

立方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质 研究及其解模式的漂移*

罗香怡 刘学深[†] 丁培柱

(吉林大学原子与分子物理研究所, 长春 130012)

(2006 年 4 月 26 日收到, 2006 年 6 月 7 日收到修改稿)

采用辛算法数值求解一维立方非线性 Schrödinger 方程, 研究了随着非线性参数的变化立方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质和解的模式漂移. 数值结果表明, 随着非线性参数的增加解模式的漂移速度越来越快.

关键词: 动力学性质, 相轨线, 解模式的漂移, 辛算法

PACC: 0200, 8220W

1. 前 言

非线性 Schrödinger 方程是物理学中的一个重要模型, 可以描述许多物理过程, 例如: 激光聚变、玻色-爱因斯坦凝聚、等离子体物理、非线性光学、分子动力学、流体力学等等^[1-7]. 近年来关注的焦点之一是非线性动力学行为的研究, 已经发现了许多有趣的现象^[8-12]. Zhou^[8]等讨论了一般非线性 Schrödinger 方程在一维和二维空间中随着非线性项变化的时空性质. Moon^[11]阐明了在非线性 Schrödinger 方程中同宿轨道和相干模式之间的关系, 并且指出如果在初值中增加一个微扰项则会出现不规则的同宿轨道. Tan 和 Mao^[12]应用数值方法发现解的两种模式漂移运动, 应用微扰的方法阐明了了解的漂移模式在非线性 Schrödinger 方程中是普遍的现象. 我们^[13, 14]曾应用辛算法研究了立方非线性 Schrödinger 方程随着非线性参数变化的动力学行为, 观察到了同宿轨交叉、准周期运动、伪周期运动、不规则运动以及随机运动, 但采用高精度格式进行计算时, 不规则运动随之消失.

自从 Feng^[15]提出了求解哈密顿系统的辛算法之后, 人们对辛和多辛算法及其应用进行了系统的研究^[16-18]. Sanz-Serna 研究了辛 Runge-Kutta 方法, Yoshida 提出了构造可分哈密顿系统辛格式的对称

幂方法等等. 目前辛算法已广泛应用于许多学科领域, 并且取得了很好的成果. 非线性 Schrödinger 方程可以转化成哈密顿形式, 具有辛结构, 它的时间演化是辛变换的演化, 辛算法是求解非线性 Schrödinger 方程的合理的数值方法. 本文我们应用辛算法数值求解一维立方非线性 Schrödinger 方程, 阐明了随着非线性参数变化时一维立方非线性 Schrödinger 方程的基本的动力学性质及其解模式的漂移, 并说明了随着非线性参数的增加, 漂移速度越来越快.

2. 求解一维立方非线性 Schrödinger 方程的辛算法

一维立方非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + q |E|^2 E = 0, \quad (1)$$

可以用来描述许多物理过程. 在非线性光学中, 函数 $E(x, t)$ 的意义是电磁场的一个复杂包络^[4]; 在玻色-爱因斯坦凝聚理论研究中一个重要的数学模型, 即 Gross-Pitaevskii 方程^[5], 也具有非线性 Schrödinger 方程的形式. 在等离子体物理中, 描述了电子(朗缪尔)波^[7]. 在(1)式中, $E(x, t)$ 是复函数表示波函数, $q |E|^2 E$ 是立方非线性项, q 是立方非线性参数, 表示非线性作用的强弱.

考虑周期边界条件

* 国家自然科学基金(批准号: 30574057, 10571074)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20050183010)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: liuxs@jlu.edu.cn

$$E(x, t) = E(x + L, t), \quad (2)$$

其中 L 是周期长度. 我们把复函数 $E(x, t)$ 分成实部和虚部

$$E(x, t) = u(x, t) + i v(x, t), \quad (3)$$

为了提高空间的离散精度, 用下面的六阶空间差分近似代替二阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{180h^2} (2u_{j-3} - 27u_{j-2} + 270u_{j-1} - 490u_j \\ &\quad + 270u_{j+1} - 27u_{j+2} + 2u_{j+3}), \\ \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{180h^2} (2v_{j-3} - 27v_{j-2} + 270v_{j-1} - 490v_j \\ &\quad + 270v_{j+1} - 27v_{j+2} + 2v_{j+3}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$S = \frac{1}{180h^2} \begin{bmatrix} -490 & 270 & -27 & 2 & \dots & 0 & 2 & -27 & 270 \\ 270 & -490 & 270 & -27 & 2 & \dots & 0 & 2 & -27 \\ -27 & 270 & -490 & 270 & -27 & 2 & \dots & 0 & 2 \\ 2 & -27 & 270 & -490 & 270 & -27 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 & -27 & 270 & -490 & 270 & -27 & 2 \\ 2 & 0 & \dots & 2 & -27 & 270 & -490 & 270 & -27 \\ -27 & 2 & 0 & \dots & 2 & -27 & 270 & -490 & 270 \\ 270 & -27 & 2 & 0 & \dots & 2 & -27 & 270 & -490 \end{bmatrix}$$

立方非线性 Schrödinger 方程可以转化成哈密顿正则方程的形式 (6), 因此可用辛算法数值求解. 本文中我们用如下的四阶隐式辛 Runge-Kutta 方法:

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + \frac{\tau}{2} (F(Y_1) + F(Y_2)), \\ Y_1 &= z^n + \tau \left(\frac{1}{4} F(Y_1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \sqrt{3} \right) F(Y_2) \right), \\ Y_2 &= z^n + \tau \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \sqrt{3} \right) F(Y_1) + \frac{1}{4} F(Y_2) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

其中 τ 是时间步长且 $\tau > 0$. 因为辛格式 (7) 是隐格式所以对每一个时间步我们都用自恰迭代的方法求解.

3. 随着非线性参数变化立方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质

非线性 Schrödinger 方程 (1) 具有齐次解

$$E_h(x, t) = \Psi_0 e^{iq|\Psi_0|^2 t}, \quad (8)$$

其中 Ψ_0 是实常数. 让齐次解在 $t = 0$ 处受到一个小的扰动得到求解立方非线性 Schrödinger 方程的如下

则立方非线性 Schrödinger 方程 (1) 可以离散成哈密顿函数为

$$H(u, v) = \frac{1}{2} (u^T, v^T) G \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{q}{4} \sum_{i=1}^N (u_i^2 + v_i^2)^2, \quad (5)$$

的有限维哈密顿正则方程

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= J^{-1} \frac{\partial H}{\partial z} = J^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial v} \right)^T \\ &= F(z), \end{aligned} \quad (6)$$

其中空间步长 $h = L/N$, N 是充分大的正整数, $z = (u, v)^T$, u 和 v 是由不同的空间点所组成的列向量,

矩阵 $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ 是标准辛矩阵, $G = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$,

的初始条件:

$$E(x, 0) = \Psi_0 + \epsilon \Psi_0 (\cos(kx) + i0.5 \sin(kx)), \quad (9)$$

ϵ 是一个小的实参数, k 是波数, 在计算中我们取 $\epsilon = 0.01$, $\Psi_0 = 2$, $k = 0.9k_0$, $k_0 = \sqrt{2} \Psi_0$ 对于调制不稳定性是一个关键的波数^[12]. 空间步长 $h = L/N = 2\pi/N$, 最大的正整数 $N = 30$, 时间步长 $\tau = 0.001$, 计算时间从 $t = 0$ 到 $t = 10^3$.

为了分析立方非线性 Schrödinger 方程 (1) 在长时间演化中的动力学性质, 我们建立相空间 (A, A_t) , A 和 A_t 定义如下^[11]:

$$\begin{aligned} A(L/2, t) &= |E(L/2, t)| - 2, \\ A_t(L/2, t) &= \frac{dA(L/2, t)}{dt}. \end{aligned} \quad (10)$$

本文计算中非线性参数 q 的取值范围为 0.01—0.85. 图 1—4 给出了不同非线性参数下立方非线性 Schrödinger 方程的数值结果(相轨迹、 $|A(L/2, t)|$ 的时间演化以及对应的傅里叶谱). 从图 1—4 中我们可以看到随着非线性参数 q 的增加相轨线呈现出有趣的现象. 当 q 从 0.01 增大到 0.8 附近时, 相轨

线是椭圆轨道,但椭圆轨道由薄逐渐变厚,此时相轨线依然是有规则的运动.相轨线在横轴的值随着 q 的增大逐渐增大.从图 1(a)中可看出,当 $q = 0.01$ 时,相轨线是很薄的椭圆轨道,横轴的取值范围大约是 $-0.02 \sim 0.02$,相轨迹是精确的循环运动,相空间中的原点 $(A, A_t) = (0, 0)$ 是椭圆点. $|A(x, t)|$ 的振幅在 $x = L/2$ 处随时间周期演化(图 1(b)).从 $|A(L/2, t)|$ 与对应时间的傅里叶变化谱看到在相等的频率间隔内出现一个孤立的峰,其中图 1(c)中的小图是约在频率为 3 附近的放大图.当 $q = 0.78$ 时,相轨线变成很厚的椭圆轨道(图 1(d)),横轴的取值范围大约是 $-0.05 \sim 0.05$,此时相轨迹不再是精确的循环运动,相空间中的轨迹对应着准周期解. $|A(x, t)|$ 的振幅在 $x = L/2$ 处随时间准周期演化.从与 $|A(L/2, t)|$ 对应的傅里叶谱可知(图 1(f)),孤立的峰也不是出现在频率相等的间隔内.

当 $q = 0.8$ 时,相轨线(图 2(a))变成了更厚的椭圆轨道,横轴的取值范围大约是 $-0.09 \sim 0.09$,从图 2(a)中可看出相轨线是由一些有规则的线盘绕而成. $A(L/2, t)$ 与对应时间的傅里叶谱可看出前三个孤立的峰出现在几乎相等的频率间隔内,第四个峰频率间隔则不等.这说明存在一个准周期循环解. $|A(x, t)|$ 的振幅在 $x = L/2$ 处随时间的演化是准周期的(图 2(b)).当继续增加非线性参数 q 到 0.81

时,相轨迹沿着椭圆的长轴与短轴的平分线处的四个方向向外扩张,相轨线几乎充满了椭圆内部(图 2(d)).横轴的取值范围大约是 $-0.2 \sim 0.2$.此时相轨线随时间演化是有规则的准周期循环运动, $A(L/2, t)$ 与时间对应的傅里叶变换谱能够看到峰值出现在等频率间隔内,但是在每个峰值附近出现了一些分频谐波.从图 2中可以看出,当 $q = 0.8$ 和 $q = 0.81$ 时, $|A(x, t)|$ 的振幅在 $x = L/2$ 处随时间演化的循环周期是不同的.

当非线性参数 $q = 0.82$ 时,相空间中的轨迹(图 3)将沿着 $A(L/2, t) = 0$ 轴向原点 $(0, 0)$ 收缩,但并没有收缩到与原点重合.相轨迹在横轴上的值继续增大.当 q 增大到 0.85 时,相轨线(图 4)向内收缩到几乎与原点重合.相轨线类似于许多大小不同的同宿轨道有规则的套在一起,仍然可以看出是有规则的运动.点 $(0, 0)$ 相当于同宿轨道的鞍点.相轨迹由椭圆变成了有规则的大小不一的同宿轨.从图 2—4 中的 $|A(L/2, t)|$ 的时间演化以及对应的傅里叶谱也可看出系统具有准周期循环解.

从以上分析,我们可知具有周期边界条件的立方非线性 Schrödinger 方程在初始条件(9)式下,当非线性参数取值从 0.01 增加到 0.85 时,相轨迹在横轴上的值逐渐增大,相轨迹由椭圆轨道变成同宿轨道,系统的运动由精确的周期循环到准周期循环.

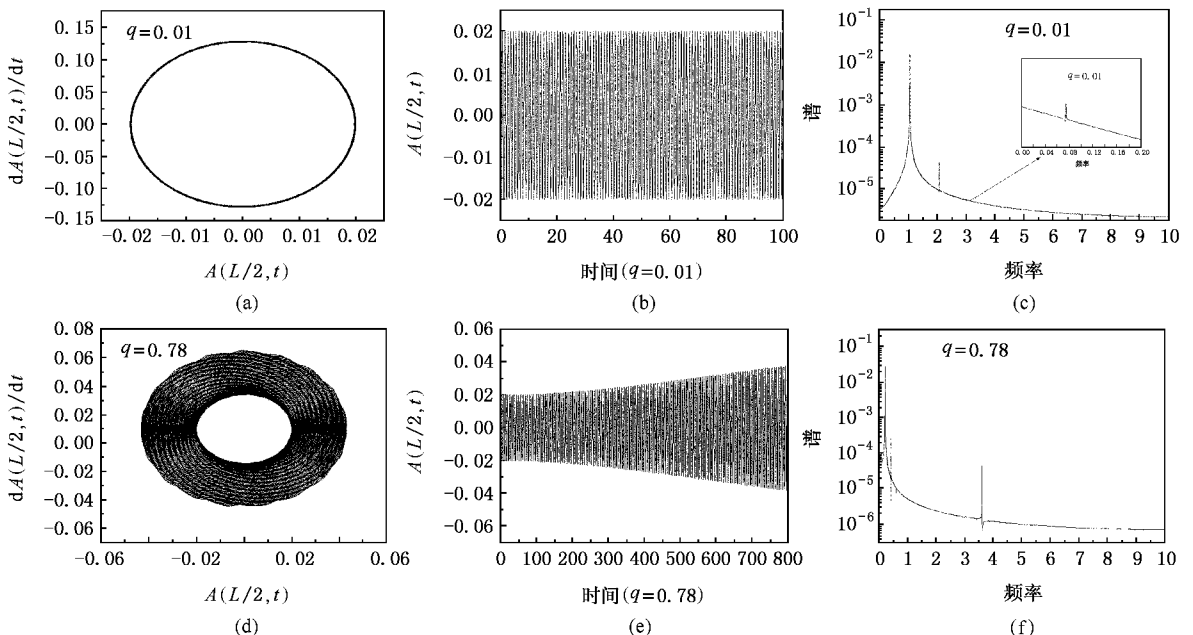


图 1 当 $q = 0.01$ 和 $q = 0.78$ 时立方非线性 Schrödinger 方程的数值结果 (a)(d)是相轨迹 (b)(e)是场的振幅在 $x = L/2$ 处的时间演化;(c)(f)是 $A(L/2, t)$ 的傅里叶谱

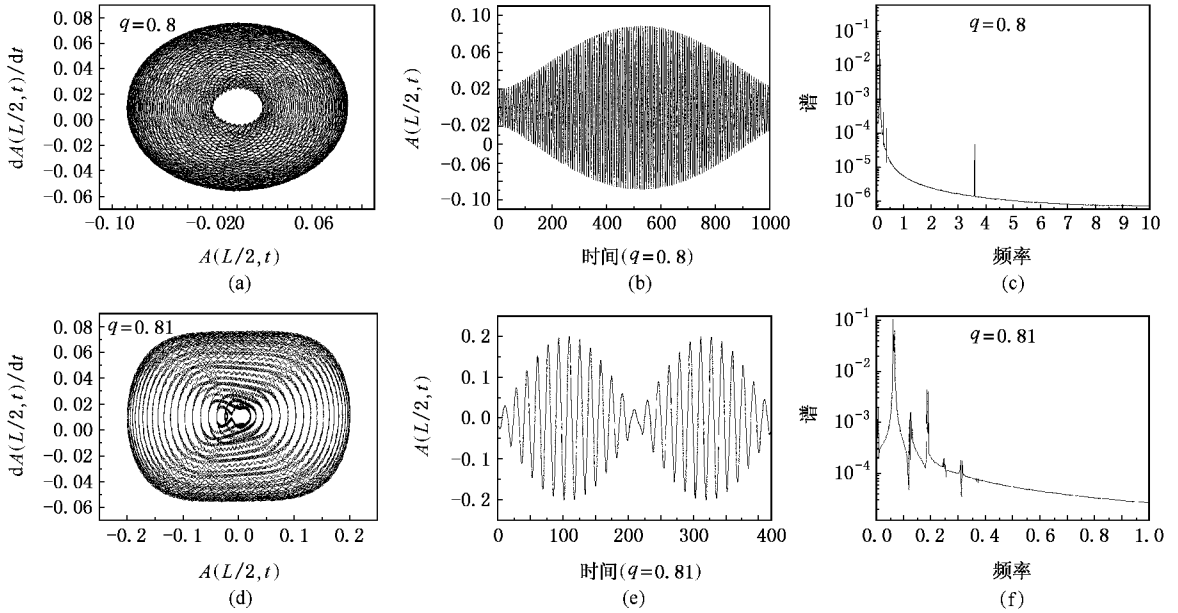


图 2 当 $q=0.8$ 和 $q=0.81$ 时立方非线性 Schrödinger 方程的数值结果 (a)(d)是相轨迹 (b)(e)是场的振幅在 $x=L/2$ 处的时间演化 (c)(f)是 $A(L/2, t)$ 的傅里叶谱

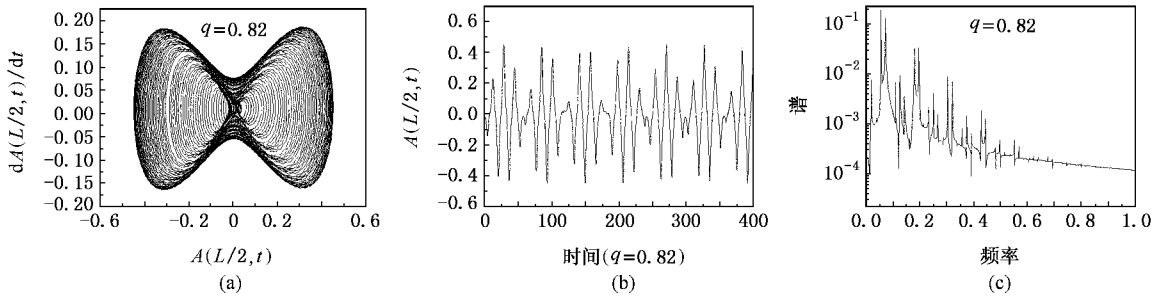


图 3 当 $q=0.82$ 时立方非线性 Schrödinger 方程的数值结果 (a)相轨迹 (b)场的振幅在 $x=L/2$ 处的时间演化 (c) $A(L/2, t)$ 的傅里叶谱

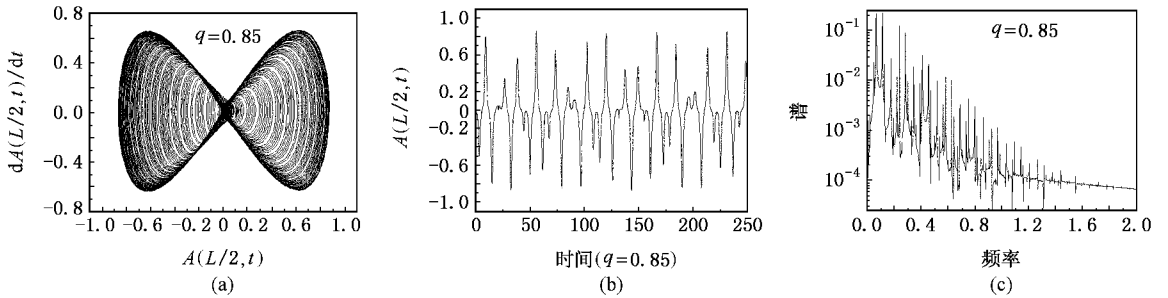


图 4 当 $q=0.85$ 时立方非线性 Schrödinger 方程的数值结果 (a)相轨迹 (b)场的振幅在 $x=L/2$ 处的时间演化 (c) $A(L/2, t)$ 的傅里叶谱

4. 随着非线性参数的变化立方非线性 Schrödinger 方程的解模式的漂移

从文献 [12] 中我们知道只有初始条件对称和反对称模的系数不为零,且系数比为复数时才出现解模式的漂移.我们所用的初始条件满足此条件.为了分析随着非线性参数的变化立方非线性 Schrödinger 方程的解的模式漂移,我们给出了从 $q = 0.01$ 到 $q = 0.85$ 的 $|E(x, t)|^2 = \text{常数}$ 的等高线图(图 5—6).图 5 是 $q = 0.01, q = 0.78, q = 0.8$ 时在相同的时间演化(500)内的等高线图.从图 5(a)中我们看到解模式几乎没出现漂移现象.这说明在时间演化到 500 时解模式的漂移偏离直线的角度特别小,即传

播速度很小.当 $q = 0.78$ (图 5(b))且时间演化到 500 时解模式的漂移偏离直线的角度增大,传播速度增大.当 $q = 0.8$ (图 5(c))时我们看到解模式的漂移偏离直线的角度明显大于图 5(a)和图 5(b).从以上对图 5 的分析可看出,非线性参数越大,解模式的漂移偏离直线就越大,也就是斜率越大.从文献 [12] 中可知漂移速度也就越大.当非线性参数 q 继续增大至 0.81, 0.82 和 0.85 时,时间演化到 40 时的等高线图如图 6 所示.随着非线性参数的增大,在很短的时间演化内,解模式的漂移偏离直线的角度已经很大,即斜率越来越大,说明非线性参数越大,漂移速度越大.总结以上数值结果,我们得到下面的结论:随着非线性参数的增大,漂移速度越来越大.

最后,我们给出在不同的非线性参数下立方非

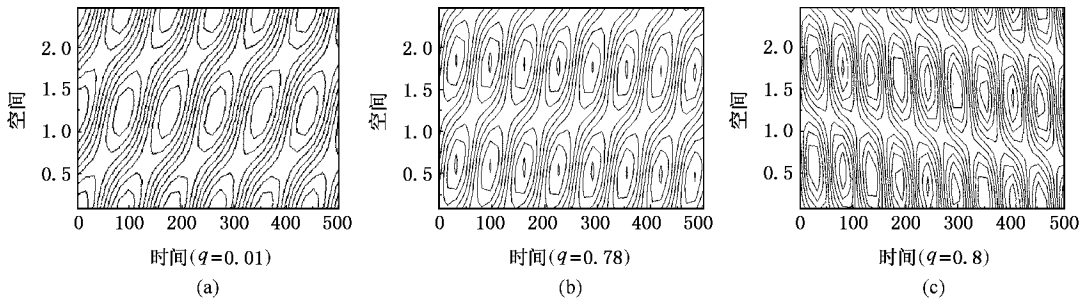


图 5 $|E(x, t)|^2 = \text{常数}$ 的等高线图 (a) $q = 0.01$; (b) $q = 0.78$; (c) $q = 0.8$

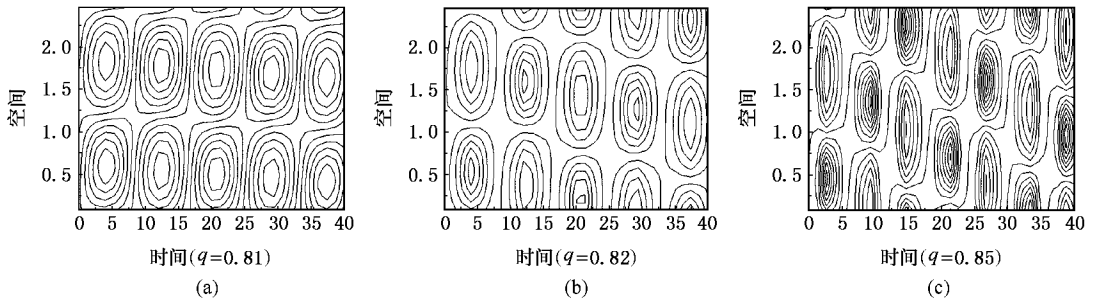


图 6 $|E(x, t)|^2 = \text{常数}$ 的等高线图 (a) $q = 0.81$; (b) $q = 0.82$; (c) $q = 0.85$

线性 Schrödinger 方程的时空演化,如图 7 所示.从图 7 中我们看到时空演化图都是有规则的运动.这说明相轨迹是周期循环运动的,与前面所论述的动力学性质相同.且随着非线性参数的增大出现了明显的漂移现象.从图 7(a)给出的 $q = 0.01$ 的时空演化图中,我们看到是有规则的运动,没有观察到漂移现象.从图 7(b)开始出现了明显的漂移现象,随着非线性参数的增加(图 7(c)(d)),我们可以看到解

模式的漂移在相同时间内偏离越来越大,即漂移速度越来越大.

5. 结 论

采用辛算法数值求解了一维立方非线性 Schrödinger 方程,研究了随着非线性参数的变化立方非线性 Schrödinger 方程的动力学性质以及解模式

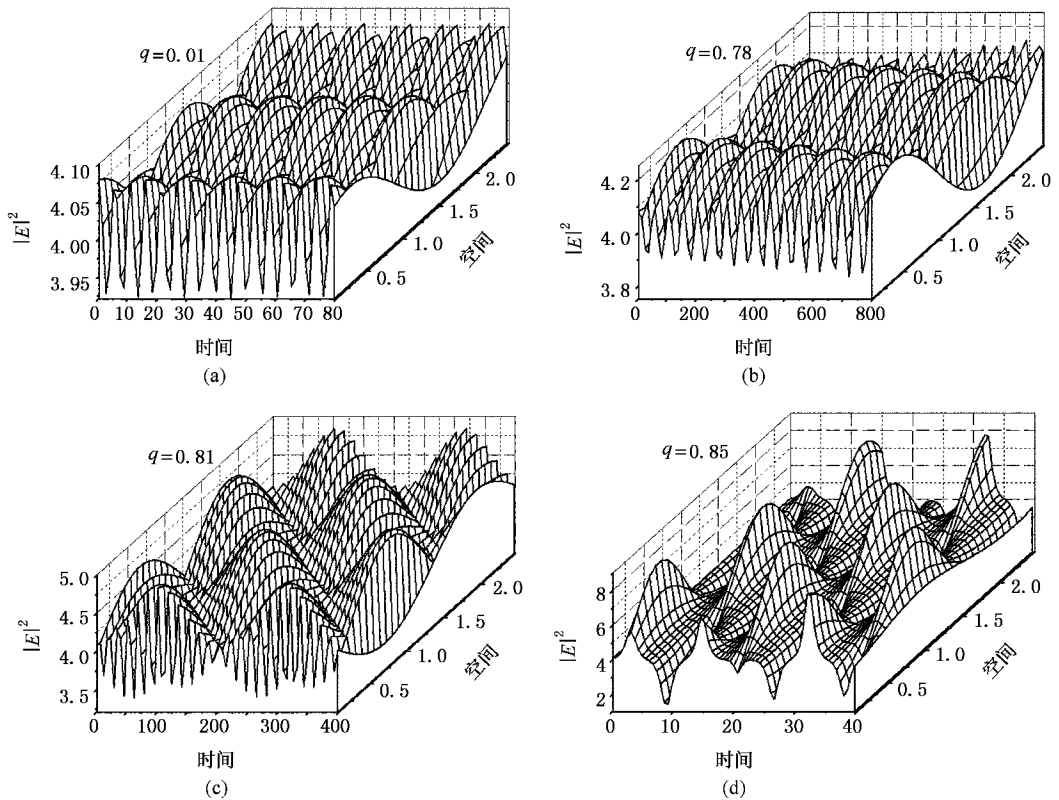


图 7 随着非线性参数变化的时空演化图

的漂移.数值结果表明当 $0.01 \leq q \leq 0.78$ 时,相轨迹由很薄的椭圆轨道变成很厚的椭圆轨道,相轨迹由精确的周期循环运动变成准循环运动.当 $0.78 < q \leq 0.8$ 时,相轨迹沿椭圆长轴与短轴平分线处的四个方向向外扩张,相轨迹对应着准周期循环解.当 $0.8 < q \leq 0.85$ 时,相轨迹沿着 $A(L/2, t) = 0$ 轴向相

空间中的原点 $(A, A_t) = (0, 0)$ 收缩,最后收缩成许多大小不同的同宿轨道套在一起,原点 $(A, A_t) = (0, 0)$ 变成了鞍点,系统仍然是有规则的运动.且随着非线性参数的增大,相轨线在横轴上的值逐渐增大.解模式的漂移速度随着非线性参数的增加越来越快.

- [1] Busch T, Anglin J R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 010401
- [2] Tracy E R, Chen H H, Lee Y C 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 218
- [3] Zhang J F, Xu C Z, He B G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3652 (in Chinese) [张解放、徐昌智、何宝钢 2004 *物理学报* **53** 3652]
- [4] Kelley P L 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 1005
- [5] Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251
- [6] Li H M, Wu F M 2005 *Chin. Phys.* **14** 1069
- [7] He X T 1982 *Acta Phys. Sin.* **31** 1317 (in Chinese) [贺贤士 1982 *物理学报* **31** 1317]
- [8] Zhou C T, He X T, Cai T X 1994 *Phys. Rev. E* **50** 4136
- [9] Zhou C T, He X T 1994 *Phys. Rev. E* **49** 4417
- [10] He X T, Zhou C T 1993 *J. Phys. A* **36** 4123
- [11] Moon H T 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 412
- [12] Tan Y, Mao J M 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 9119
- [13] Liu X S, Ding P Z 2004 *J. Phys. A* **37** 1589
- [14] Liu X S, Wei J Y, Ding P Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 231
- [15] Feng K 1986 *J. Computer Math.* **4** 279
- [16] Zhang S Y, Deng Z C 2005 *Chin. J. of Comput. Mech.* **22** 47 (in Chinese) [张素英、邓子辰 2005 *计算力学学报* **22** 47]
- [17] Sanz-Seran J M, Portillo A J 1996 *Chem. Phys.* **104** 2349
- [18] Yoshida H 1990 *Phys. Lett. A* **150** 262

Dynamic properties and drifting of the solution pattern of cubic nonlinear Schrödinger equation with varying nonlinear parameters^{*}

Luo Xiang-Yi Liu Xue-Shen[†] Ding Pei-Zhu

(*Institute of Atomic and Molecular Physics , Jilin University , Changchun , Jilin 130012 , China*)

(Received 26 April 2006 ; revised manuscript received 7 June 2006)

Abstract

The dynamic properties of one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation and drifting of the solution pattern are investigated numerically by using the symplectic method with different nonlinear parameters in the perturbation initial condition. The numerical simulation illustrates that the system shows different dynamic behaviors with varying nonlinear parameters, but the motion in the phase space is regularly recurrent. The results show that the drifting velocity for the small nonlinear parameter is small. With the nonlinear parameter increasing, drifting velocity of the solution pattern becomes faster at the same time of evolution.

Keywords : dynamic properties , phase space , drifting of the solution pattern , symplectic method

PACC : 0200 , 8220W

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10574057 , 10571074) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20050183010).

[†] Corresponding author. E-mail : liuxs@jlu.edu.cn