第 56 卷 第 12 期 2007 年 12 月
1000-3290/2007/56(12)/7224-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56, No.12, December, 2007

介观耗散电容耦合电路量子化中的正则变换*

谢月新[1)2)] 李志坚[3)] 周光辉[1)†]

1)(湖南师范大学物理与信息科学学院, 长沙 410081)
2)(湘南学院物理系, 郴州 423000)
3)(湖南第一师范学校物理与电子学系, 长沙 410002)

(2007 年 1 月 25 日收到; 2007 年 7 月 6 日收到修改稿)

针对介观耗散电容耦合 RLC 电路提出一种一般的正则变换,并证明了其正确性和合理性. 用这种正则变换研究了双回路介观耗散电容耦合电路的量子化问题,得出的对角化哈密顿量比文献中多出一非线性项. 这种具有普遍性的一般正则变换可能对研究介观多回路耗散系统的量子涨落、量子噪声等性质具有重要的意义.

关键词: RLC 电路, 量子化, 正则变换
PACC: 7335, 4250

1. 引 言

随着纳米技术的发展,在电子器件中电路及器件的小型化和高集成度的趋势越来越显著,近年来已经达到了原子尺寸的量级[1]. 当电路的尺寸小到与电子的相干长度可比拟时,电路本身的量子效应就会显现出来,原来在研究电路时所采用的一系列经典的基本原理和方法不再成立,大量的有关纳米尺寸电路以及单电荷器件的实验结果已经充分证明了这一点[2,3]. 自 20 世纪 70 年代 Louisell[4] 研究了 LC 电路的量子效应以来,人们先后研究了各种介观电路的量子化问题[5—10],包括电荷的离散性[5,6]等. 但是,大部分研究仅限于讨论无耗散介观电路[7,8]或有耗散的单回路电路[9,10]. 由于实际电路总是存在一定的电阻,结果必然导致电路存在一定的耗散作用,而实际电路也经常是多回路的. 因此,近年来人们广泛地开展对介观耗散耦合电路量子效应的研究[11—14],更具有普遍性和实际意义.

在耗散耦合电路量子效应的研究中,哈密顿量及其量子化是否正确是一个关键问题,因为它直接关系到各物理量的量子涨落研究结果的正确性. 在最近耗散耦合电路量子化的研究中,文献[11]研究的是双电源耦合电路,而文献[12—14]研究的是单电源耦合电路,其中文献[12]的哈密顿量不满足正则量子化条件[13],文献[13]只研究了两电路参量满足 $R_1/L_1 = R_2/L_2 = \lambda$(常数)的特殊情形,文献[14]试图推广到一般情况,但其变换不合正则条件. 所以,期待有一种正确的方法求出一般的多回路 RLC 耦合系统的哈密顿量及其量子化,在此基础上进行量子涨落等问题的研究. 本文提出一种新的将哈密顿量量子化的一般正则变换,并证明了它的正确性和合理性,这对研究一般的多回路介观 RLC 耦合电路的量子涨落、量子噪声等性质有一定的意义.

2. 正则变换

考虑文献[12—14]中图 1 所示的耗散电容耦合电路,根据基尔霍夫定律,其经典运动方程为

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_1}\right)q_1 - \frac{q_2}{C} = \varepsilon(t),$$
$$L_2\ddot{q}_2 + R_2\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_2}\right)q_2 - \frac{q_1}{C} = 0, \tag{1}$$

式中 q_i, L_i 和 C_i($i=1,2$, 以下同)分别是两个回路各自的电荷、电感和电容, C 是两个回路的耦合电容, $\varepsilon(t)$是电压源,量的符号上方的'·'表示该量对时间 t 的导数(以下同). 文献[12,13]中,令 $p_i = L_i\dot{q}_i$,将(1)式表示为

---

* 湖南省自然科学基金(批准号:06JJ2097, 06JJ4003)资助的课题.
† 通讯联系人. E-mail: ghzhou@hunnu.edu.cn

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{p_1}{L_1}, \\
\dot{p}_1 &= \varepsilon(t) - \frac{R_1}{L_1}\dot{q}_1 - \frac{q_1}{C_1'} + \frac{q_2}{C}, \\
\dot{q}_2 &= \frac{p_2}{L_2}, \\
\dot{p}_2 &= -\frac{R_2}{L_2}\dot{q}_2 - \frac{q_2}{C_2'} + \frac{q_1}{C},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
C_1' &= CC_1/(C + C_1), \\
C_2' &= CC_2/(C + C_2).
\end{aligned}
$$

由(2)式可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} &= -\frac{R_1}{L_1}, \\
\frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} &= -\frac{R_2}{L_2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(3)式表明,在一个耗散系统($R_i \neq 0$)中，q_i 和 p_i 不再构成经典力学中正则共轭变量[13,14]，而文献[12]仍将其直接作共轭变量处理，得出了错误的哈密顿量．为此，文献[13]讨论了 $R_1/L_1 = R_2/L_2 = \lambda$ 的特殊情形，引入如下“正则变换”：

$$
\begin{aligned}
Q_i &= q_i \exp\left(\frac{1}{2}\lambda t\right), \\
P_i &= L_i \dot{Q}_i = \left(p_i + \frac{1}{2}R_i q_i\right)\exp\left(\frac{1}{2}\lambda t\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

但是,这种变换直观上并不满足正则变换条件．正则变换的条件[15]是：给出一组变换

$$
\begin{aligned}
q &\to Q(q,p), \\
p &\to P(q,p),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

若为正则变换，则其相应的哈密顿正则方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{Q}_j &= \frac{\partial H}{\partial P_j}, \\
\dot{P}_j &= -\frac{\partial H}{\partial Q_j}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

要保证变换(5)式为正则形式(6)式，则必须满足

$$
\begin{aligned}
\{Q_j, Q_k\} &= \{P_j, P_k\} = 0, \\
\{Q_j, P_k\} &= \delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2\cdots),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式中 $\{\,,\cdot\}$ 为 Poisson 括号．不难得出，(4)式只满足

$$
\{Q_j, Q_k\} = \{P_j, P_k\} = 0,
$$

而

$$
\begin{aligned}
\{Q_j, P_k\} &= \sum_i \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right) \\
&= 2\exp(\lambda t) \\
&\neq \delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

这表明(4)式似乎不是正则变换，但可以把它称为相空间的变换，而相空间的变换如果能保证哈密顿方程的正则形式不变，亦可称为正则变换[15]．且文献[13]讨论了在海森伯绘景中(2)式的量子化，得出

$$
\begin{aligned}
x_1 &= [q_1, p_1], \\
x_2 &= [q_2, p_2], \\
x_3 &= [q_1, p_2], \\
x_4 &= [q_2, p_1], \\
x_5 &= [q_1, q_2], \\
x_6 &= [p_1, p_2].
\end{aligned}
\tag{9}
$$

所以，当 $R_1/L_1 = R_2/L_2 = \lambda$ 时,有

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 = \mathrm{i}\hbar\exp(-\lambda t), \\
x_3 &= x_4 = x_5 = x_6 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

由(4)式结合(9),(10)式可证明

$$
\begin{aligned}
[Q_i, P_j] &= \mathrm{i}\hbar, \\
[Q_i, Q_j] &= [P_i, P_j] = 0 \qquad (i,j = 1,2).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

从而保证了哈密顿方程的正则形式不变,也保证了(4)式为正则变换．然而，该结果是在 $R_1/L_1 = R_2/L_2 = \lambda$ 时得出的，在一般情况下(4)式是否满足正则变换条件还值得讨论．

文献[14]虽研究了 $R_1/L_1 = \lambda_1 \neq R_2/L_2 = \lambda_2$ 的一般情况，但其引入的变换 Q_s 和 I_s 也不满足正则变换条件(见文献[14]中的(7)式)．因为

$$
\begin{aligned}
\{Q_s, I_{s'}\} &= L_1\exp(\lambda_1 t) + L_2\exp(\lambda_2 t) \\
&\neq \delta_{ss'} \qquad (s, s' = 1,2)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

不满足(7)式，由此也得不出类似于(10)式的结果．所以，Q_s 和 $I_{s'}$ 是否为正则共轭变量也值得讨论．

鉴于上述情况，我们针对 RLC 耦合电路提出一种一般的正则变换[16]

$$
\begin{aligned}
Q_i &= q_i \exp\left(\frac{1}{2}\lambda_i t\right), \\
P_i &= L_i \dot{Q}_i \exp(-\lambda_i t) \\
&= \left(p_i + \frac{1}{2}R_i q_i\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_i t\right),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

式中 $\lambda_i = R_i/L_i\,(i = 1,2,\cdots)$．不难证明该变换满足正则变换条件(7)式，即

$$
\begin{aligned}
\{Q_i, Q_j\} &= \{P_i, P_j\} = 0, \\
\{Q_i, P_j\} &= \delta_{ij}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

将这种新的变换(13)式代入(1)式可得

$$
L_1\ddot{Q}_1 + \left(\frac{1}{C_1'} - \frac{R_1^2}{4L_1}\right)Q_1
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{C}Q_2\exp\left[\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t\right]\\
&=\varepsilon(t)\exp\left(\frac{1}{2}\lambda_1 t\right),\\
&L_2\ddot{Q}_2+\left(\frac{1}{C_2'}-\frac{R_2^2}{4L_2}\right)Q_2\\
&-\frac{1}{C}Q_1\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t\right]=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

又由(13)式可计算出

$$\dot{Q}_i=\frac{P_i}{L_i}\exp(\lambda_i t),\tag{16}$$

$$\dot{P}_i=L_i\ddot{Q}_i\exp(-\lambda_i t)-R_iQ_i\exp(-\lambda_i t).\tag{17}$$

由此可以验证

$$\frac{\partial\dot{Q}_i}{\partial Q_i}+\frac{\partial\dot{P}_i}{\partial P_i}=0.\tag{18}$$

这表明 Q_i 和 P_i 为正则共轭变量，即表明变换(13)式的合理性.

在(13)式的变换下，(1)式所对应的哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{P_1^2}{2L_1}+\frac{P_2^2}{2L_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_1'}-\frac{R_1^2}{4L_1}\right)Q_1^2\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_2'}-\frac{R_2^2}{4L_2}\right)Q_2^2\\
&-\frac{1}{2C}Q_1Q_2\left\{\exp\left[\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t\right]\right.\\
&\left.+\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)t\right]\right\}\\
&-\varepsilon(t)Q_1\exp\left(\frac{1}{2}\lambda_1 t\right).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

由此可见，当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，(19)式简化为文献[13]的哈密顿量. 根据 Dirac 理论[15]，经典 Poisson 括号应代之为

$$\{A,B\}\to\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}(AB-BA)=\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[A,B].\tag{20}$$

所以，正则条件(14)式转化为如下对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[Q_i,P_j]=\mathrm{i}\hbar,\\
&[Q_i,Q_j]=[P_i,P_j]=0\qquad(i,j=1,2).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

3. 介观耗散电容耦合电路的量子化

把(19)式量子化就意味着将经典变量 Q_i 和 P_i 表示为算符. 为了简便，引入如下参数：

$$
\begin{aligned}
\xi_1&=1/C_1'-R_1^2/(4L_1),\\
\xi_2&=1/C_2'-R_2^2/(4L_2),\\
\gamma(t)&=\{\exp[(\lambda_1-\lambda_2)t/2]\\
&\quad+\exp[-(\lambda_1-\lambda_2)t/2]\},\\
\varepsilon'(t)&=\varepsilon(t)\exp(\lambda_1 t/2),
\end{aligned}
$$

因此(19)式化为

$$
\begin{aligned}
H=&\frac{P_1^2}{2L_1}+\frac{P_2^2}{2L_2}+\frac{1}{2}\xi_1Q_1^2+\frac{1}{2}\xi_2Q_2^2\\
&-\frac{1}{2C}\gamma(t)Q_1Q_2-\varepsilon'(t)Q_1,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

即为两个耦合振子的哈密顿量. 为了除耦合(对角化)，引入如下幺正算符[13]：

$$U=\iint|AQ\rangle\langle Q|\mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2.\tag{23}$$

这里

$$
\begin{aligned}
A&=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},\\
|Q\rangle&=\left|\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}\right\rangle\\
&=|Q_1,Q_2\rangle=|Q_1\rangle|Q_2\rangle,\\
A_{11}&=B\cos(\varphi/2),\\
A_{12}&=B\sin(\varphi/2),\\
A_{21}&=-B^{-1}\sin(\varphi/2),\\
A_{22}&=-B^{-1}\cos(\varphi/2),\\
B&=(L_1/L_2)^{1/4},\\
\tan\varphi&=2/[C(\lambda_1B^2-\lambda_2B^{-2})],
\end{aligned}
\tag{24}
$$

式中 $|Q_i\rangle(i=1,2)$ 是坐标本征态. 容易证明[13]

$$
\begin{aligned}
U^{-1}Q_1U&=A_{11}Q_1+A_{12}Q_2,\\
U^{-1}Q_2U&=A_{21}Q_1+A_{22}Q_2,\\
U^{-1}P_1U&=A_{22}P_1-A_{21}P_2,\\
U^{-1}P_2U&=-A_{12}P_1+A_{11}P_2.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

利用(23)—(25)式，可得

$$
\begin{aligned}
H'&=U^{-1}HU\\
&=\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+\frac{1}{2}m_1\omega_1^2Q_1^2+\frac{1}{2}m_2\omega_2^2Q_2^2\\
&\quad-\frac{\gamma(t)}{2C}(A_{11}A_{21}Q_1^2+A_{12}A_{22}Q_2^2)\\
&\quad-\varepsilon'(t)(A_{11}Q_1+A_{12}Q_2),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m_1}&=\frac{A_{22}^2}{L_1}+\frac{A_{12}^2}{L_2},\\
\frac{1}{m_2}&=\frac{A_{21}^2}{L_1}+\frac{A_{11}^2}{L_2},\\
\omega_1^2&=\left(\frac{A_{22}^2}{L_1}+\frac{A_{11}^2}{L_2}\right)(\xi_1A_{12}^2+\xi_2A_{21}^2),
\end{aligned}
$$

$$\omega_2^2 = \left(\frac{A_{21}^2}{L_1} + \frac{A_{11}^2}{L_2}\right)(\xi_1 A_{12}^2 + \xi_2 A_{22}^2). \quad (27)$$

显然，这里的 ω_i^2 与文献[13]中的(24)，(25)式不同，相差一常数项. 由(21)式可以构造如下非厄米算符：

$$a_j = \sqrt{\frac{m_j\omega_j}{2\hbar}}\left(Q_j + \frac{\mathrm{i}}{m_j\omega_j}P_j\right),$$
$$a_j^+ = \sqrt{\frac{m_j\omega_j}{2\hbar}}\left(Q_j - \frac{\mathrm{i}}{m_j\omega_j}P_j\right) \quad (j = 1,2), \quad (28)$$

并满足对易关系

$$[a_j, a_k^+] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk},$$
$$[a_j, a_k] = [a^+, a_k^+] = 0 \quad (j,k = 1,2). \quad (29)$$

所以，(26)式最终化为

$$H' = \hbar\omega_1\left(a_1^+ a_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(a_2^+ a_2 + \frac{1}{2}\right) + \gamma_1(t)(a_1 + a_1^+)^2 + \gamma_2(t)(a_2 + a_2^+)^2 + \beta_1(t)(a_1 + a_1^+) + \beta_2(t)(a_2 + a_2^+), \quad (30)$$

式中

$$\gamma_1(t) = -\frac{\hbar A_{11}A_{21}}{4Cm_1\omega_1}\gamma(t),$$
$$\gamma_2(t) = -\frac{\hbar A_{12}A_{22}}{4Cm_2\omega_2}\gamma(t),$$
$$\beta_1(t) = -A_{11}\varepsilon'(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m_1\omega_1}},$$
$$\beta_2(t) = -A_{12}\varepsilon'(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2m_2\omega_2}}. \quad (31)$$

将(30)式与文献[13]中的对角化哈密顿量(29)式比较可见，引入一般的正则变换后多了非线性项，其系数与线性项的系数类似，也是两个回路参数的函数.

4. 介观耗散电容耦合电路的量子涨落

如果仍然采用文献[13]的方法来研究量子涨落，文献[13]中的(31)—(39)式基本上可以借用，所不同的是这些公式中的 ω_i^2 与本文的相差一常数项，而与 H' 相应的时间演化算子 $U_s(t,0)$(文献[13]中的(40)式)将增加一非线性项，因此系统的波函数

$$|\psi(t)\rangle = UU_s(t,0)|00\rangle$$

将随之发生变化.

Fock 空间中的坐标本征态为[13]

$$|Q_i\rangle = \left(\frac{m_i\omega_i}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m_i\omega_i}{2\hbar}Q_i^2 + \sqrt{\frac{2m_i\omega_i}{\hbar}}Q_i a_i^+ - \frac{1}{2}a_i^{+2}\right)|0\rangle_i,$$
$$(i = 1,2), \quad (32)$$

将(32)式代入(23)式，并应用有序算符内的积分技术[13,17]对(23)式积分，得 U 的正规乘积形式

$$U = \iint |A_{11}Q_1 + A_{12}Q_2, A_{21}Q_1 + A_{22}Q_2\rangle \times \langle Q_1, Q_2|\mathrm{d}Q_1\mathrm{d}Q_2$$
$$= \sqrt{\frac{4m_1m_2\omega_1\omega_2}{\hbar^2\Delta}}\exp(\sigma_1 a_1^{+2} - \sigma_1 a_2^{+2} + \sigma_2 a_1^+ a_2^+)$$
$$\times :\exp(\Gamma_1 a_1^+ a_1 + \Gamma_1 a_2^+ a_2 + \Gamma_2 a_1^+ a_2 - \Gamma_2 a_2^+ a_1):\exp(\tau_1 a_1^2 - \tau_1 a_2^2 + \tau_2 a_1 a_2), \quad (33)$$

式中“: :”为正规乘积符号，参数表达式与文献[13]中相应的表达式完全相同.

但是，在 Schrödinger 绘景中与 H' 相应的时间演化算符为[18]

$$U_s(t,t_0) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t H'\mathrm{d}t\right], \quad (34)$$

如果在 $t_0 = 0$ 将(30)式代入上式，忽略一个相因子并使其对角化后可得

$$U_s(t_0,0) = \exp\Big[-\mathrm{i}(\omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2)t - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(a_1^+ a_1\chi_1 + a_1 a_1^+\chi_1 + a_2^+ a_2\chi_2 + a_2 a_2^+\chi_2)\Big]$$
$$\times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\zeta_1^* a_1^{+2} + \zeta_1 a_1^2 + \zeta_2^* a_2^{+2} + \varepsilon_2 a_2^2)\right]$$
$$\times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\eta_1^* a_1^+ + \eta_1 a_1 + \eta_2^* a^2 + \eta_2 a_2)\right], \quad (35)$$

式中

$$\zeta_j(t) = \int_0^t \gamma_j(\tau)\exp(-2\mathrm{i}\omega_j\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$\eta_j(t) = \int_0^t \beta_j(\tau)\exp(-\mathrm{i}\omega_j\tau)\mathrm{d}\tau,$$
$$\chi_j(t) = \int_0^t \gamma_j(\tau)\,d\tau.$$

显然，(35)式较之文献[13]中的(40)式增加了非线性项(即第一个因子中的 χ_j 项及第二个因子)，这必然引起任意本征态下新的量子效应.

假定初始时刻系统处于双模真空态 $|00\rangle$，则系

统的波函数为

$$|\psi(t)\rangle = UU_s(t,0)|00\rangle. \tag{36}$$

考查 $t = \rho \to 0$，外部电源接通随即断开，此时 $U_s(t,0) = 1$，则系统的基态为一转动的压缩真空态

$$|\psi(t=\rho)_{\rho\to 0}\rangle = U|00\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{4m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}{\hbar^2 \Delta}} \exp[(a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1)\theta]$$
$$\times \exp[\nu(a_2^{+2} - a_1^{+2})]|00\rangle, \tag{37}$$

式中

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{\sigma_2}{2\sigma_1}\right),$$
$$\nu = \sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 \cot\theta. \tag{38}$$

这里的 $\exp[(a_1^+ a_2 - a_2^+ a_1)\theta]$ 是一个转动算符. 这一结果形式上与文献[13]中的(43)式相同，所以相应的量子涨落表达式形式上也相同(参见文献[13]中的(45)—(48)式)，但其中的 ω_i 不同于文献[13]. 由(13)式可得，在上述条件下的量子涨落为

$$\langle(\Delta q_1)^2\rangle = \langle(\Delta Q_1)^2 \exp(-\lambda_1 t)\rangle,$$
$$\langle(\Delta q_2)^2\rangle = \langle(\Delta Q_2)^2 \exp(-\lambda_2 t)\rangle,$$
$$\langle(\Delta q_1)^2\rangle = \langle(\Delta P_1)^2 \exp(\lambda_1 t)\rangle - \frac{R_1^2}{4}\langle(\Delta Q_1)^2\rangle \exp(-\lambda_1 t),$$
$$\langle(\Delta q_2)^2\rangle = \langle(\Delta P_2)^2 \exp(\lambda_2 t)\rangle - \frac{R_2^2}{4}\langle(\Delta Q_2)^2\rangle \exp(-\lambda_2 t). \tag{39}$$

这一结果与文献[13]截然不同，文献[13]中只有第一项依赖于回路参数，而本文的结果是所有的量子涨落都呈指数地依赖于回路参数 $\lambda_i = R_i/L_i$ ($i = 1, 2$). 这一现象值得进一步研究.

5. 结 论

本文在分析近期文献中介观耗散电容耦合电路量子化已有正则变换的基础上，提出一种新的一般正则变换，并证明了这种变换的正确性和合理性. 用这种正则变换研究了一般介观耗散电容耦合电路的量子化问题，并通过幺正变换使系统哈密顿量对角化，发现新的变换使哈密顿量中多出了一非线性项. 在此基础上给出了系统的态矢量随时间的演化规律，研究了系统中电荷和广义电流的量子涨落，得出其依赖于回路参数的新结果. 如果继续研究任意本征态下的量子涨落，势必出现新的量子效应. 同时，这种正则变换可推广到多回路的 RLC 耦合电路，所以对研究介观 RLC 多回路耗散系统的量子涨落、量子噪声等具有一定的意义.

[1] Buot F A 1993 *Phys*. *Rep*. **224** 73

[2] Konwenhoven L P, Johnson A T, Vaart N C, Harmans C J P M, Foxon C T 1991 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **67** 1626

[3] Averin D V, Nazarov Y V 1992 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **69** 1993

[4] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)

[5] Li Y Q, Chen B 1996 *Phys*. *Rev*. B **53** 4027

[6] Flores J C, Utreras-Diaz C A 2002 *Phys*. *Rev*. B **66** 153410

[7] Ji Y H, Luo H M, Ouyang C Y, Lei M S 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 720

[8] Wang J S, Feng J, Zhan M S 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯 健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]

[9] Chen B, Li Y Q, Fang H, Jiao Z K, Zhang Q R 1995 *Phys*. *Lett*. A **205** 121

[10] Luo H M, Liu G, Xu L, Ji Y H 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 1766

[11] Liang M L, Yuan B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 978 (in Chinese) [梁麦林、袁 兵 2003 物理学报 **52** 978]

[12] Long C Y, Liu B, Wang X F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 159 (in Chinese) [龙超云、刘 波、王心福 2002 物理学报 **51** 159]

[13] Song T Q 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1352 (in Chinese) [宋同强 2004 物理学报 **53** 1352]

[14] Qiu S Y, Cai S H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 816 (in Chinese) [邱深玉、蔡绍洪 2006 物理学报 **55** 816]

[15] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* (Vol. Ⅱ) (3rd ed) (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学 (卷Ⅱ) (第3版) (北京:科学出版社)]

[16] Peng H W 1980 *Acta Phys*. *Sin*. **29** 1084 (in Chinese) [彭桓武 1980 物理学报 **29** 1084]

[17] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Shanghai: Scientific and Technical Publishers) (in Chinese) [范洪义 1997 量子力学表象与变换论 (上海:上海科学技术出版社)]

[18] Peng J S, Li G X 1996 *An Introduction of Latter-day Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p5 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近现代量子光学导论(北京:科学出版社)第5页]

Canonical transformation of quantization for mesoscopic capacity-coupled dissipative circuit *

Xie Yue-Xin[1)2)] Li Zhi-Jian[3)] Zhou Guang-Hui[1)†]

1)(*College of Physics and Information Science*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)

2)(*Department of Physics*, *Xiangnan College*, *Chenzhou* 423000, *China*)

3)(*Department of Physics and Electronics*, *Hunan First Normal School*, *Changsha* 410002, *China*)

(Received 25 January 2007; revised manuscript received 6 July 2007)

Abstract

We propose a general canonical transformation for mesoscopic capacity-coupled dissipative *RLC* circuit and prove its feasibility and correctness. Using this transformation, the quantization of a double-loop capacity-coupled dissipation circuit is studied, and the diagonalized Hamiltonian of the system has an additional nonlinear term which has not been reported in literature. This general canonical transformation may have physical significance for the study of quantum fluctuation and quantum noise in the multiple-loop coupled dissipative circuits.

Keywords: *RLC* circuit, quantization, canonical transformation

PACC: 7335, 4250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant Nos. 06JJ2097, 06JJ4003).

† Corresponding author. E-mail: ghzhou@hunnu.edu.cn