 $S_r = S$ 的比较 (a)有噪声情况 (b)无噪声情况

相关系数 r 是相关分析的重要指标,可以从数量 上具体说明现象间线性相关关系的方向和密切程度. |r|越接近1表示两变量的线性相关程度越大,|r|= 0则表明两变量无线性关系.本文采用能较好反映两 个变量之间线性度的 Pearson 相关系数来表征恢复初 值与信号初值之间的相关程度,其计算公式为

$$r = \frac{\sum_{i} s(i) \tilde{x}(i) - \frac{\sum_{i} s(i) \sum_{i} \tilde{x}(i)}{L}}{\sqrt{\left(\sum_{i} \tilde{x}^{2}(i) - \frac{\left(\sum_{i} \tilde{x}(i)\right)^{2}}{L}\right)\left(\sum_{i} s^{2}(i) - \frac{\left(\sum_{i} s(i)\right)^{2}}{L}\right)}},$$
(10)

其中 *i* ∈(0 ,*L*].图 5 中的恢复初值与图 3 相同 ,从 图 5 可以看出 ,随着 *L* 的增加 ,两种耦合方式与信 号初值的 *r* 都趋向于收敛 ,且多重耦合的 CML 系统 的 r 均高于单一 CML 系统的 r.如图 5(a)所示,随 着格子数的增加,多重耦合系统的 r 要比单一系统 的大 0.02 以上.



图 5 不同情况下两种系统的恢复初值与信号初值的 r 比较 (a)r 随L 变化情况 (b)r M_{μ} 变化情况

4.结 论

本文在恢复信号初值的一维 CML 系统基础上, 提出了将多个一维 CML 系统并列耦合组成一个多 重耦合的 CML 系统的方法.数值仿真证明,当选择 适当的系统间耦合系数时,可以增强耦合系统的混 沌轨道之间的相互吸引力,使其相互靠近,减少因初 值受噪声干扰而引起的轨道漂移现象,从而达到抑 制噪声,提高初值恢复精度的目的.在信号初值受噪

- [1] Kaneko K 1984 Prog. Theor. Phys. 72 480
- [2] Yang W M 1994 Spatiotemporal Chaos and Coupled Map Lattices (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House)p11(in Chinese)[杨维明 1994 时空混沌和 耦合映像格子(上海:上海科技教育出版社)第11页]
- [3] Henry L, Geoffrey H, Anastasios D 2000 IEEE Trans. Neural Networks 11 1133
- [4] Ryo M, Satoru Y, Yoshinori D Nishita T 2001 Proc. of 9th Pacific Conf. on Computer Graphics and Applications (Tokyo: IEEE Computer Society Press) p263
- [5] Nekorkin V I , Kazantsev V B , Velarde M G 2001 Physica D 151 1
- [6] Jiang P Q, Wang B H, Xia Q H, Bu S L 2004 Acta Phys. Sin. 53 3280 (in Chinese)[蒋品群、汪秉宏、夏清华、卜寿亮 2004 物理 学报 53 3280]
- [7] Zeng Y C , Tong Q Y 2003 Acta Phys. Sin. 52 285 (in Chinese)

声污染的情况下,该多重耦合的 CML 系统不仅可以 较好恢复初值的统计特性,也能以较高的精度恢复 单个信号初值.

由于混沌系统所具有的对初值和参数的敏感 性,使其能应用于对微小信号的测量中,例如对于微 弱的生物磁场、地震波微小变化的测量等,但此特性 同时也导致了混沌测量系统对噪声的敏感.本文通 过对多重 CML 的信号初值恢复性能进行研究和分 析,证明了可以将多重耦合混沌系统应用到混沌测 量中,以达到提高测量精度、抑制噪声的作用.

[曾以成、童勤业 2003 物理学报 52 285]

- [8] Liu Y, Shen MF, Chen HY 2006 Acta Phys. Sin. 55 564 (in Chinese)[刘英、沈民奋、陈和晏 2006 物理学报 55 564]
- [9] Wu W, Fan Y L, Pang Q 2006 Chin. J. Sens. Actuators 20 116 (in Chinese)[武 薇、范影乐、庞 全 2006 传感技术学报 20 116]
- [10] Zheng W M, Hao B L 1994 Applied Symbolic Dynamics (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p11 (in Chinese)[郑伟谋、郝柏林 1994 实用符号动力学(上 海:上海科技教育出版社)第11页]
- [11] Wang X Y 2003 Chaos in the Complex Nonlinearity System (Beijing: Electronic Industry Press)p46(in Chinese)[王兴元 2003 复杂非 线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第46页]
- [12] Ling C , Wu X F , Song S G 1999 IEEE Trans. Signal Proc. 47 1424

Study of initial condition recovery from multi-coupled map lattices *

Pang Quan Wu Wei[†] Fan Ying-Le

(Institute of Biomedical Engineering and Instrument, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)
 (Received 6 November 2006; revised manuscript received 1 June 2007)

Abstract

To recover the initial signals from coupled map lattices (CML) is of great importance in signal processing. But like all chaotic systems, CML is highly sensitive to noise. It is hard for CML to recover the initial signals that have been corrupted by noise. A multi-CML system, which couples many one-dimensional CMLs paratactically together, is proposed in this paper. Through the coupled one-dimensional CML, the chaotic trajectories, which tend to be exponentially separated in noisy environment, become closer, so the noise influence is restrained. The numerical results verified the robustness and noise-restraining property of the multi-CML system. Given the proper selection of coupling parameters, even in the environment that initial signals are noise-corrupted, compared with single one-dimensional CML, the multi-CML system not only can recover the statistical property of initial conditions well, but also performs well in recovery of single initial signal with a high correlation.

Keywords : coupled map lattices , statistical property of signals recovery , multi-coupled PACC : 0545 , 0250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60302027), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 602127) and the Key Program of the Science and Technology Research of Zhejiang Province, China (Grant No. 2007C23074).

[†] E-mail:wein.wu@gmail.com