

再生锁模激光系统的定态输出及其稳定性*

苏 艳^{1)†} 郑植仁^{2)†} 苏文辉^{1)‡}

1) 吉林大学物理学院, 长春 130023)

2) 哈尔滨工业大学物理系, 凝聚态科学与技术研究中心, 哈尔滨 150001)

(2007 年 3 月 4 日收到, 2007 年 5 月 8 日收到修改稿)

将准孤子解代入再生锁模激光系统的主方程, 推导出脉冲参量的三个自治微分方程. 求解了无啁啾和有啁啾两种情况下系统的定态解, 并分析了其稳定性. 研究表明, 系统的定态输出随系统的调制深度或调制频率、群速色散或自相位调制等参量值的变化而变化. 因此, 通过调制系统的参量可以控制激光系统的定态输出.

关键词: 再生锁模激光系统, 线性稳定性分析, 罗斯-霍维茨判据, 定态输出及其稳定性

PACC: 4260, 4265

1. 引 言

锁模激光系统的稳定性研究是近年来非常活跃的研究领域, 人们从实验上^[1-6]和理论上^[7-10]观察并讨论了激光系统的一系列动力学现象, 包括周期和准周期振荡、混沌等输出特性^[11-14]. 再生锁模激光系统和其他许多锁模激光系统一样, 都是由复杂的非线性动力学方程描述的物理系统的生动实例, 是研究光学非线性动力学现象的最好物理实例之一. 尽管不少文献报道了一些激光系统的定态脉冲输出特性及其稳定性^[15-18], 但是有关再生锁模激光系统的定态脉冲输出特性及其稳定性方面的研究我们尚未见报道. 本文将准孤子解代入再生锁模激光系统的主方程, 推导出了脉冲参量的三个自治微分方程, 并对其定态解进行了线性稳定性分析, 获得了一些有意义的理论模拟结果.

2. 再生锁模激光系统的参量自治微分方程组

假设再生锁模蓝宝石飞秒激光系统的脉冲幅值在腔内往返循环一次后的变化量很小, 则该系统的动力学特性可以由如下方程描述^[19]:

$$T_R \frac{\partial A(T, t)}{\partial T} = \left(\frac{g}{\Omega_g^2} - iD \right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\delta |A|^2 A$$

$$+ [(g - l - M) + M \cos \omega_M t] A, \quad (1)$$

式中 T_R 是光在腔内的往返时间, $A(T, t)$ 是腔内锁模光脉冲的振幅, T 是与 T_R 同数量级的时间变量, t 表示锁模脉冲宽度内的时间变量, $\frac{g}{\Omega_g^2}$ 是增益色散参量, D 是腔内群速色散, δ 表示自相位调制, l 表示腔内的线性损耗, $M[1 - \cos(\omega_M t)]$ 是声光调制引起的损耗, M 是调制深度, ω_M 表示调制频率, g 是增益介质产生的增益,

$$g = \frac{g_0}{(1 + W/E_L)},$$

其中 g_0 表示小信号增益系数, E_L 表示增益介质的饱和能量, $W = 2A_0^2 \tau$ 是脉冲能量.

方程(1)具有如下准孤子形式解^[20]:

$$A(T, t) = A_0 \operatorname{sech}^{1+i\beta}(t/\tau) \exp(i\theta T/T_R), \quad (2)$$

式中 A_0 是脉冲幅值, β 是啁啾参量, τ 是脉冲宽度, θ 是单程相移. 为了分析脉冲输出的稳定性, 我们把方程(2)代入方程(1), 并且假设脉冲参数 A_0 , τ 和 β 是时间 T 的函数, 所得公式再经泰勒级数展开并且保留至二次项, 使实部等于实部、虚部等于虚部, 可以得到如下的描述脉冲幅值 A_0 、脉冲宽度 τ 和啁啾参量 β 的动力学自治微分方程^[21, 22]:

$$T_R \frac{\partial A_0}{\partial T} = (g - l)A_0 - \frac{\left(\frac{g}{\Omega_g^2} + D\beta \right) A_0}{\tau^2}, \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10774034, 10674034)资助的课题.

† E-mail: zhengzr@hit.edu.cn

$$T_R \frac{\partial \tau}{\partial T} = \frac{3D\beta + \frac{g}{\Omega_g^2}(2 - \beta^2)}{\tau} - M \frac{\omega_M^2}{2} \tau^3, \quad (4)$$

$$T_R \frac{\partial \beta}{\partial T} = 2\delta A_0^2 + \frac{4D - 2\frac{g}{\Omega_g^2}\beta + 4D\beta^2 - 2\frac{g}{\Omega_g^2}\beta^3}{\tau^2} - M\beta\omega_M^2\tau^2. \quad (5)$$

2.1. 无啁啾条件下的系统脉冲激光输出的稳定性

假设腔内的群速色散和自相位调制引起的脉冲啁啾得到了很好的补偿,可以忽略方程中啁啾参量的影响因素,即 $\beta = 0$. 将其代入方程(3)–(5),再令方程(3)–(5)左端参量的变化率为零,可以得到系统的如下定态方程组:

$$\left[(g - l) - \frac{g}{\Omega_g^2 \tau_s^2} \right] A_s = 0, \quad (6)$$

$$2\frac{g}{\Omega_g^2 \tau_s} - M \frac{\omega_M^2}{2} \tau_s^3 = 0, \quad (7)$$

$$A_s^2 = \frac{2|D|}{\delta \tau_s^2}. \quad (8)$$

由上述定态方程确定的 A_s 和 τ_s 就是零啁啾条件下系统输出的定态解. 可以求得以下两组定态解:

$$\beta = 0,$$

$$A_s = 0,$$

$$\frac{1}{\tau_s} = 0;$$

$$\beta = 0,$$

$$A_s = \sqrt{\frac{2|D|}{\delta}} \omega_M \Omega_g \sqrt{\frac{4M}{2l}},$$

$$\tau_s = \frac{\sqrt{\frac{2g}{M}}}{\sqrt{\omega_M \Omega_g}}.$$

第一组解对应激光系统开启或者关闭时刻的状态解,第二组解对应锁模脉冲的状态解.

为了研究上述两组定态解的稳定性,令 A_1 和 τ_1 是定态解附近的另一组解

$$A_1 = A_s + \xi_1(T), \quad (9)$$

$$\tau_1 = \tau_s + \xi_2(T), \quad (10)$$

式中 $\xi_1(T)$ 和 $\xi_2(T)$ 是 A_1 和 τ_1 相对定态解 A_s 和 τ_s 的微扰偏离量. 通常 $\xi_1(T)$ 和 $\xi_2(T)$ 有如下形式的解:

$$\xi_1(T) = \xi_{10} \exp(\lambda T), \quad (11)$$

$$\xi_2(T) = \xi_{20} \exp(\lambda T).$$

(11) 式中的 λ 是方程(9)和(10)的特征根,有 λ_1 和 λ_2 两个特征解. 如果 $\lambda_{1,2}$ 的实部都是负的,则定态解是稳定的;如果 $\lambda_{1,2}$ 中至少有一个的实部为正,则定态解是不稳定的;如果 $\lambda_{1,2}$ 中至少有一个的实部为零,另一个实部为负,则定态解是临界稳定的.

平凡定态解 $\beta = 0, A_s = 0, \frac{1}{\tau_s} = 0$ 的特征值是 $\lambda = g_0 - l$. 仅当条件 $g_0 < l$ 被满足时,这个解才存在,但是产生激光的条件是 $g_0 > l$,所以这个平凡解是不稳定的鞍点解.

非平凡解

$$\beta = 0,$$

$$A_s = \sqrt{\frac{2|D|}{\delta}} \omega_M \Omega_g \sqrt{\frac{4M}{2l}},$$

$$\tau_s^2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{2l}} \omega_M \Omega_g}$$

的特征值是

$$\lambda_1 = A_s \left[\frac{-2l}{\left(\sqrt{\frac{-\delta}{2D}} E_L + 2A_s \right)} + \frac{2l A_s \delta}{(2D\Omega_g^2 + \delta A_s^2)} \right],$$

$$\lambda_2 = -2M\omega_M^2\tau_s^2 - \frac{2DM\omega_M^2\tau_s^2}{E_L\delta - \frac{4D}{\tau_s}}.$$

仅当满足条件

$$\frac{-E_L\delta}{2D} - \Omega_g < \frac{1}{\tau_s} < \frac{E_L\delta}{3D}$$

时,锁模脉冲才是稳定的. 在再生锁模激光系统中,上述条件能够满足,所以这个非平凡解是稳定的.

2.2. 调制频率和调制深度的调制效应

由方程(7)可以得到如图1和图2所示的脉冲

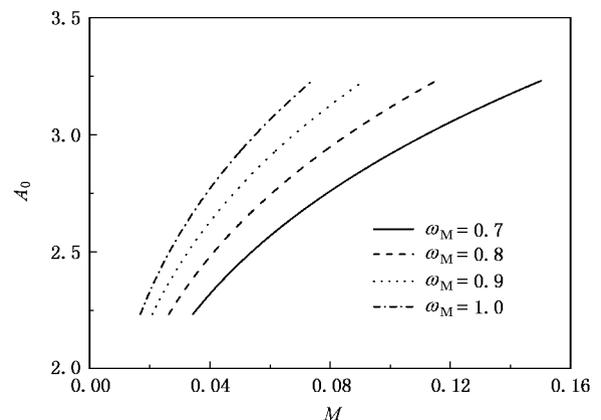


图1 脉冲幅值 A_0 随调制深度 M 和调制频率 ω_M 的变化

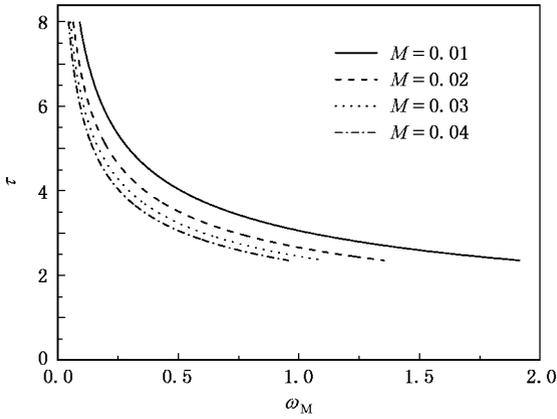


图2 脉冲宽度 τ 随调制频率 ω_M 和调制深度 M 的变化

幅值和脉冲宽度随调制深度和调制频率变化的曲线。图1为调制频率取不同值时，脉冲幅值和调制深度之间的函数关系。从图1可以看出，脉冲幅值随调制深度增大而增大。对应一定的调制深度，调制频率越大，脉冲幅值也越大。图2为调制深度取不同值时脉冲宽度和调制频率之间的函数关系。从图2可以看出，脉冲宽度随调制频率的增大缓慢减小。对应一定的调制频率，调制深度越大，脉冲宽度越小。因此可以通过调整调制深度和调制频率来实现脉冲宽度的压缩。

2.3. 有啁啾条件下的系统脉冲激光输出的稳定性

保留方程(1)中的群速色散和自相位调制以及调制项，忽略方程(1)中的其他项。再次把方程(2)代入方程(1)，可以得到如下描述脉冲幅值 A_0 、脉冲宽度 τ 和啁啾参量 β 的动力学方程组：

$$T_R \frac{\partial A_0}{\partial T} = \frac{-D\beta A_0}{\tau^2}, \tag{12}$$

$$T_R \frac{\partial \tau}{\partial T} = \frac{3D\beta}{\tau} - M \frac{\omega_M^2}{2} \tau^3, \tag{13}$$

$$T_R \frac{\partial \beta}{\partial T} = 2\delta A_0^2 + \frac{4(1 + \beta^2)D}{\tau^2} - M\beta\omega_M^2 \tau^2. \tag{14}$$

2.4. 线性稳定性分析

罗斯和霍维茨给出了不用求解方程组(12)–(14)就可以判断其特征根 λ 是否为负的判据，即方程组的所有根都是负值的充分和必要条件是由方程组构造的所有行列式的值都为正^[23]。假设一组向量 $(\chi(T), \eta(T), \xi(T))$ 是方程组(12)–(14)的解 (A_0, τ, β) 在平衡态解 $(A_{0s}, \tau_s, \beta_s)$ 附近的微扰量，它们均正比于 $e^{\lambda T}$ ，则 λ 满足如下特征方程^[24]：

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

其中 $a_k (k=1, 2, 3, \dots)$ 是方程组构造的所有行列式的值， λ 是方程的特征根。确保特征方程的解为负实部的条件是 $a_0, a_1, a_2 > 0$ 和 $a_1 a_2 > a_0$ 。若特征根的实际部为负，则任何偏离平衡态的扰动都会逐渐衰减为零。根据罗斯-霍维茨判据导出的 $\beta \neq 0$ 情况下系统定态脉冲输出的稳定条件是

$$\frac{1}{\tau^4} < \frac{3M\omega_M^2}{2D\beta}. \tag{15}$$

由此可以得到定态脉冲输出的稳区边界曲线，如图3所示。

从图3可以看出，随调制深度的增大，稳区的范围逐渐缩小，非稳区的范围随之扩大。这意味着调制深度会影响激光系统定态脉冲输出的稳定性，这是再生锁模激光系统的一种特殊现象。

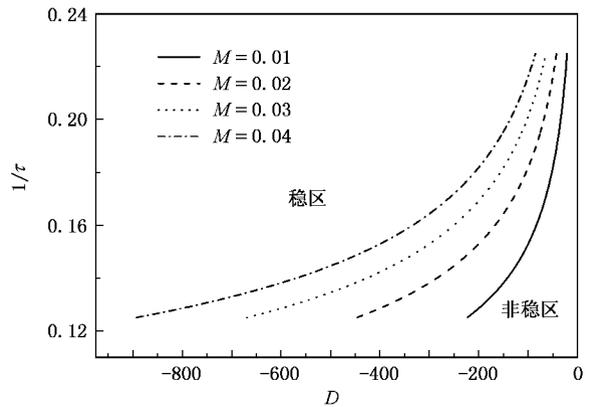


图3 定态脉冲输出的稳区、非稳区和稳区与非稳区的边界曲线以及边界曲线随调制深度 M 的变化

2.5. 稳区中的群速色散和自相位调制效应

令有啁啾情况下的方程(14)左端参量的变化率

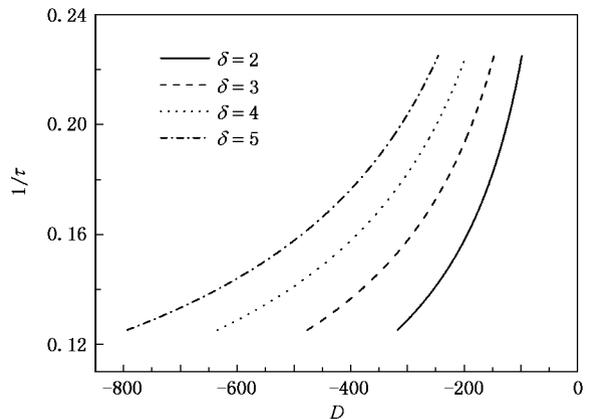


图4 稳区中带宽 $1/\tau$ 随群速色散和自相位调制的变化

为零,可以获得如下方程:

$$2\delta A_0^2 + \frac{4(1 + \beta^2)D}{\tau^2} - M\beta\omega_M^2 \tau^2 = 0. \quad (16)$$

由此可以得到如图 4 所示的稳区中带宽随群速色散变化的函数曲线.

在图 4 的稳区内的负群速色散区域中,增加自相位调制参量的数值对带宽有很大影响.从图 4 可以看出,带宽随着色散的减小而变小.随着自相位调制的增大,带宽增大,即脉冲宽度减小.这个结论与 Haus 等^[25]在附加锁模脉冲激光系统中得到的结果相似.

3. 结 论

本文将准孤子解代入再生锁模激光系统的主方程,推导出脉冲参量的三个自治微分方程,然后利用

线性稳定性分析的方法研究了再生锁模激光系统定态输出的稳定性.

理论研究表明:在无啁啾的情况下,平凡解在激光产生时失去了它的稳定性,而非平凡解是稳定的.脉冲宽度随着调制频率的增大而减小,也随着调制深度的增大而减小.因此,可以通过调整调制深度和调制频率来实现脉冲宽度的压缩.在有啁啾的情况下,稳区中的群速色散和自相位调制效应对脉冲输出影响很大,减小负群速色散的绝对值会使脉冲宽度缩小.增加自相位调制参量的数值,对负群速色散区域中的脉冲宽度也有很大的影响.在负群速色散区域中,随着自相位调制的增加,脉冲宽度减小.

模拟计算结果表明,通过改变系统参量可以控制系统的定态输出.理论模拟得到的这些结果可以为通过调制系统参量来控制系统定态输出的实验研究提供必要的理论依据.

- [1] Ramaswamy-Paye M ,Fujimoto J G 1994 *Opt. Lett.* **19** 1756
- [2] Cerullo G ,De Silvestri S ,Magni V ,Pallaro L 1994 *Opt. Lett.* **19** 807
- [3] Kolev V Z ,Lederer M J ,Luther-Davies B ,Rod A V 2003 *Opt. Lett.* **28** 1275
- [4] Schlatter A ,Krainer L ,Golling M ,Ebling D ,Keller U 2005 *Opt. Lett.* **30** 44
- [5] Dai J M ,Zhang R B ,Wang Q Y 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 20 (in Chinese)[戴建明、章若冰、王清月 1994 物理学报 **43** 20]
- [6] Wang P ,Zhao H ,Zhao Y Y ,Wang Z H ,Tian J R ,Li D H ,Wei Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 224 (in Chinese)[王 鹏、赵 环、赵研英、王兆华、田金荣、李德华、魏志义 2007 物理学报 **56** 224]
- [7] Magni V ,Cerullo G ,De Silvestri S ,Monguzzi A 1995 *J. Opt. Soc. Am.* B **12** 476
- [8] Herrmann J 1994 *J. Opt. Soc. Am.* B **11** 498
- [9] Geddes J B ,Firth W J ,Black K 2003 *SIAM J. Appl. Dynam. Sys.* **2** 647
- [10] Tang Z H ,Yan J R ,Liu L H 2006 *Chin. Phys.* **15** 2638
- [11] Tromborg B ,Osmundsen J H ,Olesen H 1984 *IEEE J. Quantum Electron.* **20** 1023
- [12] Tkach R W ,Chraphyvy A R 1986 *J. Lightwave Technol.* **4** 1655
- [13] Mørk J ,Tromborg B ,Mark J 1992 *IEEE J. Quantum Electron.* **28** 93
- [14] Li H ,Ye J ,McInemey J G 1993 *IEEE J. Quantum Electron.* **29** 2421
- [15] Liu Y ,Kikuchi N ,Ohtsubo J 1995 *Phys. Rev. E* **51** 2697
- [16] Kikuchi N ,Liu Y ,Ohtsubo J 1997 *IEEE J. Quantum Electron.* **33** 56
- [17] Kalashnikov V L ,Poloyko I G ,Mikhailov V P 1997 *J. Opt. Soc. Am.* B **14** 2691
- [18] Murakami A ,Ohtsubo J ,Liu Y 1997 *IEEE J. Quantum Electron.* **33** 1825
- [19] Kopf D ,Kartner F X ,Weingarten K J ,Keller U 1994 *Opt. Lett.* **19** 2146
- [20] Haus H A ,Mecozzi A 1993 *IEEE J. Quantum Electron.* **29** 983
- [21] Jasapara J ,Rudolph W ,Kalashnikov V L 2000 *J. Opt. Soc. Am.* B **17** 319
- [22] Sergeev A M ,Vanin E V ,Wise F W 1997 *Opt. Commun.* **140** 61
- [23] Liu B Z 1994 *Nonlinear Dynamics and Chaos Basis* (Changchun : Northeast Normal University Press) p39 (in Chinese)[刘秉正 1994 非线性动力学与混沌基础(长春:东北师范大学出版社) 第 39 页]
- [24] Zhang N ,Xing Q R ,Han X Q ,Zhang W L ,Wei H Y ,Chai L ,Wang Q Y 2001 *Chin. J. Lasers* **28** 293 (in Chinese)[张 宁、邢岐荣、韩秀芹、张伟力、魏赫颖、柴 路、王清月 2001 中国激光 **28** 293]
- [25] Haus H A ,Fujimoto J G ,Ippen E P 1991 *J. Opt. Soc. Am.* B **8** 2068

Steady-state output and its stability in regeneratively mode locking lasers *

Su Yan^{1 2)} Zheng Zhi-Ren^{2)†} Su Wen-Hui^{1 2)}

¹ *College of Physics ,Jilin University ,Changchun 130023 ,China)*

² *Center for Condensed Matter Science and Technology ,Department of Physics ,
Harbin Institute of Technology ,Harbin 150001 ,China)*

(Received 4 March 2007 ;revised manuscript received 8 May 2007)

Abstract

Three autonomous equations for pulse parameters were deduced by substituting quasi-soliton solution to the master equation of regenerative mode locking lasers. The steady-state solutions without and with chirp were derived and their stability was analyzed by the method of linear stability analysis. The results show that the evolution of the steady-state output parameters of the system varies with the values of modulation parameters , group velocity dispersion and self phase modulation. Thus the steady-state output can be controlled by adjusting the modulation parameters in the system.

Keywords : regeneratively mode locking laser , linear stability analysis , theorem of Routh and Hurwitz , steady-state output and its stability

PACC : 4260 , 4265

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10774034 ,10674034).

† E-mail :zhengzr@hit.edu.cn