

# 用时域有限差分法实现金属支撑杆的 计算机模拟<sup>\*</sup>

刘大刚<sup>†</sup> 周 俊 刘盛纲

(电子科技大学物理电子学院, 成都 610054)

(2006 年 12 月 27 日收到, 2007 年 7 月 5 日收到修改稿)

在三维 Yee 网格模型以及蛙跳模型的基础上建立了支撑杆的数学模型, 推导了支撑杆在三维直角坐标系下的电流及单位长度上电感的计算公式, 讨论了二维、三维空间网格上不同支撑杆取向及不同坐标系下的实现方法, 同时也给出了支撑杆在时域有限差分主迭代循环中的子迭代方法. 以磁绝缘线振荡器为例, 从其粒子运动及输出功率方面验证了模拟的正确性.

关键词: 粒子模拟, Yee 网格, 时域有限差分, 支撑杆

PACC: 4110, 4110H, 4170

## 1. 引 言

一些高功率微波器件如磁绝缘线振荡器(MILO)、相对论速调管(RKA)等, 通常采用同轴微波提取结构, 输出同轴 TEM 模. 这种结构中起着电子收集筒作用的内导体与外导体之间必须用金属支撑杆(简称支撑杆)连接以起到支撑和固定作用. 除了支撑和固定作用外, 支撑杆还可以在阴极与阳极之间形成一等效回路将腔体内的直流分量滤除. 再者, 支撑杆恰当的反射还可与微波作用区构成谐振腔, 增强微波作用区的束波互作用, 起到一些微波源中反射腔的作用. 另一方面, 高功率微波器件在设计之后一般都要用粒子模拟软件对其进行模拟, 在得到正确的模拟结果后才对器件进行加工并进行实验研究. 对带有金属支撑杆的高功率微波器件同样需要粒子模拟这一过程, 所不同的是对这类器件的模拟准确性很大程度上决定于对金属支撑杆模拟的准确性.

本文重点研究了如何用有限差分的方法来实现二维、三维金属支撑杆的模拟问题.

## 2. 物理模型

### 2.1. 支撑杆所在的空间、时间网格模型

图 1 所示是粒子模拟所用的三维 Yee 网格模型<sup>[1-3]</sup>, 其中  $E_1, E_2, E_3$  代表沿 3 个坐标方向的电场矢量,  $B_1, B_2, B_3$  代表沿 3 个坐标方向的磁场矢量. 在这一模型中依据坐标方向的不同将磁场和电场放在全网格点或半网格点上, 这样就实现了每一个磁场矢量都由 4 个电场矢量环绕, 而每个电场矢量也都由 4 个磁场矢量环绕的三维 Yee 网格模型.

图 2 是三维粒子模拟模型的时间离散模型(蛙跳模型<sup>[1-3]</sup>). 在模型中由第  $n$  步时间的电场  $E$  计算出第  $n + 1/2$  步时间的磁场  $B$ , 再由第  $n + 1/2$  步的磁场  $B$  和电流密度  $J$  计算第  $n + 1$  步的电场, 计算出第  $n + 1$  步电场和  $n + 1/2$  步磁场后就可计算第  $n + 1$  步粒子所受的力. 另一方面, 由第  $n$  步的粒子所受的力及电场和第  $n + 1/2$  步的磁场可计算第  $n + 1/2$  步的某个粒子动量  $p$ , 再由此动量计算出第  $n + 1$  步这个粒子应到达的位置, 由这个第  $n + 1$  步的位置计算第  $n + 3/2$  步的动量和电流密度  $J$ .

<sup>\*</sup> 国家高技术研究发展计划(批准号 2005AA832101)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ldg12345@uestc.edu.cn

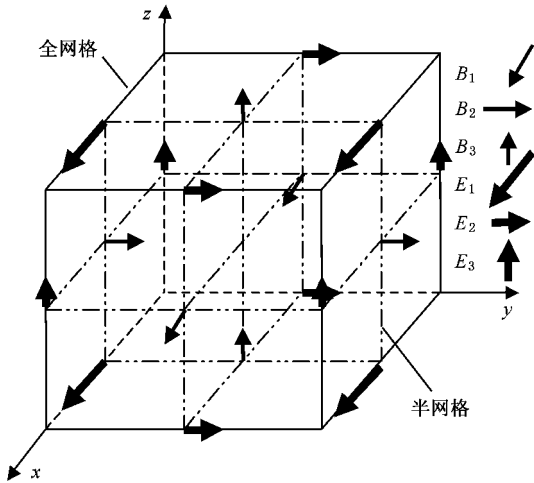


图 1 三维 Yee 网格模型示意图

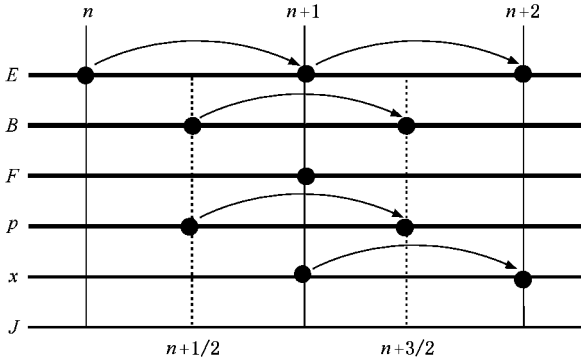


图 2 蛙跳模型示意图

### 2.2. 支撑杆模型

图 3、图 4 所示是支撑杆在矩形网格中的三维立体模型和  $x$ - $y$  面切平面模型<sup>[4]</sup>，图中假设支撑杆方向是  $z$  轴方向，支撑杆半径为  $a$ ，流过的电流为  $I$ ， $x$  轴方向的网格步长为  $\Delta x$ ， $y$  轴方向的网格步长为  $\Delta y$ 。

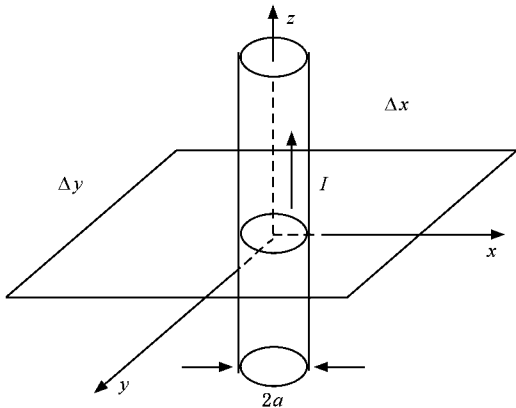


图 3 支撑杆的立体网格模型

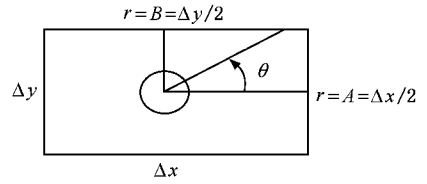


图 4 支撑杆的平面网格模型

## 3. 支撑杆差分公式推导

在有的情况下，支撑杆可以看作理想导体，其电阻为零，而在有的情况下就需要计及支撑杆的电阻。所以将支撑杆的差分公式分为电阻为零和不为零情况来推导。

### 3.1. 理想导体情况下支撑杆差分公式推导

根据麦克斯韦第一、第二公式及真空的媒质本构关系可以得到如下方程：

$$\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times E, \quad (1)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla \times H - J. \quad (2)$$

将(1)式在柱坐标系下展开并取  $\theta$  分量，可得

$$\mu_0 \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial t}. \quad (3)$$

在图 3、图 4 模型中，支撑杆是平行于  $z$  方向的，如果  $r = a$ ，则有边界条件  $E_z = 0$ 。在此条件下，将(3)式沿支撑杆径向从  $a$  到  $r$  处积分

$$E_z(r) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_a^r H_\theta d\rho + \frac{\partial}{\partial z} \int_a^r E_r d\rho. \quad (4)$$

一般情况下，支撑杆半径是远小于网格步长，而网格步长又小于最短波长，所以我们可以将支撑杆看作是在准静态场下的无限长直导线来处理<sup>[5,6]</sup>。于是有

$$H_\theta = \frac{I}{2\pi r}, \quad (5)$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_0}, \quad (6)$$

式中  $I$  是支撑杆的电流， $Q$  是支撑杆单位长度上的电荷量。将(5)(6)式代入(4)式，整理后可得

$$E_z(r) = \begin{cases} \left( \mu_0 \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\ln(r/a)}{2\pi} & (r > a), \\ 0 & (r \leq a). \end{cases} \quad (7)$$

在图 4 所示的网格平面上对(7)式两端在面积上求平均，可得

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{\iint_{\Delta x \Delta y} E_z(r) dx dy}{\iint_{\Delta x \Delta y} dx dy} = \frac{\iint_{\Delta x \Delta y, r > a} \left( \mu_0 \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\ln(r/a)}{2\pi} dx dy}{\iint_{\Delta x \Delta y} dx dy} \\
 &= \left( \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \frac{\iint_{\Delta x \Delta y, r > a} \frac{\mu_0 \ln(r/a)}{2\pi} dx dy}{\iint_{\Delta x \Delta y} dx dy}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\iint_{\Delta x \Delta y, r > a} \frac{\mu_0 \ln(r/a)}{2\pi} dx dy}{\iint_{\Delta x \Delta y} dx dy} \\
 &= \mu_0 \left[ \frac{1}{4\pi} \ln \left( \frac{A^2 + B^2}{a^2} \right) + \frac{\left( \frac{A}{B} \arctan \frac{B}{A} + \frac{B}{A} \arctan \frac{A}{B} \right)}{4\pi} + \frac{a^2}{16AB} - \frac{3}{4\pi} \right], \quad (9)
 \end{aligned}$$

从而可得

$$L \left( \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) = E_z. \quad (10)$$

这里

$$\begin{aligned}
 A &= \Delta x/2, \\
 B &= \Delta y/2.
 \end{aligned}$$

同理,我们对(2)式取它的  $r$  分量,可得

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z}. \quad (11)$$

将(5)(6)式代入方程(11)后可得

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial z}. \quad (12)$$

### 3.2. 表面阻抗为 $R$ 的支撑杆差分公式推导

当支撑杆的表面阻抗为  $R$  时,在  $r = a$  处边界条件变为

$$E_z = IR. \quad (13)$$

在此条件下将(3)式沿支撑杆径向从  $a$  到  $r$  处积分可得

$$E_z(r) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_a^r H_\theta d\rho + \frac{\partial}{\partial z} \int_a^r E_r d\rho + IR. \quad (14)$$

按(5)–(10)式推导过程,对(13)式推导后可得

$$L \left( \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + IR = E_z. \quad (15)$$

### 3.3. 支撑杆电边界条件的推导

支撑杆除了起到支撑作用外,它还能滤出腔体内的直流和低频分量.为了达到这一目的就要使支

撑杆上两个网格的电势差为零<sup>[5,7]</sup>,从而必须使支撑杆电流与位移电流满足电边界条件

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} = -J_{\text{strut}}. \quad (16)$$

## 4. 实现方法

### 4.1. 支撑杆差分公式离散

假设支撑杆的径向平行于  $z$  轴方向,在图1和图2所示的空间和时间模型上,将支撑杆电流  $I$  放置在  $E_3$  网格点处, $Q$  放置在  $B_3$  处<sup>[8]</sup>.(10)(12)式就可离散化为

$$\begin{aligned}
 (K K)^n &= (K K)^{n-1} + \frac{\Delta t}{L} \left( E_z(K K)^{n-1/2} \right. \\
 &\quad \left. - L \frac{(K K + 1)^{n-1/2} - (K K)^{n-1/2}}{\epsilon_0 \mu_0 \Delta z} \right), \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (K K)^{n+1/2} &= (K K)^{n-1/2} \\
 &\quad - \Delta t \left( \frac{(K K)^n - (K K - 1)^n}{\Delta z} \right). \quad (18)
 \end{aligned}$$

### 4.2. 参数的计算

下面分别讨论不同维数、不同坐标系下,不同支撑杆取向的  $L, I, Q$  的计算公式.

在三维直角坐标系下,网格步长是  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .由(9)(17)(18)式给出沿  $z$  轴方向的  $L, I, Q$  的计算公式.依此类推,只需将相应的坐标置换就可以得

到沿  $x, y$  方向的  $L, I, Q$  的计算公式.

在二维直角坐标系下可将(9)(17)(18)式中缺少的一维网格步长设置为一个单位长度就可以得到二维直角坐标  $L, I, Q$  的计算公式.

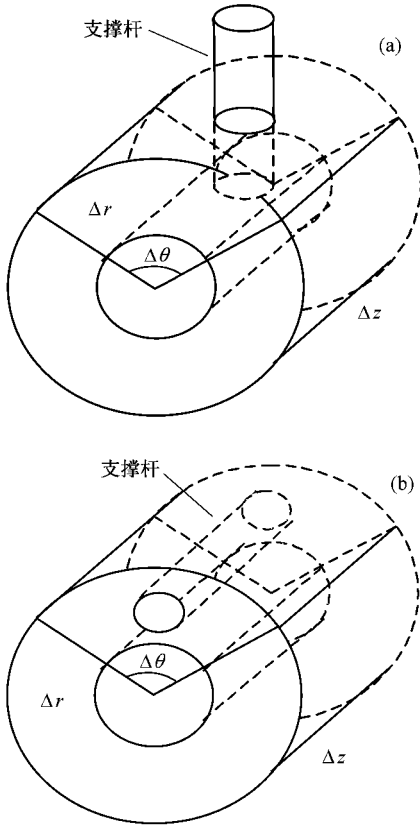


图5 支撑杆在柱坐标系下的模型 (a)支撑杆沿径向方向, (b)支撑杆沿轴向方向

在柱坐标系下,网格步长是  $\Delta z, \Delta r, \Delta \theta$ ,支撑杆的取向有两种情况.一种是支撑杆沿  $r$  方向,如图5(a)所示.此时支撑杆轴向穿过的是一个弧面(9)式中的

$$A = r \times \Delta \theta / 2,$$

$$B = \Delta z.$$

而(17)(18)式就换算成

$$K(K)^n = K(K)^{n-1} + \frac{\Delta t}{L} \left( E_r(K)^{n-1/2} - L \frac{Q(K+1)^{n-1/2} - Q(K)^{n-1/2}}{\epsilon_0 \mu_0 \Delta r} \right), \quad (19)$$

$$Q(K)^{n+1/2} = Q(K)^{n-1/2} - \Delta t \left( \frac{K(K)^n - K(K-1)^n}{\Delta r} \right). \quad (20)$$

另一种是支撑杆沿  $z$  方向,如图5(b)所示.此时支撑杆轴向穿过的是一个扇面(9)式中的

$$A = r \times \Delta \theta / 2,$$

$$B = \Delta r.$$

而(17)(18)式就换算成

$$K(K)^n = K(K)^{n-1} + \frac{\Delta t}{L} \left( E_r(K)^{n-1/2} - L \frac{Q(K+1)^{n-1/2} - Q(K)^{n-1/2}}{\epsilon_0 \mu_0 \Delta z} \right), \quad (21)$$

$$Q(K)^{n+1/2} = Q(K)^{n-1/2} - \Delta t \left( \frac{K(K)^n - K(K-1)^n}{\Delta z} \right). \quad (22)$$

在二维情况下,如果是  $z, r$  坐标系,  $\Delta \theta$  就按  $2\pi$  来处理;如果是  $r, \theta$  坐标系,  $\Delta z$  就按一个单位长度来处理.

#### 4.3. 迭代步骤

迭代开始时,支撑杆上单位长度上的电荷量  $Q$  值为零,那么迭代步骤如下:

1)得到  $n-1/2$  时刻的支撑杆某一节点上的  $E_z$  值,如果支撑杆是沿  $z$  方向且在网格线上,那么  $E_z$  就是网格节点上的  $E_z$ ;如果支撑杆平行于  $z$  方向但不在网格线上,那么  $E_z$  就要根据附近的网格节点上的电场插值得得.

2)根据有限差分公式(17)(19)或(21)得到  $n$  时刻的支撑杆电流.

3)在时域有限差分法(FDTD)主迭代循环中按相应的公式计算模拟区域内网格点电场,然后根据计算得到的支撑杆电流计算出支撑杆电流穿过的网格点电流密度  $J$ ,再在电边界条件设置中按(16)式设置支撑杆区域电场边界条件.

4)设置好支撑杆电边界条件后时间推进  $\Delta t/2$ ,仍然按 FDTD 方法计算整个模拟区域的磁场.

5)计算完整个模拟区域磁场后,根据离散差分公式(18)(20)(22)计算  $n+1/2$  时刻的  $Q$  值.

6)时间再推进  $\Delta t/2$ ,然后回到第一步.

## 5. 模拟验证

按以上方法编写了二维、三维金属支撑杆模拟模块并将这个模块分别集成到项目组编写的二维、三维粒子模拟软件 CHIPIC2D 和 CHIPIC3D 上,然后以美国 Phillips 空军实验室的一个 L 波段 MILO 作为

实例进行了模拟验证.

5.1. 器件结构及实验参数

L 波段 MILO(图 6)的主要参数如下<sup>[8,9]</sup>:阳极筒内径  $r_{ai1} = 14.3\text{ cm}$ ,扼流片内径  $r_{ai2} = 7.6\text{ cm}$ ,叶片厚为  $0.96\text{ cm}$ ,叶片周期为  $3.84\text{ cm}$ ;后四片的叶片厚为

$1.28\text{ cm}$ ,叶片周期为  $4.16\text{ cm}$ ,中间三个叶片内半径为  $8.6\text{ cm}$ ,提取叶片内半径为  $9.65\text{ cm}$ ,阴极半径  $r_c = 5.75\text{ cm}$ ,收集极内半径和外半径分别为  $8.6$  和  $9.65\text{ cm}$ .文献 [10]给出了此结构的实验数据如下:输入电压为  $493\text{ kV}$ ,电流为  $53.8\text{ kA}$ ,输出微波功率为  $2.9\text{ GW}$ .

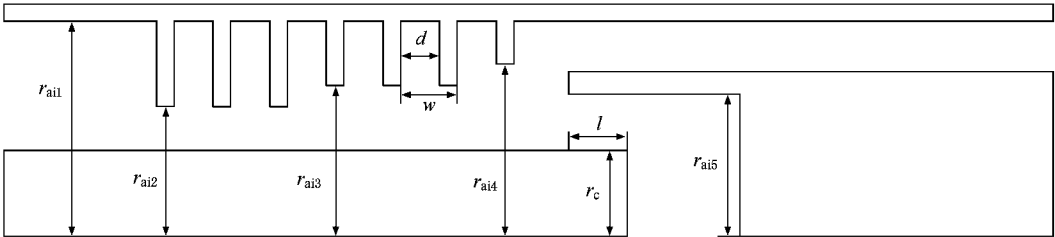


图 6 L波段 MILO 截面示意图

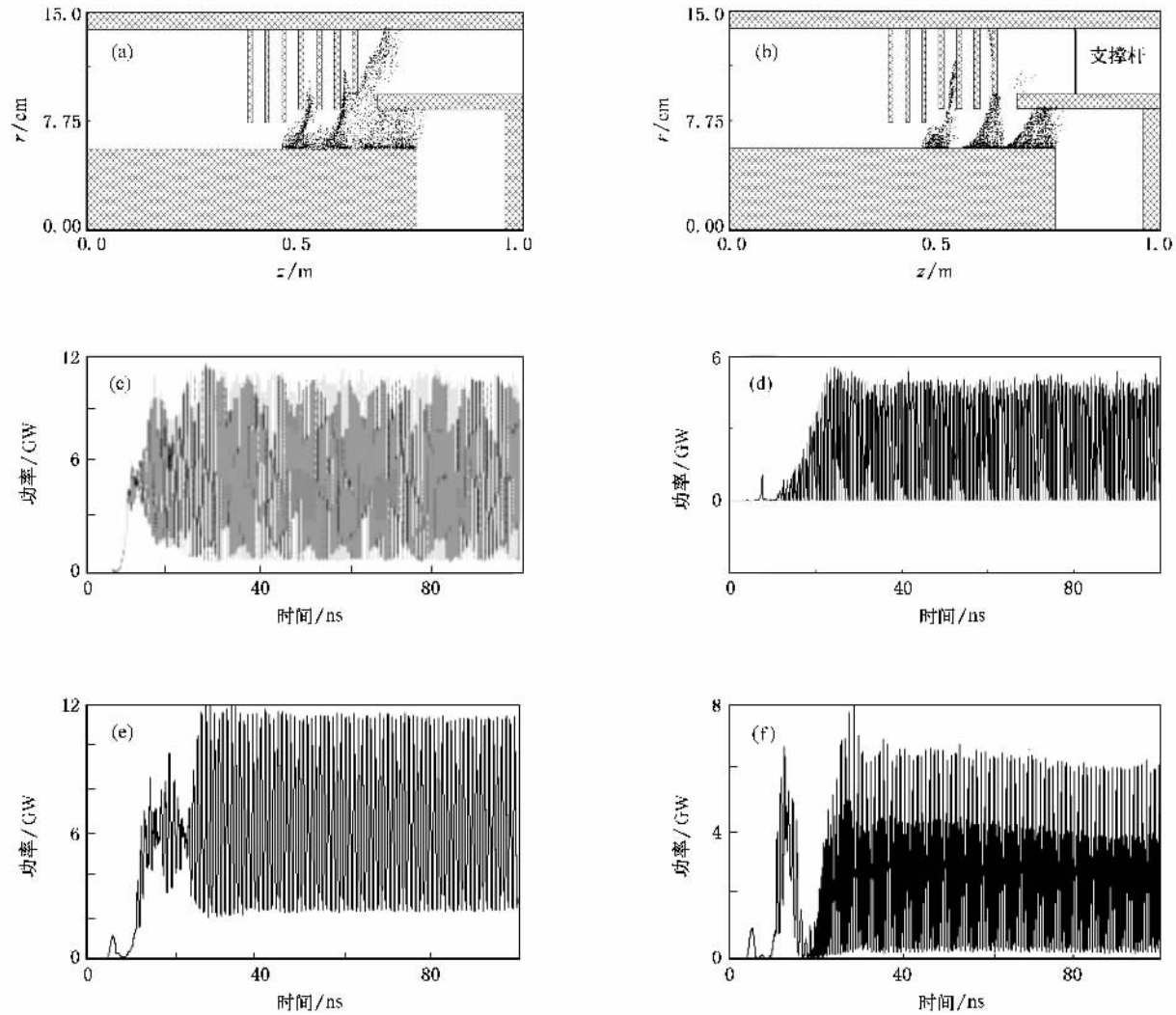


图 7 有无支撑杆情况下模拟输出结果对比 (a) 无金属支撑杆情况下二维软件相空间 (b) 有金属支撑杆情况下二维软件相空间, (c) 无金属支撑杆情况下二维软件输出功率 (d) 有金属支撑杆情况下二维软件输出功率 (e) 无金属支撑杆情况下三维软件输出功率 (f) 有金属支撑杆情况下三维软件输出功率

5.2. 二维、三维模拟验证

为了验证以上方法的正确性,用二维软件 CHIPIC2D 及三维软件 CHIPIC3D 分别对图 6 所示 MILO 器件作了一些模拟,所得输出结果如图 7 所示.图 7(a)(c)是不加金属支撑杆情况下二维软件的相空间及输出功率,图 7(b)(d)是加上金属支撑杆情况下的二维软件的相空间及输出功率;图 7(e)是不加支撑杆情况下三维软件的输出功率;图 7(f)是加上支撑杆情况下三维软件的输出功率.从图 7 可以看出:加不加支撑杆,粒子都会形成较好的轮辐.对于输出功率,加上金属支撑杆的功率为 3 GW 左右,而不加支撑杆的功率为 5.45 GW 左右.将这两

个数据与文献[8]中提供的实验数据(2.9 GW)比较后可知,加上支撑杆的模拟结果更符合客观实际.

6. 结 论

本文在三维 Yee 网格和蛙跳模型上建立金属支撑杆理论模型.在麦克斯韦方程组基础上,推导出直角坐标系下三维金属支撑杆单位长度上的电感、单位长度上电量及金属支撑杆上流过电流的离散计算公式.考虑适当的坐标变换就可将上述公式扩展到三维直角坐标系及二维、三维柱坐标系.另外,金属支撑杆电流对整个模拟区域的影响是通过设置金属支撑杆边界条件实现的.

[ 1 ] Shao F Q 2002 *Plasma Simulation* ( Beijing : Science Press ) p90 ( in Chinese ) [ 邵福球 2002 等离子体粒子模拟( 北京 : 科学出版社 )第 90 页 ]

[ 2 ] Wang B Z 2002 *Electromagnetics Calculation* ( Beijing : Science Press ) p53 ( in Chinese ) [ 王秉中 2002 计算电磁学( 北京 : 科学出版社 )第 53 页 ]

[ 3 ] Wang C Q 1994 *Finite-Difference Time-Domain Method Used for Electromagnetic Field Calculation* ( Beijing : Peking University Press ) p62 ( in Chinese ) [ 王长清 1994 电磁场计算中的时域有限差分法( 北京 : 北京大学出版社 )第 62 页 ]

[ 4 ] Holland R , Simpson L 1981 *IEEE Trans . Electromagn . Comp .* **23** 88

[ 5 ] Xie C F , Rao K J 1999 *Electromagnetic Field and Electromagnetic Wave* ( Beijing : Higher Education Press ) p35 ( in Chinese ) [ 谢处方、饶克谨 1999 电磁场与电磁波( 北京 : 高等教育出版社 )第 35 页 ]

[ 6 ] Terman F E 1943 *Radio Engineers ' Handbook* ( New York : McGraw-Hill )

[ 7 ] Liang C H , Zhu Q X 2002 *Acta Phys . Sin .* **51** 2202 ( in Chinese ) [ 梁昌洪、褚庆昕 2002 物理学报 **51** 2202 ]

[ 8 ] Guo Y H , Fan Z K , He H 2005 *High Power Laser and Particle Beams* **17** 436 ( in Chinese ) [ 郭焱华、范植开、何 琥 2005 强激光与粒子束 **17** 436 ]

[ 9 ] Hao J H , Ding W , Dong Z W 2005 *Acta Phys . Sin .* **55** 4789 ( in Chinese ) [ 郝建红、丁 武、董志伟 2005 物理学报 **55** 4789 ]

[ 10 ] Eastwood J W 1998 *IEEE Trans . Plasma Sci .* **26** 3

# Using finite-difference time-domain method to realize computer simulation of strut<sup>\*</sup>

Liu Da-Gang<sup>†</sup> Zhou Jun Liu Sheng-Gang

( School of Physical Electronics ,University of Electronic Science and Technology of China ,Chengdu 610054 ,China )

( Received 27 December 2006 ; revised manuscript received 5 July 2007 )

## Abstract

The mathematic model of strut was established on the model of Yee grid in three-dimensional space and on the model of leapfrog in time-domain. The formula of strut current and inductance per unit length in three-dimensional Cartesian coordinates were deduced. The realization of struts in different orientations and different coordinate systems in two-dimensional and three-dimensional space was discussed. At the same time the iterative process under main finite-differential time-domain iteration of strut was given. Finally , magnetically insulated transmission line oscillator was used as an example to validate the simulation for output power and particle movement.

**Keywords** : particle-in-cell simulation , Yee grid , finite-differential time-domain , strut

**PACC** : 4110 , 4110H , 4170

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National High Technology Development Program of China ( Grant No. 2005AA832101 ).

<sup>†</sup> E-mail : ldg12345@uestc.edu.cn