

三种方法实现超混沌 Chen 系统的反同步*

王兴元[†] 王明军

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2006 年 11 月 1 日收到 2007 年 6 月 8 日收到修改稿)

以超混沌 Chen 系统为例研究了反同步的三种方法——主动控制法、全局控制法和变量替换法. 通过 Lyapunov 稳定性理论及最大 Lyapunov 指数计算给出了相应的证明, 其中变量替换法可以传递单路信号实现混沌系统的反同步, 比以往所用方法有更高的实用价值. 通过数值仿真, 验证了方法的有效性.

关键词: 主动控制, 全局控制, 变量替换, 反同步

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, Pecora 和 Corroll 首次提出了“混沌同步”的概念^[1], 并在实验室用电路实现了同一信号驱动下两个相同的耦合混沌系统的同步^[2]. 如今, 人们对混沌同步已做了深入的研究^[3-8], 并在不同的混沌系统中实现了不同类型的混沌同步, 如完全同步、广义同步、相同步、延迟同步和射影同步等^[9-15]. 完全同步是指从不同初始点出发的两个混沌系统, 随时间的推移其轨道趋于一致, 目前已经在耦合、无方向耦合或含噪声的混沌系统中观测到^[9, 11]. 相同步是指两个混沌系统轨道的相位差锁定在 2π 以内, 而它们的振幅仍然保持混沌状态且互不相关^[10, 13]. 广义同步是指在主从混沌系统的轨道之间建立一个函数关系^[12]. 延迟同步是指具有固定时间延迟的两个混沌系统轨道是一致的^[14]. 射影同步是指主从混沌系统的轨道的振幅成正比, 且相位相同^[15]. 在周期混沌系统中, 反同步是一个值得关注的现象^[16, 17]. 最近, 文献 [18, 19] 分别在耦合和无方向耦合的两个相同的混沌系统中实现了反同步. 本文分别利用主动控制法、全局控制法和变量替换法实现了超混沌 Chen 系统的反同步, 并提出了更为实用的反同步方案.

2. 超混沌 Chen 系统的反同步

超混沌 Chen 系统^[20, 21]为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) + w, \\ \dot{y} &= dx - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= yz + rw. \end{aligned} \quad (1)$$

当参数 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$ 和 $r = 0.2$ 时, 系统 (1) 处于超混沌状态^[20, 21]. 下面分别用三种方法实现超混沌 Chen 系统的反同步.

2.1. 主动控制法

令驱动系统为系统 (1), 响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + w_1 + u_1, \\ \dot{y}_1 &= dx_1 - x_1z_1 + cy_1 + u_2, \\ \dot{z}_1 &= x_1y_1 - bz_1 + u_3, \\ \dot{w}_1 &= y_1z_1 + rw_1 + u_4. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $u_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为控制器. 设

$$\begin{aligned} e_1 &= x + x_1, \\ e_2 &= y + y_1, \\ e_3 &= z + z_1, \\ e_4 &= w + w_1, \end{aligned}$$

则有

* 国家自然科学基金 (批准号 60573172) 和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究计划 (批准号 20040081) 资助的课题.

[†] E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x} + \dot{x}_1, \\ \dot{e}_2 &= \dot{y} + \dot{y}_1, \\ \dot{e}_3 &= \dot{z} + \dot{z}_1, \\ \dot{e}_4 &= \dot{w} + \dot{w}_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 &= -k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3, \\ \dot{e}_4 &= -k_4 e_4. \end{aligned} \quad (5)$$

反同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1) + e_4 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= de_1 + ce_2 - xz - x_1z_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= xy + x_1y_1 - be_3 + u_3, \\ \dot{e}_4 &= yz + y_1z_1 + re_4 + u_4. \end{aligned} \quad (3)$$

选择如下控制器：

$$\begin{aligned} u_1 &= a(e_1 - e_2) - e_4 - k_1 e_1, \\ u_2 &= xz + x_1z_1 - de_1 - (c + k_2)e_2, \\ u_3 &= (b - k_3)e_3 - xy - x_1y_1, \\ u_4 &= -yz - y_1z_1 - (r + k_4)e_4. \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $k_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$, 用于控制达到反同步的速度. 将(4)式代入(3)式, 得到反同步误差系统如下：

显然误差系统(5)的 Jacobi 矩阵特征值均为负, 根据 Lyapunov 稳定性定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

即驱动系统(1)和响应系统(2)达到了反同步.

数值仿真实验中, 选取时间步长为 $\tau = 0.0002$ s, 令 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0.5$. 采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统(1)和(2). 驱动系统(1)与响应系统(2)的初始点分别选取为 $x(0) = -10, y(0) = 25, z(0) = 18$ 和 $w(0) = 15; x_1(0) = -13, y_1(0) = -12, z_1(0) = 5$ 和 $w_1(0) = 30$. 因此误差系统(3)的初始值为 $e_1(0) = -23, e_2(0) = 13, e_3(0) = 23$ 和 $e_4(0) = 45$. 图1为驱动系统(1)和响应系统(2)的反同步过程的模拟结果. 由图1可见, $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 和

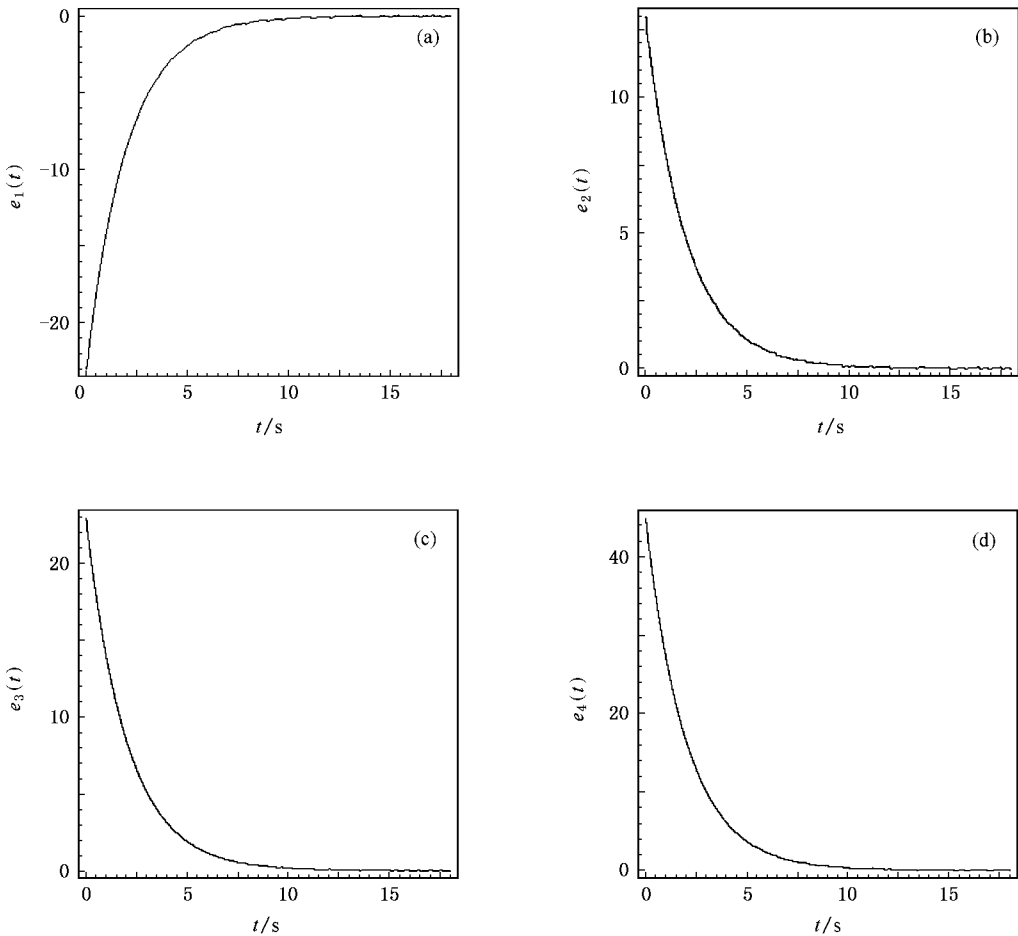


图1 控制器(4)式作用下系统(1)和(2)的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)-t$, (b) $e_2(t)-t$, (c) $e_3(t)-t$, (d) $e_4(t)-t$

$e_4(t)$ 最终稳定在零点附近,即在控制器(4)式作用下,驱动系统(1)与响应系统(2)达到了反同步。

2.2. 全局控制法

定理 设自治混沌系统形如

$$\dot{X} = AX + f(X), \tag{6}$$

式中 A 是一个矩阵, AX 代表线性部分, $f(X)$ 代表非线性部分. 以系统(6)为驱动系统, 响应系统如下:

$$\dot{Y} = \hat{A}Y - BX - f(X). \tag{7}$$

只要满足

$$A = \hat{A} + B,$$

且 \hat{A} 所有特征值的实部均为负, 则系统(6)和系统(7)将达到反同步。

证明 设误差系统

$$\dot{E} = \dot{X} + \dot{Y},$$

则由系统(6)和(7)可得

$$\begin{aligned} \dot{E} &= AX + \hat{A}Y - BX \\ &= (\hat{A} + B)X + \hat{A}Y - BX \\ &= \hat{A}(X + Y) \\ &= \hat{A}E. \end{aligned}$$

因为 \hat{A} 所有特征值的实部均为负, 根据 Lyapunov 稳定性定理可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|E(t)\| = 0,$$

即驱动系统(6)和响应系统(7)达到了反同步。

令系统(1)为驱动系统, 响应系统为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{w}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ d & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c+10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r+10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ -xy \\ -yz \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

设

$$\begin{aligned} e_1 &= x + x_1, \\ e_2 &= y + y_1, \\ e_3 &= z + z_1, \\ e_4 &= w + w_1, \end{aligned}$$

则反同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x} + \dot{x}_1, \\ \dot{e}_2 &= \dot{y} + \dot{y}_1, \\ \dot{e}_3 &= \dot{z} + \dot{z}_1, \\ \dot{e}_4 &= \dot{w} + \dot{w}_1. \end{aligned} \tag{9}$$

计算得出系统(8)中 $(x_1, y_1, z_1, w_1)^T$ 的系数矩阵所有特征值的实部均为负, 这种满足条件的矩阵可以应用 Routh-Hurwitz 判据由驱动系统(1)的线性部分获得. 驱动系统(1)和响应系统(8)符合定理的形式和条件, 可以达到反同步。

数值仿真实验中, 选取时间步长为 $\tau = 0.0002$ s. 采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统(1)和(8). 驱动系统(1)和响应系统(8)的初始点分别选为 $x(0) = -10, y(0) = 25, z(0) = 18$ 和 $w(0) = 15; x_1(0) = -13, y_1(0) = -12, z_1(0) = 5$ 和 $w_1(0) = 30$. 因此误差系统(9)的初始值为 $e_1(0) = -23, e_2(0) = 13, e_3(0) = 23$ 和 $e_4(0) = 45$. 图2为驱动系统(1)和响应系统(8)的反同步过程的模拟结果. 由图2可见, $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 和 $e_4(t)$ 最终稳定在零点附近, 即驱动系统(1)与响应系统(8)达到了反同步。

应用全局控制法, 驱动系统中有几个方程含有非线性项, 就至少需要发送几路信号给响应系统, 这显然优于主动控制法. 对于只有一个方程含非线性项的混沌系统, 如 Rössler 系统、超混沌 Rössler 系统等, 则有可能发送单路信号实现反同步, 这对于保密通信及观测器的实现具有实际意义. 下面将提出一种能够传递单路信号实现反同步的新方法。

2.3. 变量替换法

设自治混沌系统形如

$$\dot{X} = F(X), \tag{10}$$

以系统(10)为驱动系统, 响应系统为

$$\dot{Y} = F(Y) - (g(Y) - g(X)), \tag{11}$$

则一定可以找到函数 g 使系统(10)和(11)达到完全同步, 即存在函数 g 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X - Y\| = 0.$$

令

$$Z = -Y,$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X + Z\| = 0,$$

即输出 Z 的系统与系统(10)达到反同步. 将 $Z = -Y$ 代入系统(11)得到

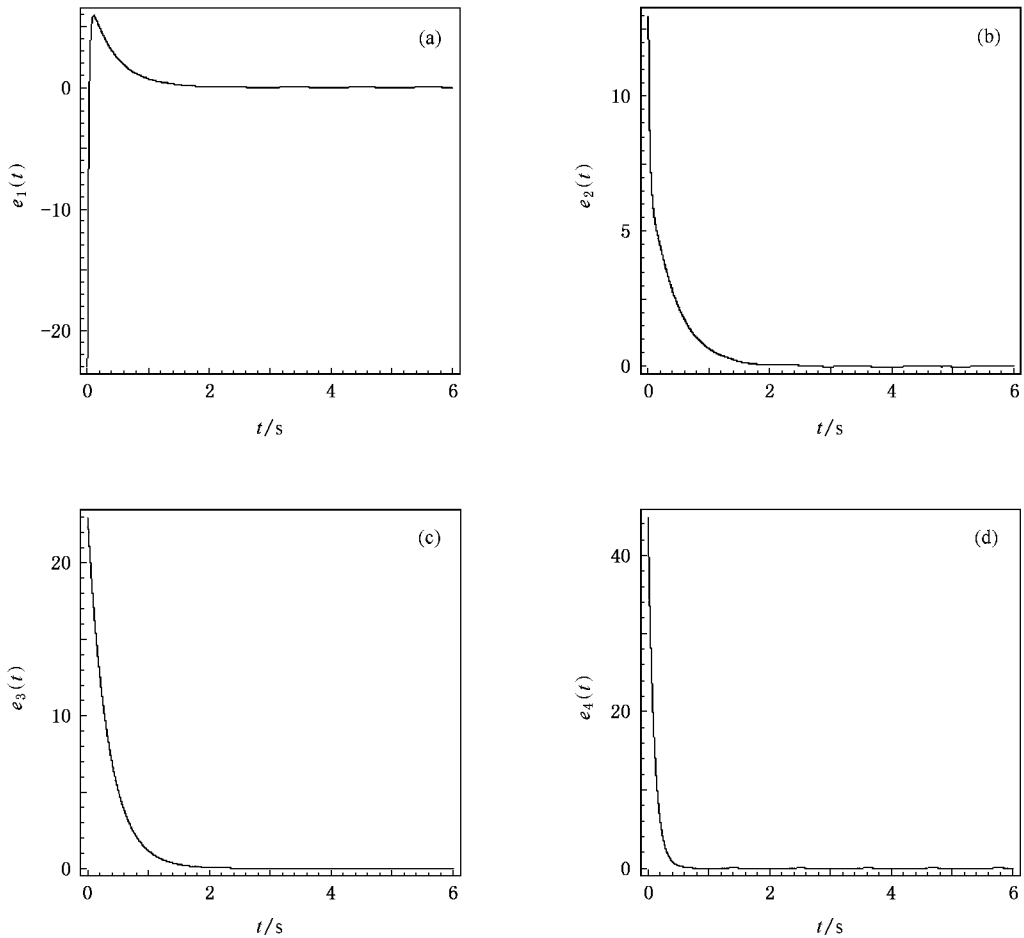


图 2 系统 1 和(8)的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)-t$ (b) $e_2(t)-t$ (c) $e_3(t)-t$ (d) $e_4(t)-t$

$$-\dot{Z} = F(-Z) - (g(-Z) - g(X)). \quad (12)$$

由系统 12 解出受控于 X 的关于 Z 的微分方程

$$\dot{Z} = -F(-Z) + (g(-Z) - g(X)),$$

则该方程描述的系统能与系统 10)反同步。

Peng 等^[22]提出了发送单路组合信号的方案,成功实现了超混沌 Rössler 系统的完全同步控制. 本文也将采用这一方法,先找到与系统 1)能达到完全同步的响应系统,再由该系统解出与系统 1)反同步的系统。

设系统 1)的完全同步响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + w_2, \\ \dot{y}_2 &= dx_2 - x_2z_2 + cy_2 - kucos\theta, \\ \dot{z}_2 &= x_2y_2 - bz_2 - kusin\theta, \\ \dot{w}_2 &= y_2z_2 + rw_2. \end{aligned} \quad (13)$$

这里 k 是反馈增益,控制器

$$\begin{aligned} u &= \sin\theta(y_2 - y) + \cos\theta(z_2 - z) \\ &(0 \leq \theta \leq \pi/2), \end{aligned}$$

即驱动系统 1)只发送 $y\sin\theta + z\cos\theta$ 这一路信号给响应系统 13)使两者达到同步。

令

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - x, \\ e_2 &= y_2 - y, \\ e_3 &= z_2 - z, \\ e_4 &= w_2 - w, \end{aligned} \quad (14)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_2 - \dot{x}, \\ \dot{e}_2 &= \dot{y}_2 - \dot{y}, \\ \dot{e}_3 &= \dot{z}_2 - \dot{z}, \\ \dot{e}_4 &= \dot{w}_2 - \dot{w}. \end{aligned}$$

故可得同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -ae_1 + ae_2 + e_4, \\ \dot{e}_2 &= (d - z)e_1 + (c - k\cos\theta\sin\theta)e_2 \\ &\quad - (x + k\cos\theta\cos\theta)e_3 - e_1e_3, \\ \dot{e}_3 &= ye_1 + (x - k\sin\theta\sin\theta)e_2 \end{aligned}$$

$$-(b + k\cos\theta\sin\theta)e_3 + e_1e_2,$$

$$\dot{e}_4 = ze_2 + ye_3 + re_4 + e_2e_3. \quad (15)$$

令 $k = 3$, 根据 Bennetin 等^[23]提出的计算微分方程组最大 Lyapunov 指数的方法, 依次取 $\theta = \pi/12, 5\pi/24, \pi/4, 7\pi/24, 5\pi/12$, 求出 $\lambda_1 = 1.122, -0.381, -0.547, -0.299, 0.064$. 系统 (15) 在 $k = 3$ 时, λ_1 与 θ 的关系如图 3 所示. 当 $\lambda_1 < 0$ 时, 系统 (1) 和 (13) 将完全同步.

数值仿真实验中, 令 $k = 3, \theta = 7\pi/24$ 选取时间步长为 $\tau = 0.001$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统 (1) 和 (13). 驱动系统 (1) 与响应系统 (13) 的初始点分别选为 $x(0) = -10, y(0) = 25, z(0) = 18$ 和 $u(0) = 15; x_2(0) = 13, y_2(0) = -12, z_2(0) = 5$ 和 $w_2(0) = 30$. 因此误差系统 (15) 的初始值为 $e_1(0) = 23, e_2(0) = -37, e_3(0) = -13$ 和 $e_4(0) = 15$. 图 4 为驱动系统 (1) 和响应系统 (13) 的同步过程的模拟结果. 由图 4 可见, 同步误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 和 $e_4(t)$ 最终基本稳定在零点附近, 即 $k = 3, \theta = 7\pi/24$ 时, 驱

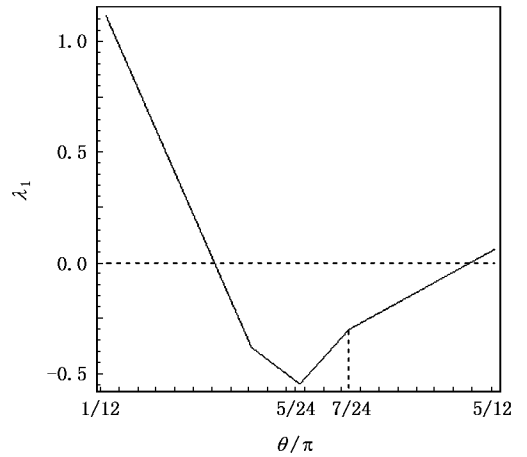


图 3 $k = 3$ 时, 系统 (15) 最大 Lyapunov 指数 λ_1 与 θ 的关系

动系统 (1) 与响应系统 (13) 达到了同步. 设

$$x_2 = -x_1,$$

$$y_2 = -y_1,$$

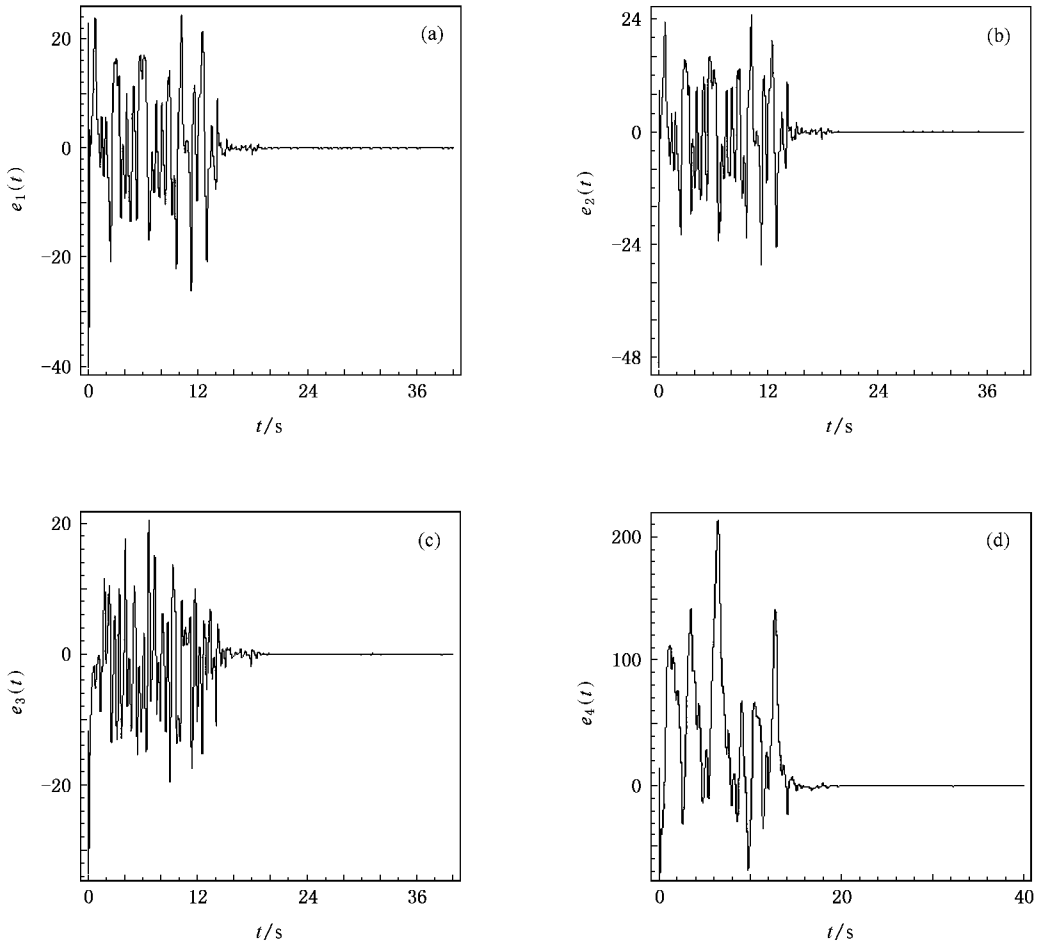


图 4 系统 (1) 和 (13) 的同步误差曲线 (a) $e_1(t)-t$ (b) $e_2(t)-t$ (c) $e_3(t)-t$ (d) $e_4(t)-t$

$$\begin{aligned} z_2 &= -z_1, \\ w_2 &= -w_1, \end{aligned}$$

则系统(13)变换为

$$\begin{aligned} -\dot{x}_1 &= \alpha(x_1 - y_1) - w_1, \\ -\dot{y}_1 &= -dx_1 - x_1 z_1 - cy_1 - kucos\theta, \\ -\dot{z}_1 &= x_1 y_1 + bz_1 - kusin\theta, \\ -\dot{w}_1 &= y_1 z_1 - rw_1. \end{aligned} \tag{16}$$

将

$$\begin{aligned} u &= \sin\alpha(y_2 - y) + \cos\alpha(z_2 - z) \\ &= \sin\alpha(-y_1 - y) + \cos\alpha(-z_1 - z) \end{aligned}$$

代入(16)式整理后得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1) + w_1, \\ \dot{y}_1 &= dx_1 + x_1 z_1 + cy_1 - k\hat{u}\cos\theta, \\ \dot{z}_1 &= -x_1 y_1 - bz_1 - k\hat{u}\sin\theta, \\ \dot{w}_1 &= -y_1 z_1 + rw_1. \end{aligned} \tag{17}$$

这里

$$\hat{u} = \sin\alpha(y_1 + y) + \cos\alpha(z_1 + z).$$

系统(17)即是能与系统(1)反同步的系统. 设

$$\begin{aligned} e_1 &= x + x_1, \\ e_2 &= y + y_1, \\ e_3 &= z + z_1, \\ e_4 &= w + w_1, \end{aligned}$$

则反同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x} + \dot{x}_1, \\ \dot{e}_2 &= \dot{y} + \dot{y}_1, \\ \dot{e}_3 &= \dot{z} + \dot{z}_1, \\ \dot{e}_4 &= \dot{w} + \dot{w}_1. \end{aligned} \tag{18}$$

选取时间步长为 $\tau = 0.0002$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法求解系统(1)和(17). 驱动系统(1)与响应系统(17)的初始点分别选为 $x(0) = -10, y(0) = 25, z(0) = 18$ 和 $u(0) = 15, \dot{x}_1(0) = 13, \dot{y}_1(0) = -12, \dot{z}_1(0) = 5$ 和 $w_1(0) = 30$. 因此误差系统(18)的初始值为 $e_1(0) = 3, e_2(0) = 13, e_3(0) = 23$ 和 $e_4(0) = 45$. 图5为驱动系

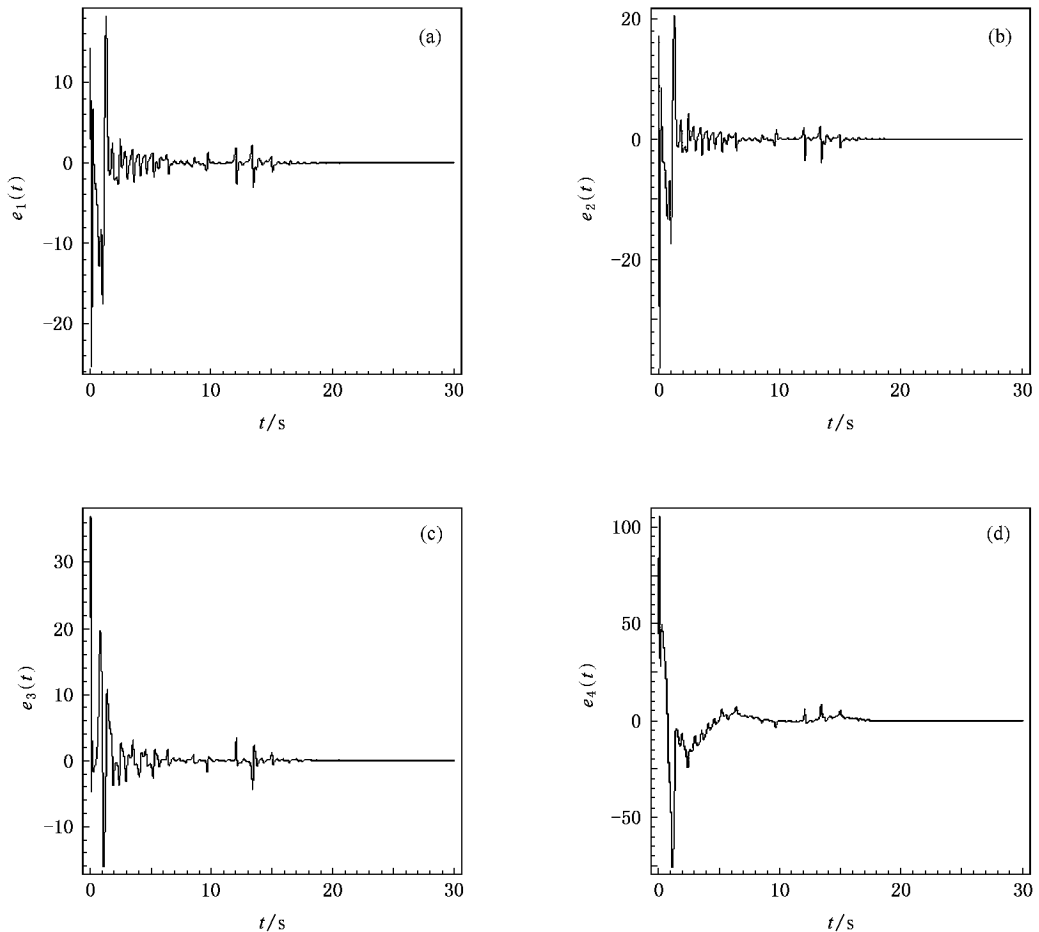


图5 系统(1)和(17)的反同步误差曲线 (a) $e_1(t)-t$ (b) $e_2(t)-t$ (c) $e_3(t)-t$ (d) $e_4(t)-t$

统(1)和响应系统(17)的反同步过程的模拟结果.由图5可见 $e_1(t)$ 、 $e_2(t)$ 、 $e_3(t)$ 和 $e_4(t)$ 最终稳定在零点附近,即 $k=3$, $\theta=7\pi/24$ 时,驱动系统(1)与响应系统(17)达到了反同步,且只需要发送 $y\sin\theta+z\cos\theta$ 这一路信号即可.

利用 Peng 等^[22]提出的方案,已知的混沌系统大都可以通过传递单路信号实现完全同步,因此该方法也适用于其他混沌系统的单信号反同步.

3. 结 论

本文以超混沌 Chen 系统为例,研究了混沌系统反同步的三种方法.通过对比可以发现,变量替换法虽然设计方案略为复杂,但可以使用单路信号成功地达到反同步的目的,因此具有更高的实用性.数值仿真验证了这三种反同步方法的有效性.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Carroll T L , Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **38** 453
- [3] Chen G , Dong X 1993 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **40** 591
- [4] Fuh C C , Tung P C 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2952
- [5] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) Chap 1
- [6] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) Chap 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第7章]
- [7] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronic Industry Press) Chap 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第2章]
- [8] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamical Analyses , Control and Synchronization of the Lorenz System Family* (Beijing : Science Press) Chap 2 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第2章]
- [9] Liu Y Z , Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 (in Chinese) [刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035]
- [10] Hao J H , Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红、李伟 2005 物理学报 **54** 3491]
- [11] Yu X , Song Y 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **11** 1737
- [12] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [13] Wang S H , Liu W Q , Ma B J , Xiao J H , Jiang D Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 55
- [14] Shahverdiev E M , Sivaprakasam S , Shore K A 2002 *Phys. Lett. A* **292** 320
- [15] Liu J , Chen S H , Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [16] Chen S , Wang F , Wang C P 2004 *Chaos Solitons Fract.* **20** 235
- [17] Belykh V N , Chua L O 1992 *Int. J. Bifur. Chaos* **2** 697
- [18] Kim C M , Rim S H , Key W 2003 *Phys. Lett. A* **320** 39
- [19] Hu J , Chen S H , Chen L 2005 *Phys. Lett. A* **339** 455
- [20] Li Y X , Tang W K S , Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367
- [21] Yan Z Y 2005 *Appl. Math. Comput.* **168** 1239
- [22] Peng J H , Ding E J , Ding M , Yang W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [23] Benettin G , Galgani L , Giorgilli A , Strelcyn J M 1980 *Meccanica* **15** 9

Three methods of anti-synchronization of hyperchaotic Chen system^{*}

Wang Xing-Yuan[†] Wang Ming-Jun

(*School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

(Received 1 November 2006 ; revised manuscript received 8 June 2007)

Abstract

This paper studies the realization of anti-synchronization of hyperchaotic Chen system by three methods, i. e., the active control method, global control method and variable replacement method. The methods are proved valid by Lyapunov stability theory and numerical calculation of the largest Lyapunov exponent. The variable replacement method is more practical because it can anti-synchronize drive system and response system by transmitting one single signal. Numerical simulations show the effectiveness of the three methods.

Keywords : active control, global control, variable replacement, anti-synchronization

PACC : 0545, 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Science and Technology Research Program of Institution of Higher Education of Liaoning Province, China (Grant No. 20040081).

[†] E-mail : wangxy@dlut.edu.cn