

高功率微波在等离子体填充波导中的谐波产生^{*}

傅文杰[†] 鄢 扬

(电子科技大学物理电子学院, 成都 610054)
(2007 年 3 月 3 日收到, 2007 年 7 月 11 日收到修改稿)

采用等离子体流体理论, 研究了高功率微波在等离子体填充波导中的谐波产生, 导出了非线性波动方程. 对二次谐波产生进行了数值计算与分析. 理论分析和数值计算表明, 高功率微波将在等离子体填充波导中激发起谐波, $TE_{0,n}$ 模式与 $TM_{0,n}$ 模式的基波都将激发起 TM 类型的谐波.

关键词: 高功率微波, 谐波产生, 等离子体填充波导

PACC: 5235M, 5240D, 5240F

1. 引 言

近 20 年来, 由于在雷达、电子对抗方面的重要应用前景, 高功率微波技术的研究受到国际上的广泛重视. 在高功率微波器件中, 电子注电流高达数千安培, 空间电荷效应十分强烈, 限制了电子注电流及输出功率的进一步提高. 解决这一问题的有效途径是在器件中引入等离子体, 克服空间电荷效应对电子束传输电流的限制, 使电子束电流可以大大超过空间电荷极限流, 从而提高电子束功率和微波输出功率. 等离子体的存在还显著改变了电磁波的传播特性和电子束与波的相互作用特性, 在一定条件下可使束波相互作用效率成倍增加, 通过调节等离子体浓度, 可以改变器件的工作点, 实现宽带调谐. 由于等离子体对电子束的中和效应, 聚束磁场可以大大减弱甚至取消, 系统的体积、重量和造价都可以极大地降低^[1-7].

在填充等离子体的高功率微波器件中, 由于微波功率高达 10^9 W 量级, 微波场强很高, 存在多种非线性效应, 如等离子体隧道、自聚焦效应^[8-11]、尾场^[12]、孤子^[13]、高次谐波的产生^[14, 15]等, 而其中高次谐波的产生是重要非线性效应之一. 本文根据等离子体流体理论对等离子体填充圆柱波导中的高次谐波进行了理论推导, 并在此基础上对二次谐波产生进行了理论分析和数值计算. 所得结果有助于了解

等离子体填充高功率微波器件中的注波相互作用非线性过程.

2. 基本方程

根据等离子体流体理论, 忽略电子与离子之间的碰撞效应, 电子运动方程为

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + \frac{k_B T_e}{n_e m_e} \nabla n_e + \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) = 0, \quad (1)$$

式中 \mathbf{v}_e 为电子运动速度, n_e 为等离子体电子密度, m_e 为电子质量, k_B 为玻尔兹曼常数, T_e 为电子温度, e 为电子电荷, \mathbf{E} 为微波的电场强度, \mathbf{B} 为微波的磁场强度. 应用泊松方程, 将 (1) 式改写为

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} - \frac{k_B T_e \epsilon_0}{n_e m_e e} \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_e) = 0, \quad (2)$$

式中 ϵ_0 为真空介电常数. 根据 Helmholtz 方程, 将 (1) 式代入 (2) 式可得

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = V_T^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \omega_p^2 \mathbf{E} - \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \nabla (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_e) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_e \nabla \cdot \mathbf{E}), \quad (3)$$

式中

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 60471031) 资助的课题.

[†] E-mail: fu996@yahoo.com.cn

$$V_T^2 = k_B T_e / m_e.$$

将(3)式整理后可得微波在等离子体中传播的非线性波动方程

$$-c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + V_T^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \omega_p^2 \mathbf{E} = Q_{NL}, \quad (4)$$

式中

$$Q_{NL} = \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \nabla (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_e) + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_e \nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (5)$$

这里 ω_p 为等离子体电子频率,

$$\omega_p = \sqrt{\rho_0 e \kappa \epsilon_0 m}.$$

(4)式等号左端为线性项,右端 Q_{NL} 为非线性项,由电子流与场的耦合而产生.

为求出(5)式中电子速度,根据流体理论首先采用如下的简化电子运动方程:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (6)$$

对于更高一级近似,可得下列方程:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{v}_e). \quad (7)$$

在求解过程中,先由(6)式求出电子速度的零级近似,然后将其代入(7)式等号右端得到一级近似.如此反复迭代求解,可得到任意精度的电子速度解.

考虑谐波项后,等离子体中的场为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{jn\omega t} \right\}. \quad (8)$$

类似地,得到电子运动速度为

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) e^{jn\omega t} \right\}. \quad (9)$$

在谐波产生过程中,基波和各谐波相速远大于电子热运动速度,故可省略热运动项.对于基波,由于它是入射波,故一般情况下远大于各谐波幅度,可忽略各次谐波(即非线性项)对基波的影响,因而基波满足如下方程:

$$-c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_1 + \omega^2 \epsilon_p(\omega) \mathbf{E}_1 = 0, \quad (10)$$

式中

$$\epsilon_p(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2.$$

对于谐波,波动方程可写为如下形式:

$$-c^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_n + n^2 \omega^2 \epsilon_p(n\omega) \mathbf{E}_n = Q_n. \quad (11)$$

将(8)(9)式代入(5)式,可得第 n 次谐波的非线性项

$$Q_n = \frac{1}{4} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nabla (\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_k)$$

$$+ \frac{1}{2} j n \omega \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_m \nabla \cdot \mathbf{E}_k, \quad (12)$$

式中 m, k 满足

$$n = m + k,$$

$$\mathbf{v}_{-k} = \mathbf{v}_k^*.$$

对于主要的二次、三次谐波,保留展开式中最低项,可得

$$Q_2 = \frac{1}{4} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \nabla (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + j \omega \mathbf{v}_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_1, \quad (13)$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} \frac{m_e}{e} \omega_p^2 \nabla (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \frac{3}{2} j \omega (\mathbf{v}_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{v}_2 \nabla \cdot \mathbf{E}_1). \quad (14)$$

为消除(13)(14)式中的电子速度项,应用(6)(7)式可得

$$j \omega \mathbf{v}_1 = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1, \quad (15)$$

$$2j \omega \mathbf{v}_2 = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_2 - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1). \quad (16)$$

将(15)(16)式代入(13)(14)式,可得

$$Q_2 = \frac{e}{m_e} \left[\frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1) - \mathbf{E}_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 \right], \quad (17)$$

$$Q_3 = -\frac{e}{m_e} \left[\frac{1}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) + \frac{3}{4} \mathbf{E}_2 \nabla \cdot \mathbf{E}_1 - \frac{e}{16 m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^4} \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1)) - \frac{3e}{16 m_e} \frac{1}{\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1) \nabla \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{3}{2} \mathbf{E}_1 \nabla \cdot \mathbf{E}_2 \right]. \quad (18)$$

3. 二次谐波的产生

在填充等离子体的高功率微波器件中,因二次谐波是最主要的谐波成分,三次谐波及更高谐波的处理十分繁琐,器件中工作模式一般为对称模式(TE_{0n} 和 TM_{0n} 模式),故本文只讨论二次谐波的产生,考虑非磁化等离子体并且传播的基波为对称模式.

二次谐波的波动方程为

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{E}_2 + 4\omega^2 \epsilon_p(2\omega) \mathbf{E}_2 = \frac{e}{4m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \nabla (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1). \quad (19)$$

对于均匀无磁化等离子体, $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$. 在等离子体填充波导管中,对于 TE_{0n} 模式,基波电场为

$$\begin{aligned} E_r &= 0, \\ E_\theta &= AJ_1(k_c r) e^{-jk_z z}, \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 A 为电场强度峰值因子. 从(14)式可导出二次谐波纵向传播因子为 $e^{-j2k_z z}$ 展开后可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2r}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2r} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2r} \\ &= \frac{eA^2 \omega_p^2 k_c}{2c^2 m_e \omega^2} J_1(k_c r) J_1'(k_c r), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2\theta}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2\theta} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2\theta} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2z}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2z} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2z} \\ &= - \frac{eA^2}{2c^2 m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} j k_z J_1'(k_c r). \end{aligned} \quad (23)$$

从(22)式可知, 二次谐波角向电场的源项为零, 故有 $E_\theta = 0$, 并可进一步导出纵向磁场也为零. 因此, TE_{0n} 模式的二次谐波是 TM 类型的波.

对(21)和(23)式进一步整理后可得

$$\begin{aligned} & r \frac{d^2 E_{2r}}{dr^2} + \frac{dE_{2r}}{dr} + 4 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{4c^2} - k_z^2 \right) r E_{2r} \\ & - \frac{eA^2 \omega_p^2 k_c r}{2c^2 m_e \omega^2} J_1(k_c r) J_1'(k_c r) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & r \frac{d^2 E_{2z}}{dr^2} + \frac{dE_{2z}}{dr} + 4 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{4c^2} - k_z^2 \right) r E_{2z} \\ & + \frac{eA^2}{2c^2 m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} j k_z r J_1'(k_c r) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

(24)(25)式就是 TE_{0n} 模式二次谐波的波动方程.

对于 TM_{0n} 模式, 基波电场为

$$\begin{aligned} E_r &= j k_c A J_1(k_c r) e^{-jk_z z}, \\ E_\theta &= 0, \\ E_z &= k_z A J_0(k_c r) e^{-jk_z z}. \end{aligned} \quad (26)$$

从(19)式可导出二次谐波纵向传播因子为 $e^{-j2k_z z}$ 展开后可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2r}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2r} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2r} \\ &= \frac{eA^2 \omega_p^2 k_c}{2c^2 m_e \omega^2} \left[-k_z^2 J_1(k_c r) J_1'(k_c r) \right. \\ & \left. + k_c^2 J_0(k_c r) J_0'(k_c r) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2\theta}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2\theta} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2\theta} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_{2z}}{dr} \right) - 4k_z^2 E_{2z} + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \right) E_{2z} \\ &= - \frac{eA^2}{2c^2 m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} j k_z \left[-k_z^2 J_1'(k_c r) + k_c^2 J_0'(k_c r) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

从(28)式可知, 二次谐波角向电场的源项为零, 故有 $E_\theta = 0$, 并可进一步导出纵向磁场也为零. 因此, TM_{0n} 模式的二次谐波是 TM 类型的波.

将(27)和(29)式进一步整理后可得

$$\begin{aligned} & r \frac{d^2 E_{2r}}{dr^2} + \frac{dE_{2r}}{dr} + 4 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{4c^2} - k_z^2 \right) r E_{2r} \\ & - \frac{eA^2 \omega_p^2 k_c r}{2c^2 m_e \omega^2} \left[-k_z^2 J_1(k_c r) J_1'(k_c r) \right. \\ & \left. + k_c^2 J_0(k_c r) J_0'(k_c r) \right] = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & r \frac{d^2 E_{2z}}{dr^2} + \frac{dE_{2z}}{dr} + 4 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{4c^2} - k_z^2 \right) r E_{2z} \\ & + \frac{eA^2}{2c^2 m_e} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} j k_z r \left[-k_z^2 J_1'(k_c r) + k_c^2 J_0'(k_c r) \right] = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

(30)(31)式就是 TM_{0n} 模式二次谐波的波动方程.

4. 数值计算

(24)(25)(30)(31)式均为非线性常微分方程, 无法给出解析解, 可结合边界条件进行数值求解. 使用 Runge-Kutta 法进行数值计算, 选取计算参数为波导半径 $r = 1.5$ cm、等离子体密度 $n_0 = 10^{11}$ cm⁻³.

对基波为 TE_{01} 模的二次谐波进行了数值计算, 所得结果如图 1—图 3 所示.

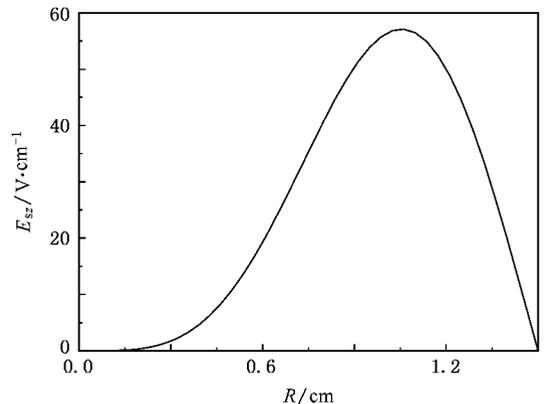


图 1 当基波频率 $f = 15$ GHz, $A_0 = 10^4$ V·cm⁻¹ 时, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度 E_{sz} 与半径 R 的关系

从图 1 可以看出, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度具有环形分布, 并且数值计算的结果表明二次

谐波的 z 向电场强度与 TE_{01} 模的基波有 $-\pi/4$ 的相位差.

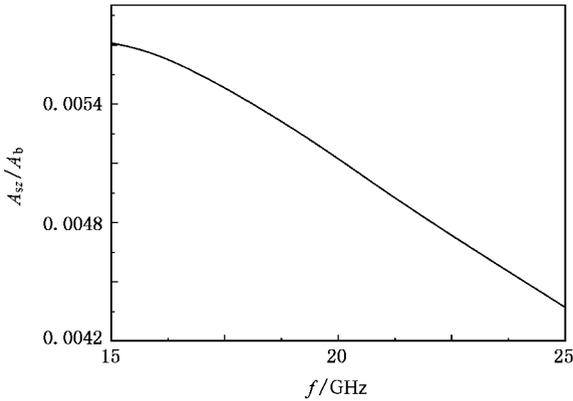


图 2 当 $A_b = 10^4 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}$ 时, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度峰值 A_{sz} 与基波电场强度峰值因子 A_b 的比值与基波频率 f 的关系

从图 2 可以看出, 当基波场强不变时, 随着基波频率的提高, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度的峰值 A_{sz} 与基波电场强度峰值因子 A_b 的比值逐渐减小. 这说明当基波能量不变时, 基波频率越高, 其激发的二次谐波的能量越小.

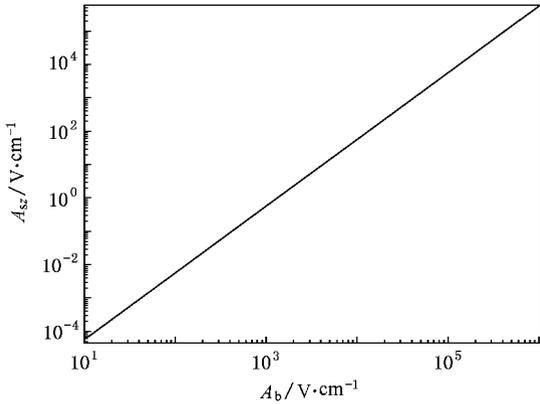


图 3 当基波频率 $f = 15 \text{ GHz}$ 时, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度峰值 A_{sz} 与基波电场强度峰值因子 A_b 的关系

从图 3 可以看出, 当基波频率一定时, TE_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度的峰值 A_{sz} 随着基波电场强度峰值因子 A_b 的增长而增长, 并且数值计算的结果表明二次谐波 z 向电场强度的峰值 A_{sz} 与 A_b 的平方几乎成正比. 这说明随着基波功率的提高, 二次谐波的功率大大提高. 数值计算的结果还表明, 在不考虑其他非线性效应的情况下, 当基波的连续功率达到 10^9 W 量级 ($A \approx 10^5 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}$) 时, 二次谐波的连续功率也将达到 10 MW 的量级.

对基波为 TM_{01} 模的二次谐波也进行了数值计算, 所得结果如图 4—图 6 所示.

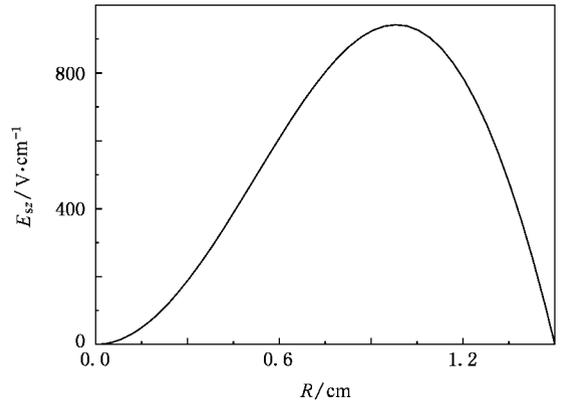


图 4 当基波频率 $f = 15 \text{ GHz}$, $A_b = 10^4 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}$ 时, TM_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度 E_{sz} 与半径 R 的关系

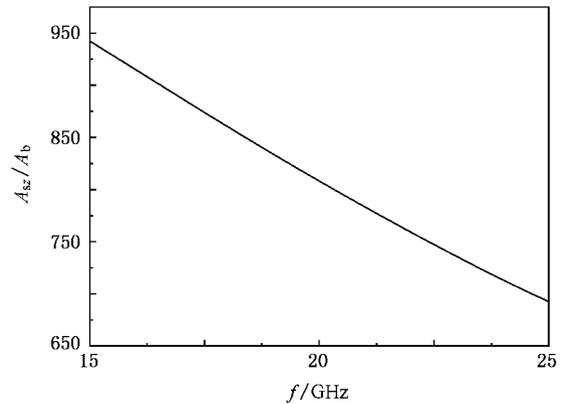


图 5 当 $A_b = 10^4 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}$ 时, TM_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度峰值 A_{sz} 与基波电场强度峰值因子 A_b 的比值与基波频率 f 的关系

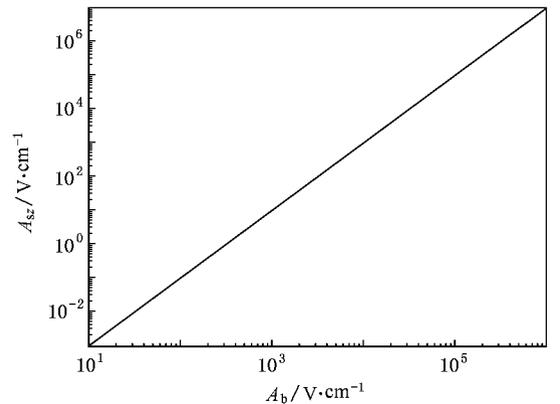


图 6 当基波频率 $f = 15 \text{ GHz}$ 时, TM_{01} 模的二次谐波 z 向电场强度峰值 A_{sz} 与基波电场强度峰值因子 A_b 的关系

从图 4—图 6 可以看出, TM_{01} 模与 TE_{01} 模有相类似的结果.

5. 结 论

本文研究了高功率微波在等离子体填充波导中的谐波产生, 推导了理论方程. 理论研究表明, TE_{0n} 模式与 TM_{0n} 模式的基波将激发起 TM 类型的高次谐

波. 通过对二次谐波的数值计算表明: 当微波基波场强很大时, 将激发起明显的二次谐波. 当微波的场强一定时, 微波频率越高, 所激发的谐波场强越小. 当微波频率一定时, 微波场强越大, 所激发的谐波场强越大. 所激发起的谐波可与等离子体产生新的相互作用, 这些相互作用都将对等离子体填充高功率微波器件的性能产生影响. 因此, 本文的研究结果将有助于等离子体填充高功率微波器件的研究.

- [1] Carmel Y, Lou W R, Antonsen T M, Rodgers J, Levush B, Destler W W, Granatstein V L 1992 *Phys. Fluids B* **4** 2286
- [2] Loza O T, Shkvarunets A G, Strelkov P S 1998 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **26** 615
- [3] Liu S G, Barker R J, Zhu D J, Yan Y, Gao H 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 2135
- [4] Liu S G, Barker R J, Yan Y, Zhu D J 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 2152
- [5] Liu P K, Xiong C D, Liu S G, Tang C J, Qian S J 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 892 (in Chinese) [刘濮鲲、熊彩东、刘盛纲、唐昌建、钱尚介 1997 物理学报 **46** 892]
- [6] Xie H Q, Li C Y, Yan Y, Liu S G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 914 (in Chinese) [谢鸿全、李承跃、鄢 扬、刘盛纲 2003 物理学报 **52** 914]
- [7] Xie H Q, Liu P K, Li C Y, Yan Y, Liu S G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3114 (in Chinese) [谢鸿全、刘濮鲲、李承跃、鄢 扬、刘盛纲 2004 物理学报 **53** 3114]
- [8] Ito H, Nishida Y, Yugami N 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4540
- [9] Xu X, Yugami N, Nishida Y 1997 *Phys. Rev. E* **55** 3328
- [10] Rajyaguru C, Fuji T, Ito H, Yugami N, Nishida Y 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016403
- [11] Ito H, Rajyaguru C, Yugami N, Nishida Y, Nishida Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066406
- [12] Yoshii J, Lai C H, Katsouleas T, Joshi C, Mori W B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4194
- [13] Farina D, Bulanov S V 2001 *Phys. Rev. E* **64** 066401
- [14] Gibbon P 1997 *IEEE J. Quantum Electron.* **33** 1915
- [15] Esarey E, Ting A, Sprangle P, Umstadter D, Liu X 1993 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **21** 95

Harmonic generation of high power microwave in plasma filled waveguide ^{*}

Fu Wen-Jie[†] Yan Yang

(School of Physical Electronics , University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 , China)

(Received 3 March 2007 ; revised manuscript received 11 July 2007)

Abstract

We adopted plasma fluid theory to analyze the harmonic generation of high power microwave in plasma filled waveguide , and the analytical theory is presented. The numerical calculation and analysis of second-order harmonic were also done in this paper. The theoretical and numerical analysis showed that high power microwave can generate harmonics in the plasma filled waveguide , and wave of both TE_{0n} mode and TM_{0n} mode can excite harmonics as TM mode.

Keywords : high power microwave , harmonic generation , plasma filled waveguide

PACC : 5235M , 5240D , 5240F

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60471031).

[†] E-mail : fu996@yahoo.com.cn