第 56 卷 第 2 期 2007 年 2 月
1000-3290/2007/56(02)/0661-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.2,February,2007

非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性和守恒量*

郑世旺[1)†] 贾利群[2)]

1)(商丘师范学院物理与信息工程系,商丘 476000)

2)(江南大学理学院,无锡 214122)

(2006 年 5 月 19 日收到;2006 年 6 月 17 日收到修改稿)

研究了在群的无限小变换下非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性,给出了非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的定义和判据方程.给出了这种 Mei 对称性导致 Lie 对称性的充要条件,通过特殊 Mei 对称性条件下的 Lie 对称性,找到了非完整系统 Tzénoff 方程的 Hojman 守恒量.

关键词:非完整系统,Tzénoff 方程,Mei 对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引 言

通过研究动力学系统的对称性给出系统的守恒量,已成为解决实际问题的一个重要方法,在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位,也是分析力学的一个发展方向.近代出现的利用对称性寻求守恒量的方法主要有:Noether 对称性方法[1—8]、Lie 对称性方法[7—12]和形式不变性方法[8,13—21].Noether 对称性方法是利用系统的 Hamilton 作用量泛函在无限小变换下的不变性寻找系统的守恒量,该守恒量被称为 Noether 守恒量.Lie 对称性方法是利用系统的运动微分方程在无限小变换下的不变性寻找系统的守恒量.形式不变性方法是利用系统的动力学函数在无限小变换下使得动力学方程的形式保持不变,来寻找系统的守恒量,被称为 Mei 对称性方法.文献[22—24]找到了非保守系统 Lutzky 形式的非 Noether 守恒量和非完整系统速度依赖对称性的非 Noether 守恒量,文献[25]得到了求解机电动力系统守恒量的新方法.近年来,Mei 对称性成为研究的一个热点,但是,求 Mei 对称性所对应的守恒量大都借助于动力学系统的 Lagrange 函数或 Hamilton 函数.我们知道,分析力学中有多种运动微分方程,如 Lagrange 方程、Nielsen 方程、Appell 方程和 Tzénoff 方程等,其中 Tzénoff 方程最为简捷,但很少有人研究 Tzénoff 方程的 Mei 对称性.文献[20]研究了完整系统 Appell 方程的 Mei 对称性,最近,文献[21]研究了完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性,给出了完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的定义和判据方程,并通过 Noether 等式求出了 Tzénoff 方程 Mei 对称性所对应的守恒量,但该方法需把 Tzénoff 方程进行 Lagrange 转换,其过程仍较为复杂.本文研究了非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性,给出了非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的定义和判据方程,通过 Tzénoff 方程的 Mei 对称性与 Lie 对称性的关系,找出了非完整系统 Tzénoff 方程的 Hojman 守恒量.该方法不需 Tzénoff 方程的 Lagrange 转换,直接利用非完整系统的 Tzénoff 方程,通过特殊 Mei 对称性条件下的 Lie 对称性,来找出非完整系统 Tzénoff 方程的 Hojman 守恒量.

2. 非完整系统的 Tzénoff 方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s=1,\cdots,n$)来确定,系统的运动受有理想 Chetaev 型非完整约束:

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0.\tag{2}$$

系统的 Tzénoff 函数为

---

* 国家自然科学基金(批准号:10572021,10372053)资助的课题.

† E-mail:hi_zsw@sina.com

$$K=\frac{1}{2}(\ddot{T}-3\ddot{T}_0)-Q_s\ddot{q}_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 T 为系统的动能，$\ddot{T}_0$ 为把 T 中广义速度作为常数时对时间 t 的二阶导数，Q_s 为广义力，则非完整系统在广义坐标下的 Tzénoff 方程为

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad(s=1,\cdots,n).\tag{4}$$

设系统非奇异，可由方程(1)，(4)先求得乘子 $\lambda_\beta=\lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$，可将方程(4) 表示为

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}=\Lambda_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{5}$$

方程(5)中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}.\tag{6}$$

通过(5)和(6)式可求出所有广义加速度

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,\cdots,n).\tag{7}$$

3. 非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性

取时间和坐标的群的无限小变换

$$t^*=t+\Delta t,\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\quad(s=1,\cdots,n),\tag{8}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\tag{9}$$

其中 ε 是一无限小参数，ξ_0，ξ_s 为无限小变换生成元. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*}&=\frac{\mathrm{d}q_s+\varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t+\varepsilon\mathrm{d}\xi_0}\\&=\dot{q}_s+\varepsilon(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)+O(\varepsilon^2),\\\frac{\mathrm{d}^2q_s^*}{\mathrm{d}t^{*2}}&=\ddot{q}_s+\varepsilon[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot}\\&\quad-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}K^*&=K\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right)\\&=K\left(t,\boldsymbol{q},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{\mathrm{d}t^2}\right)\\&\quad+\varepsilon\left\{\frac{\partial K}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial K}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}[(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)^{\cdot}-\ddot{q}_k\dot{\xi}_0]\right\}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_s^*&=\Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\&=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s)+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}f_\beta^*&=f_\beta\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\&=f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(f_\beta)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{13}$$

定义 如果用变换后的 Tzénoff 函数 K^* 代替变换前的函数 K 时，方程(5)的形式保持不变，那么这种不变性称为非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性.

根据定义，非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性可以写成下列形式：

$$\frac{\partial K^*}{\partial \ddot{q}_s}=\Lambda_s^*\quad(s=1,\cdots,n),\tag{14}$$

将(11)，(12)式代入方程(14)，忽略 ε^2 及高阶小项，并利用方程(5)，得到

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}\{X^{(2)}(K)\}=X^{(1)}(\Lambda_s),\tag{15}$$

展开(15)式，并考虑到方程(5)和(7)式的关系，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}\left\{\frac{\partial K}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial K}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\right.\\&\quad\left.+\Lambda_k(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)\right\}\\&=\frac{\partial \Lambda_s}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial \Lambda_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial \Lambda_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\&\quad(k,s=1,\cdots,n).\end{aligned}\tag{16}$$

方程(16)即为非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的判据方程.

非完整约束(1)式在变换(9)式下的不变性归结为约束限制方程

$$X^{(1)}\{f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\}=0\quad(\beta=1,\cdots,g),\tag{17}$$

Chetaev 条件(2)式对虚位移 δq_s 的限制归结为附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\xi_s=0\quad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots,n).\tag{18}$$

命题 1 如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_k 满足判据方程(16)，而且还满足约束限制方程(17)，则相应对称性为非完整系统 Tzénoff 方程的弱 Mei 对称性.

命题 2 如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_k 满足判据方程(16)，而且同时还满足约束限制方程(17)和附加限制方程(18)，则相应对称性为非完整系统 Tzénoff 方程的强 Mei 对称性.

对于完整系统，有 $\Lambda_s=0$，方程(16)自然成为完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的判据方程[21].

4. 非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性为 Lie 对称性的充分必要条件

Lie 对称性是微分方程在群的无限小变换下的一种不变性，根据定义可得非完整系统 Tzénoff 方程 Lie 对称性的判据方程

$$X^{(2)}\left\{\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\right\}=X^{(1)}(\Lambda_s), \tag{19}$$

利用(15)和(19)式，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}[X^{(2)}(K)]-X^{(1)}(\Lambda_s)\\
&-\left\{X^{(2)}\left[\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_s}\right]-X^{(1)}(\Lambda_s)\right\}\\
=&\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial \ddot{q}_s}\xi_0+\frac{\partial^2 K}{\partial q_k\partial \ddot{q}_s}\xi_k\\
&+\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_s\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\
&+\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\
&+\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_s\partial \ddot{q}_k}(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)\\
&+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)\\
&-\left\{\frac{\partial K}{\partial t\partial \ddot{q}_s}\xi_0+\frac{\partial^2 K}{\partial q_k\partial \ddot{q}_s}\xi_k\right.\\
&+\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_s\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\
&\left.+\frac{\partial^2 K}{\partial \ddot{q}_s\partial \ddot{q}_k}(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)\right\}\\
=&\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\
&+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0).
\end{aligned} \tag{20}$$

命题 3　对于非完整系统 Tzénoff 方程的 Mei 对称性为 Lie 对称性的充分必要条件是无限小变换生成元 ξ_0,ξ_k 满足下式：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\\
&+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}(\ddot{\xi}_k-2\alpha_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)=0\\
&(k,s=1,\cdots,n).
\end{aligned} \tag{21}$$

显然，(21)式也是非完整系统 Tzénoff 方程的 Lie 对称性为 Mei 对称性的充分必要条件.

在时间不变的特殊无限小变换下，有 $\xi_0=0$，考虑到$\frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial \ddot{q}_s}=\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}$，则非完整系统 Tzénoff 方程的特殊 Mei 对称性为特殊 Lie 对称性的充分必要条件是无限小变换生成元 ξ_k 满足

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\partial \ddot{\xi}_k}{\partial \ddot{q}_s}=0\quad(k,s=1,\cdots,n). \tag{22}$$

5. 非完整系统 Tzénoff 方程的特殊 Mei 对称性与 Hojman 守恒量

非完整系统 Tzénoff 方程的特殊 Mei 对称性导致 Hojman 守恒量的方法由下述命题给出.

命题 4　如果非完整系统 Tzénoff 方程特殊 Mei 对称性的生成元 ξ_k 满足方程(22)和约束限制方程(17)，且存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{23}$$

则 Tzénoff 方程的 Mei 对称性导致弱 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_k}(\mu\xi_k)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\right)=\mathrm{const}. \tag{24}$$

命题 5　如果非完整系统 Tzénoff 方程特殊 Mei 对称性的生成元 ξ_k 满足方程(22)，而且同时还满足约束限制方程(17)和附加限制方程(18)，且存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$使得(23)式成立，则 Tzénoff 方程的强 Mei 对称性导致(24)式的强 Hojman 守恒量.

6. 应用例子

非完整系统的 Tzénoff 函数和约束方程分别为

$$K=\frac{1}{2}\ddot{q}_1^2+\frac{1}{2}\ddot{q}_2^2, \tag{25}$$

$$f=-t\dot{q}_1+\dot{q}_2=0. \tag{26}$$

试研究该系统的特殊 Mei 对称性和所对应的 Hojman 守恒量.

由非完整系统的 Tzénoff 方程(4)给出

$$\ddot{q}_1=-\lambda t,\ddot{q}_2=\lambda. \tag{27}$$

由(26)和(27)式求得

$$\lambda=\frac{\dot{q}_1}{1+t^2}, \tag{28}$$

(27)式成为

$$\ddot{q}_1=-\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2}=\alpha_1,$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{\dot{q}_1}{1+t^2} = \alpha_2, \tag{29}$$

由(6)式给出

$$\Lambda_1 = -\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2}, \Lambda_2 = \frac{\dot{q}_1}{1+t^2}. \tag{30}$$

把(25)和(30)式代入非完整系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的判据方程(16)式,并取 $\xi_0 = 0$,有

$$-\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_1}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right) + \frac{\dot{q}_1}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_1}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2\right)$$
$$= -\frac{t}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right),$$
$$-\frac{t\dot{q}_1}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right) + \frac{\dot{q}_1}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2\right)$$
$$= -\frac{t}{1+t^2}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1\right), \tag{31}$$

约束限制方程(17)给出

$$-t\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 + \frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 = 0, \tag{32}$$

附加限制方程(18)给出

$$-t\xi_1 + \xi_2 = 0. \tag{33}$$

先不考虑附加限制方程(33),可找到方程(31)(32)的如下解:

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \tag{34}$$

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = (q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2)^2, \tag{35}$$

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}}(q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2). \tag{36}$$

生成元(34)—(36)式都满足式(22),(31)和(32)式,但不满足附加限制方程(18),所以它们既是非完整系统 Tzénoff 方程的特殊弱 Mei 对称性的生成元,也是特殊弱 Lie 对称性的生成元.

条件(23)式给出

$$-\frac{t}{1+t^2} + \frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0, \tag{37}$$

它有如下解:

$$\mu = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

$$\mu = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}(q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2). \tag{39}$$

由生成元(34),(35),(36)式与(38),(39)式组合,可找到 Hojman 守恒量,由(34)和(38)式,利用命题 4,得到平凡守恒量

$$I_H = 0. \tag{40}$$

由(34)和(39)式,利用命题 4,得到守恒量

$$I_H = (q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2)^{-1} = \text{const}. \tag{41}$$

由(35)和(38)式得到守恒量

$$I_H = 2(q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2) = \text{const}. \tag{42}$$

由(35)和(39)式得到守恒量

$$I_H = 3(q_2 - \dot{q}_1 - t\dot{q}_2) = \text{const}. \tag{43}$$

由(36)和(38)式得到守恒量

$$I_H = \dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const}. \tag{44}$$

由(36)和(39)式得到守恒量

$$I_H = 2\dot{q}_1(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = \text{const}. \tag{45}$$

7. 结 论

研究发现,非完整力学系统的 Tzénoff 函数在群的无限小变换下,若生成元 ξ_0,ξ_k 满足我们给出的判据方程(16),那么 Tzénoff 方程就具有 Mei 对称性;如果非完整力学系统 Tzénoff 方程 Mei 对称性的生成元 ξ_k 满足命题 4 和命题 5 的条件,则这种 Mei 对称性将导出 Hojman 守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI** 235

[2] Vujanović B 1986 *Acta Mech.* **65** 63

[3] Liu D 1991 *Sci. in Chin.* **34** 419

[4] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)]

[5] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing:Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)]

[6] Chen X W, Li Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 936

[7] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[8] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[9] Fu J L, Chen L Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 695

[10] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing:Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京:科学出版社)]

[11] Lutzky M 1979 *J. Phys. A:Math. Gen.* **12** 973

[12] Zhang Y，Xue Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 816 (in Chinese)［张毅、薛纭 2001 物理学报 **50** 816］
[13] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **9** 120
[14] Zhang Y，Mei F X 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 936
[15] Fang J H，Yan X H，Chen P S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1561 (in Chinese)［方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561］
[16] Qiao Y F，Zhang Y L，Han G C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1051 (in Chinese)［乔永芬、张耀良、韩广才 2003 物理学报 **52** 1051］
[17] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413 (in Chinese)［罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413］
[18] Mei F X 2003 *J*. *Jiangxi Norm*. *Univ*. **27** 193
[19] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)［梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量（北京 北京理工大学出版社）］
[20] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177
[21] Zheng S W，Jia L Q，Yu H S 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 1399
[22] Fu J L，Chen L Q 2003 *Phys*. *Lett*. A **317** 255
[23] Zheng S W，Tang Y F，Fu J L 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 243
[24] Fu J L，Chen L Q，Yang X D 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 287
[25] Zheng S W，Fu J L，Li X H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5511 (in Chinese)［郑世旺、傅景礼、李显辉 2005 物理学报 **54** 5511］

Mei symmetry and conserved quantity of Tzénoff equations for nonholonomic systems*

Zheng Shi-Wang[1)†] Jia Li-Qun[2)]
1) (*Department of Physics and Information Engineering*, *Shangqiu Teachers College*, *Shangqiu* 476000, *China*)
2) (*College of Science*, *Southern Yangtze University*, *Wuxi* 214122, *China*)
(Received 19 May 2006; revised manuscript received 17 June 2006)

Abstract

The Mei symmetry of Tzénoff equations for nonholonomic systems under the infinitesimal transformation of groups is studied in this paper. The definition and the criterion equations of the symmetry are given. If the symmetry is a Lie symmetry, then the Hojman conserved quantity of the Tzénoff equation can be obtained by the Mei symmetry.

Keywords: nonholonomic system, Tzénoff equations, Mei symmetry, conserved quantity
PACC: 0320

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10572021, 10372053).
† E-mail: hi_zsw@sina.com