

# 基于分形自仿射的混沌时间序列预测<sup>\*</sup>

贺 涛<sup>†</sup> 周正欧

(电子科技大学电子工程学院, 成都 610054)

(2006 年 5 月 31 日收到, 2006 年 7 月 10 日收到修改稿)

从混沌与分形的关系出发, 基于奇怪吸引子的分形结构和时间序列的自仿射特性, 提出了一种混沌时间序列的预测方法. 采用迭代函数系统跟踪混沌的局部运动轨迹, 由此确定统计意义上仿射性能最优的时间序列段, 并根据吸引子定理和拼贴定理建立预测模型. 以 Mackey-Glass 混沌系统、脑电信号和 Lorenz 混沌系统等三种混沌系统为例进行预测试验, 结果表明本方法能对混沌时间序列进行准确预测, 且对混沌时间序列先验知识要求少, 具有广泛的实用性.

关键词: 自仿射, 迭代函数系统, 混沌时间序列, 预测

PACC: 0545

## 1. 引 言

由于内在的非线性动力学特性, 混沌系统不可长期预测. 但其确定性结构决定了系统运动轨迹短期内发散较小, 因此利用观察资料进行短期预测是可能的<sup>[1]</sup>. 混沌信号的预测在电子对抗、生物医学信号的检测和压缩传输、多径环境中 DOA 估计、复杂环境中的信号分离以及混沌保密通信的破译等领域都有重要的应用<sup>[2,3]</sup>.

人们对混沌时间序列的预测方法进行了大量的研究. 基于 Takens 定理, 在吸引子相似的意义下实现混沌系统的嵌入空间重构, 发展了局域预测法、全局预测法、基于 Volterra 级数分解和基于支撑矢量基技术等非线性预测等方法<sup>[4-13]</sup>. 局域预测法主要有局域线性、局域非线性、局域超平面近似法<sup>[5]</sup>. 其计算预测值的计算量较小, 对实际的变化适应能力强, 但需要较多的时间, 不能用于自适应信号处理. 全局预测法包括全局多项式预测器<sup>[8,9]</sup>、神经网络预测方法<sup>[14,15]</sup>. 其优点是用尽可能多的观察时间序列来近似产生序列的重构轨迹, 使其能够在预测模型中反映出原动力学系统的动力学行为. 缺点是建模过程必须采用离线的方式, 且全局多项式的非线性状态扩展和神经网络结构的不确定性及存在局部最小点

等问题, 使算法的实现较复杂. 此外, Takens 定理仅仅说明了在已知嵌入维空间里可以把有规律的轨迹恢复出来, 但具体实现需要较多的时间序列先验知识. 对于实际中性质未知的复杂时间序列, 基于 Takens 定理的预测方法往往无能为力.

分形理论和混沌理论是研究非线性系统的两个重要工具. 自从 1975 年被正式提出, 分形理论在各个领域都得到了广泛的应用, 许多自然界的复杂现象及问题都借助这一理论得以分析和解释, 包括数学、物理、化学、生物、经济、管理、社会等学科<sup>[16-19]</sup>.

本文基于混沌与分形的关系, 根据奇怪吸引子的自相似结构和混沌时间序列的自仿射特性, 提出了一种基于分形自仿射理论的混沌时间序列预测方法. 以具有时滞特性的 Mackey-Glass 时间序列、脑电 (EEG) 信号和 Lorenz 系统产生的时间序列为例验证该模型的预测能力. 结果表明, 基于分形自仿射理论的混沌时间序列的预测方法预测结果较接近真实值, 可应用于对性质未知的混沌时间序列的预测.

## 2. 混沌、分形及其相互关系

### 2.1. 混沌与奇怪吸引子

混沌运动是确定动力系统本身所表现出的类似随机的行为<sup>[20]</sup>, 其定常状态(奇怪吸引子)不同于通

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60472014)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: hetao99@263.net

常概念下确定性运动的三种状态: 静止(平衡)、周期和准周期运动中的任何一种, 而表现为一种始终局限于有限区域且轨道永不重复、形态复杂的运动。同时, 混沌运动与随机过程也存在本质的区别。

混沌运动的奇怪吸引子是轨道不稳定和耗散系统容积收缩两种系统内在性质同时作用的结果。大量不稳定的周期轨道无穷多次重复, 使混沌吸引子表现出各态历经和层次分明的特性。而系统内部局部不稳定所引起的点之间距离的扩大和系统整体稳定所形成的点之间距离的限制使奇怪吸引子具有无特征的各种尺度, 表现为自相似结构。

图 1 示出了 Chua 电路系统、Lorenz 混沌系统、Rössler 混沌系统和  $\tau = 17$  时 Mackey-Glass 时滞系统的吸引子结构。

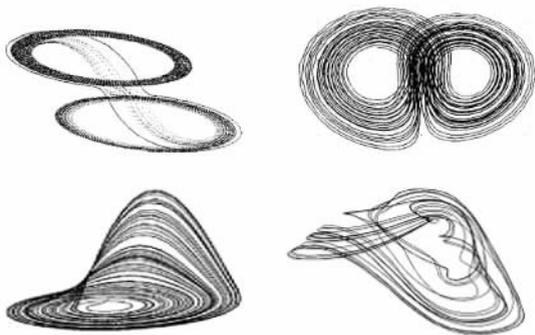


图 1 Chua 电路、Lorenz 系统、Rössler 系统和  $\tau = 17$  时 Mackey-Glass 时滞系统的吸引子结构

## 2.2. 分形

分形的概念最早是 1975 年由 Mandelbrot 引入的<sup>[16]</sup>, 它是指那种“支离破碎”的集合。其几何特征是: 几乎其每个点的每个邻域里所包含该集合的点的分布是零乱散落疏密无规的; 在其每个点上没有切线。应用中, 分形的一个重要特征是具有自相似性。这种自相似性可以是近似的或是统计意义下的。在任意小的尺度之下, 分形总有复杂的细节。因此其整体与局部都不能用传统的集合语言来描述, 常利用 Hausdorff 维研究其性质。

图 2 和图 3 分别是具有分形结构的 Koch Coastline 图形和具有 8 个 Julia 集的 Mandelbrot 集的星座图。

## 2.3. 混沌与分形的关系

混沌与分形从不同侧面研究动力学系统: 混沌



图 2 Koch Coastline 图形

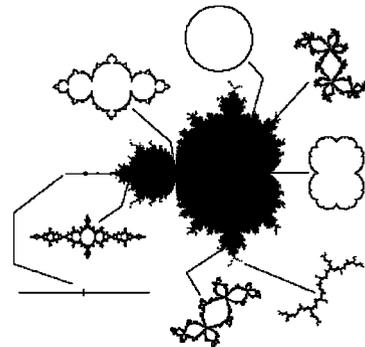


图 3 具有 8 个 Julia 集的 Mandelbrot 集星座图

主要研究非线性系统状态在时间上演化过程的行为特征, 分形则主要研究吸引子在空间上的结构。如果把混沌广义地看作是具有自相似的随机过程和结构, 则分形也可以看作是一种空间混沌。反之, 由于混沌运动具有在时间标度上的无规自相似性, 它也可以看作是时间上的分形。即分形是空间上的混沌, 而混沌是时间上的分形<sup>[21]</sup>。

奇怪吸引子是混沌运动轨迹经过长时间之后所形成的动力系统不变集, 没有明显规则或次序, 不同层次间存在自相似性。比较图 1—3 可见, 奇怪吸引子具有复杂的不规则分形结构。因此, 分形几何为描述混沌运动, 特别是混沌奇怪吸引子的内部结构提供了一个非常实用的语言。

## 2.4. 混沌时间序列的自仿射分形及可预测条件

混沌时间序列的短期预测是指对动力系统在相空间运动轨迹下一邻近时刻值的预测, 或者其运动轨迹在某一坐标轴上投影的时间序列的下一邻近时刻的预测。混沌时间序列可预测的两个基本假设为<sup>[20]</sup>

1) 增加或减少时间序列的及其有限(或很小一部分)的长度, 将不会使系统的关联维和 Lyapunov 指数发生变化;

2) 给定时间序列的结构, 在预测区域内不变。

Takens 的相空间重构理论证明了可以由已知时间序列进行相空间重构, 且恰当的嵌入维数及时间延迟可使得重构的相空间中的“点轨迹”与原系统在

同胚意义下动力学等价. 据此可以进行时间序列的建模和预测<sup>[10]</sup>. 但正如前文提到的, 基于 Takens 定理的预测方法在实际中常会碰到先验知识不足的困难. 而许多研究已经表明: 工程应用中, 混沌时间序列的短期预测的约束条件比混沌系统模型重构的要求低, 即预测模型不一定非要具备与原动力系统相同的吸引子<sup>[3]</sup>.

图 4 和图 5 分别为  $\tau = 17$  时 Mackey-Glass 时滞序列和 Lorenz 系统  $x$  分量与采样时刻的关系. 图中横坐标  $n$  表示采样时刻, 纵坐标  $x(n)$  表示序列值. 从图中可以看出, 混沌时间序列的整体或某一部分(一段)与序列的另一部分相似, 或者说可以由另外的部分经过仿射变换得到<sup>[22]</sup>. 混沌时间序列结构这种在新的长度重标下性质不变的分形特性称为自仿射分形. 利用混沌时间序列的自仿射分形特性, 将序列缩小一个因子  $b^{-1}$ , 接着用一个等于  $b^{-H}$  的不同因子重标序列, 序列将重标为其自身, 即  $F(x) \approx b^{-H}F(bx)$ . 其中  $H > 0$  为某常指数.

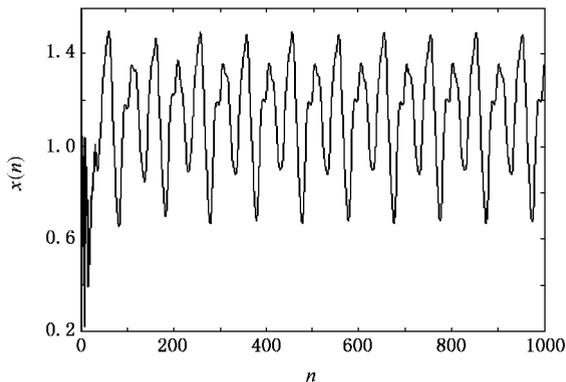


图 4  $\tau = 17$  时 Mackey-Glass 时滞序列

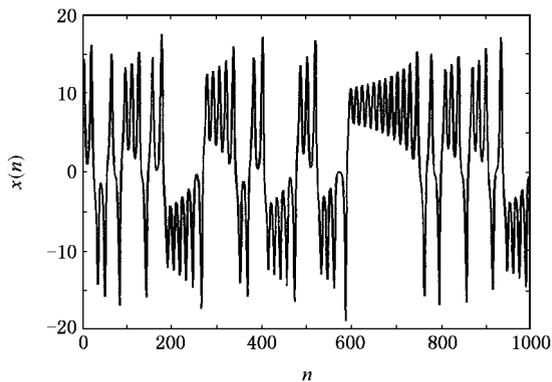


图 5 Lorenz 模型  $x(n)-n$  图形

子的特性描述. 结合混沌时间序列的可预测条件, 可以根据混沌时间序列的自仿射分形, 即包含待预测点的一段(部分未知)自相似于序列中的另一段(已知)来进行预测.

### 3. 分形自仿射理论<sup>[23]</sup>与混沌时间序列预测

迭代函数系统(IFS)理论是对自仿射分形性质进行研究的有力工具. IFS 是建立在压缩映射基础上的.

定义 1 设  $(X, d)$  为一距离空间, 一个变换  $\omega: X \rightarrow X$  称为压缩映射, 即: 存在一个正的常数  $c < 1$ , 使  $d(\omega(x), \omega(y)) \leq c \cdot d(x, y), \forall x, y \in X$ .  $c$  为压缩因子.

定义 2 一个双曲(Hyperbolic)迭代函数系统 IFS 是由一个完备距离空间  $(X, d)$  及其上的一组压缩映射  $\omega_i: X \rightarrow X$  组成,  $\omega_i$  的压缩因子为  $c_i$ , 且  $0 \leq c_i < 1, i = 1, 2, \dots, N$ . 系统表示成  $\{X; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ , 且系统的压缩因子为  $c = \max\{c_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ .

当已知某一混沌时间序列时, 可以通过构造一个 IFS, 使其吸引子逼近指定序列来对序列进行建模和预测. 对吸引子的研究通常在 Hausdorff 度量空间展开:

定义 3 设  $(X, d)$  为一完备距离空间, 空间  $H(X)$  的元素由  $X$  上非空集组成.  $A, B \in H(X)$ ,  $A, B$  之间的 Hausdorff 距离定义为:  $h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$ . 其中  $d(A, B)$  表示  $A$  到  $B$  的距离  $d(A, B) = \max\{d(x, B), x \in A\}$ , 且  $d(x, B) = \min\{d(x, y), y \in B\}$ ,  $\vee$  表示两个数中取较大的一个.  $(H(X), h(d))$  即 Hausdorff 度量空间.

吸引子定理给出了 IFS 吸引子存在的条件.

定理 1 设  $\{X; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  为一双曲 IFS, 压缩因子为  $c$ , 则在  $(H(X), h(d))$  上定义的映射  $\omega = \bigcup_{i=1}^N \omega_i$  对所有  $B \in H(X)$  也是一个压缩映射, 并有压缩因子  $c$ , 即对任意的  $B, C \in H(X)$ , 总存在  $h(\omega(B), \omega(C)) \leq c \cdot h(B, C)$ . 且在  $H(X)$  上必存在一个唯一吸引子  $A, \forall B \in H(X)$ , 有  $A = \omega(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega^n(B)$ .

对于时间序列函数  $y = f(x)$  来说, 其函数图  $A = \{x, f(x)\}$  是二维的. 假定  $A$  是自仿射的, 它的一

由上述对混沌时间序列的产生机理及奇怪吸引

个自仿射划分为  $A = \bigcup_{i=1}^M A_i$ . 对每一个子集  $A_i$ , 均存在一个自仿射变换  $\omega_i$  使  $A_i = \omega_i(A)$  以概率  $p_i$  ( $p_i > 0$  且  $\sum_{i=1}^M p_i = 1$ ) 成立.  $\omega_i$  的集合  $\omega = \bigcup_{i=1}^M \omega_i$  构成一个 IFS  $\{X; \omega_i, p_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ . 子集  $A_i$  相邻但互不重叠.

序列分别通过 IFS 的各个自仿射变换映射到对应的局部, 将这些局部片断拼贴在一起, 所得结果与原序列的误差描述了 IFS 产生的吸引子与原序列的相似程度, 误差越小, 二者相似程度越高. 拼贴定理给出了吸引子与原序列误差的度量:

**定理 2** 设  $(X, d)$  为一完备距离空间, 给定  $L \in H(X)$  和  $\epsilon \geq 0$ , 选取一个压缩因子为  $c$  ( $0 \leq c < 1$ ) 的 IFS  $\{X; \omega_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ , 使得  $h(L, \bigcup_{i=1}^M \omega_i(L)) \leq \epsilon$ , 则有  $h(L, A) \leq \frac{\epsilon}{1-c}$  其中  $A$  为该 IFS 的吸引子,  $h(\cdot, \cdot)$  为 Hausdorff 距离.

上面的叙述为基于分形自仿射的混沌时间序列提供了理论依据. 根据混沌时间序列的自仿射特性, 可由吸引子定理求得序列的 IFS 吸引子, 或将序列的一部分仿射为另一部分. 又由混沌时间序列的可预测条件, 待预测的点按自仿射参数进行映射的结果必为吸引子(或接近已知序列段)上的已知点. 根据此已知点和自仿射参数, 即可求得待预测点的估计值, 且估计的误差可由拼贴定理度量. 这就是本文提出的混沌时间序列预测的思想.

基于分形自仿射理论的混沌时间序列算法描述如下:

假设已知序列  $\{y_t : t = 1, 2, \dots, n\}$ , 预测  $y_{n+p}$  的值.

若:  $\omega_{mm} \{y_{n-u+1}, y_{n-u+2}, \dots, y_n\} = \{y_{m-v+1}, y_{m-v+2}, \dots, y_m\}$  ( $u > v, n > m$ ) 则  $\{y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+p}\} = \omega_{mm}^{-1} \{y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+k(p)}\}$ , 其中  $p$  为可预测的步数, 其值与序列的最大 Lyapunov 指数有关<sup>[20]</sup> (本文研究  $p = 1$ , 即一步预测).  $\omega_{mm}^{-1}$  表示  $\omega_{mm}$  的逆仿射,  $k(p)$  是由  $u$  和  $v$  确定的正整数.

### 4. 混沌时间序列预测算法实现及分析

设有压缩变换

$$\omega \begin{pmatrix} i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi_r \end{pmatrix}, \quad i = n - u, m - u + 1, \dots, m, \quad (1)$$

满足

$$\omega \begin{pmatrix} n - u \\ y_{n-u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - v \\ y_{m-v} \end{pmatrix}, \omega \begin{pmatrix} n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ y_m \end{pmatrix}, \quad u > v, n > m, \quad (2)$$

其中  $d$  为压缩因子,  $|d| < 1$  (见定义 1).

因为  $u > v$ , 即变换  $\omega$  将多点映射为一点, 取

$$r = \text{in}(a \cdot i + e), \quad (3)$$

其中  $\text{in}(\cdot)$  表示取最靠近的整数.  $\phi_r$  为变换到点  $(r, y_r)$  处的所有映射值的平均.

在  $d$  确定之后, 即可由

$$a = \frac{v}{u}, \quad (4)$$

$$e = \frac{n \times (m - v) - m \times (n - u)}{u}, \quad (5)$$

$$c = \frac{y_m - y_{m-v}}{u} - d \times \frac{y_n - y_{n-u}}{u}, \quad (6)$$

$$f = \frac{n \times y_{m-v} - (n - u) \times y_m}{u} - d \times \frac{n \times y_{n-u} - (n - u) \times y_n}{u}, \quad (7)$$

确定  $\omega$  (见定义 2).

#### 4.1. $d$ 值的确定

$d$  值应该使映射得到的序列段与原序列段尽可能接近, 即求它们之间的距离最小化

$$E = \sum_{r=m-v}^m [\phi_r - y_r]^2 = \sum_{i=n-u}^n [c \cdot i + d \cdot y_i + f - y_{\text{in}(a \cdot i + e)}]^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

将 (6) (7) 式代入 (8) 式, 并令

$$\lambda_i = \frac{n - i}{u}, \quad (9)$$

$$A_i = y_i - [\lambda_i y_{n-u} + (1 - \lambda_i) y_n], \quad (10)$$

$$B_i = y_{\text{in}(a \cdot i + e)} - [\lambda_i y_m + (1 - \lambda_i) y_{m-v}], \quad (11)$$

得  $E = \sum_{i=n-u}^n (A_i d - B_i)^2$ . 令  $\frac{\partial E}{\partial d} = 0$  得

$$d = \frac{\sum_{i=n-u}^n A_i B_i}{\sum_{i=n-u}^n A_i^2}. \quad (12)$$

#### 4.2. 算法描述

- 1) 选择  $u$ , ( $u > v$ ), 并令  $k = 0$ ;
- 2)  $k = k + 1$ . 若  $k > n - u - v$ , 转 5);
- 3) 按 (9) — (12) 式计算  $\{y_{n-u+1}, y_{n-u+2}, \dots, y_n\}$

映射到  $\{y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+v-1}\}$  的收缩因子  $d$ , 若  $|d| \geq 1$  转 2);

4) 按 (4)–(7) 式计算映射因子, 并求出集合  $\{y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+v-1}\}$  与映射所得的集合  $\omega(k) = \{y_{n-u+1}, y_{n-u+2}, \dots, y_n\}$  之间的 Hausdorff 距离  $h(k)$  (见定义 3). 存储  $\omega(k)$  和  $h(k)$  转 2);

5) 选择最小的  $h(k)$ , 记录对应的仿射变换  $\omega(k)$ ;

6) 令  $i = n + p$ , 根据 (3) 式求得  $r$ , 并令  $\phi_r = y_r + \delta$ , 由  $\alpha(k) \times i + \mathcal{A}(k) \times y_i + \mathcal{J}(k) = \phi_r$  即可得  $y_i$ .

### 4.3. 算法分析

此算法具有较大的灵活性. 步骤 1) 中  $u$  和  $v$  应根据具体情况选择, 通常不宜太大; 步骤 3) 中收缩因子  $d$  的判断保证了序列是自仿射的; 步骤 5) 和 6) 分别是定理 1 和定理 2 的应用. 步骤 6) 中的  $\delta$  为映射误差补偿, 表示原序列段与映射所得序列段之间的差异. 其值可由  $\{y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+v-1}\}$  和  $\omega(k) = \{y_{n-u+1}, y_{n-u+2}, \dots, y_n\}$  之间的差值采用回归方式获取; 为了减少计算量, 步骤 1) 中  $k$  可考虑不从 0 开始, 且步骤 2) 中  $k$  的步长可以为大于 1 的其他值.

## 5. 实验仿真结果及分析

为了验证基于分形自仿射理论的混沌时间序列预测模型的有效性和预测准确性, 下面对 Mackey-Glass 混沌系统、具有高维混沌特性的脑电 (EEG) 信号和 Lorenz 混沌系统进行预测.

实验中, 均从原序列的 100 项以后开始, 以预测值与实际值之间的误差和相关系数作为预测性能评价指标. 预测误差定义为

$$\epsilon(n) = x(n) - x'(n), \quad (13)$$

相关系数  $r_1$  定义为

$$r_1 = \frac{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x}) \{x'(n) - \bar{x}'\}}{\sqrt{\sum_{n=1}^N (x(n) - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N (x'(n) - \bar{x}')^2}} \quad (14)$$

$r_1$  表示  $x(n)$  与  $x'(n)$  的接近程度.

(13) 和 (14) 式中,  $N$  为预测样本数,  $x(n)$  为原始的混沌时间序列, 而  $x'(n)$  则是预测输出 ( $\bar{\cdot}$  表示均值). 通常将  $x'(n) \in [0.95x(n), 1.05x(n)]$  或  $r_1 > 0.95$  的预测当作有效预测<sup>[51]</sup>.

混沌时间序列预测结果如图 6—8 所示, 每个图

由图 (a) 和图 (b) 组成. 图 (a) 横坐标  $n$  为预测样本序号, 纵坐标  $x(n)$  与  $x'(n)$  分别为真实值 (用“+”表示) 及预测值 (用“o”表示). 图 (b) 横坐标为预测样本序号, 纵坐标表示预测误差.

### 5.1. 对 Mackey-Glass 时滞序列的预测结果

自从 1977 年 Mackey 和 Glass 发现时滞系统中的混沌现象以来, 时滞混沌系统常常用来作为检验非线性系统模型性能的标准<sup>[24]</sup>. 该混沌时间序列由时滞微分方程产生

$$\frac{dx(n)}{dn} = \beta x(n) + \frac{\alpha x(n - \tau)}{1 + x(n - \tau)^0}, \quad (15)$$

其中  $\alpha = 0.2, \beta = -0.1$ . 当  $\tau \geq 17$  时呈现混沌性, 并且  $\tau$  值越大, 混沌程度越高.  $\tau = 17$  时奇怪吸引子及  $x(n)$ - $n$  的示意图分别见图 1 和 4.

采用本文提出的基于分形自仿射的混沌时间序列预测算法, 图 6 为对  $\tau = 7$  时的 Mackey-Glass 时滞序列的预测结果 ( $u = 50, v = 25$ ).

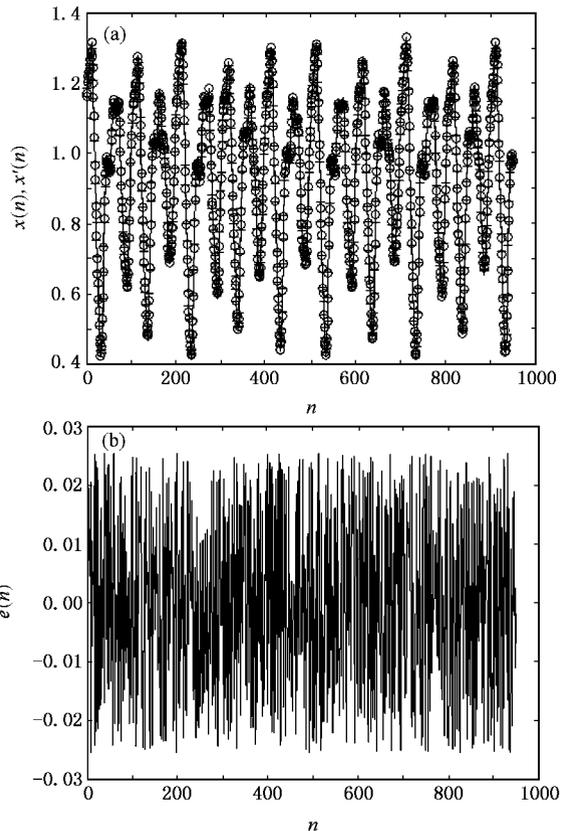


图 6  $\tau = 17$  时 Mackey-Glass 时滞序列预测结果 ( $r_1 = 0.9812$ )

### 5.2. EEG 信号的预测结果

脑电信号反映了神经系统的电生理活动, 在

临床脑疾病诊断和生理研究等方面具有重要意义. 大量研究表明 EEG 信号具有高维混沌特征, 这里采用 Duke ECT 实验室记录的数据, 该数据以四十分之一秒的速率采样.

实验首先利用

$$x(n) = [x(n) - \min_n\{x(n)\}] / [\max_n\{x(n)\} - \min_n\{x(n)\}] \quad (16)$$

将数据归一化到 [0, 1] 区间.

采用本文研究的预测算法对 EEG 信号进行预测, 取参数  $u = 30, v = 15$ . 图 7 为真实值与预测值的比较及预测误差.

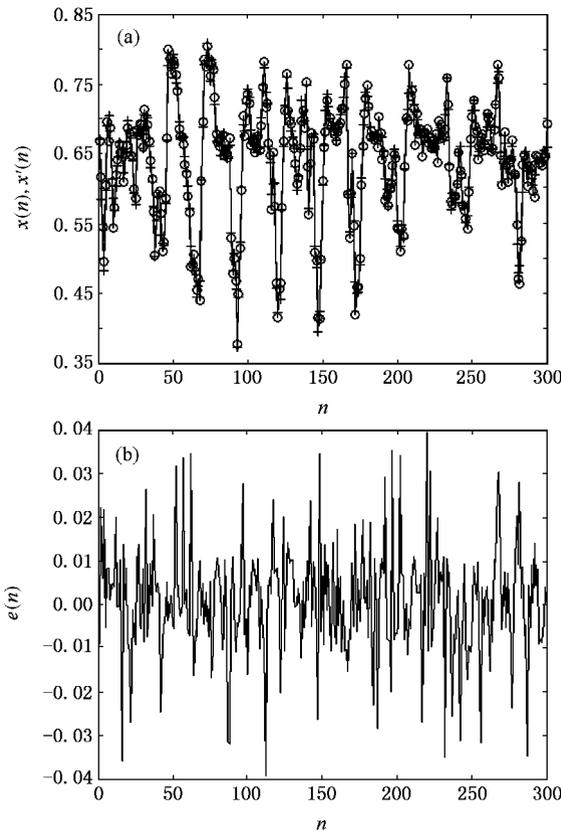


图 7 EEG 信号预测结果 ( $r_1 = 0.9707$ )

### 5.3. Lorenz 混沌时间序列的预测

Lorenz 混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(x + y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \sigma = 10, \\ r = 28, b = 8/3 \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (17)$$

采用 5 阶龙格-库塔法采样得到  $x$  分量, 并利用 (16) 式归一化. 实验中模型参数取为  $u = 30, v = 15$ .

图 8 示出了 Lorenz  $x$  分量混沌时间序列的预测结果.

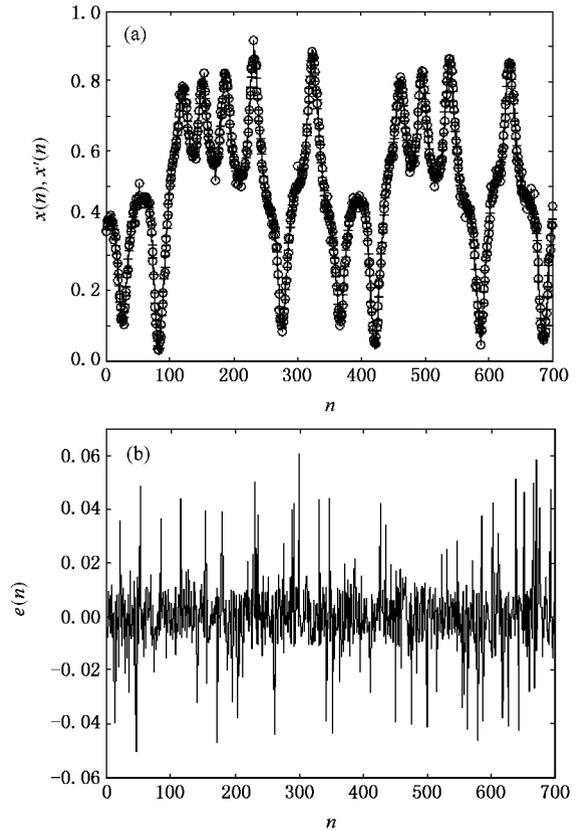


图 8 Lorenz 混沌序列预测结果 ( $r_1 = 0.9718$ )

从图 6—8 可以看出, 基于分形自仿射理论的预测模型对典型的混沌时间序列预测效率较高, 预测值与真实值的误差量级为  $10^{-2}$ , 且预测的相关系数均超过 0.97, 说明模型的预测值与系统的实际输出符合得较好, 预测的结果比较可信.

实验还表明, 模型参数  $u, v$  的值不能取得太大, 但只要在保证序列自仿射的条件下 ( $|d| < 1$ ), 不同的  $u, v$  值对预测结果影响不大, 故这里不再给出图示.

基于 Takens 相空间重构理论的预测模型的预测效果与延迟时间和嵌入维数有关. 选择不当将导致信号轨迹在相空间主方向轴压缩或折叠现象, 从而影响重构相空间的样本所包含的信息量, 直接降低对奇怪吸引子不变量特征描述的准确度. 而基于分形自仿射理论的预测模型从序列本身的分形几何特性出发, 避免了嵌入维数和延迟时间选择不当带来的影响, 可适用于分形维数未知或不易求得的时间序列的预测.

## 6. 结 论

本文根据混沌时间序列产生的确定性和非线性机理,基于混沌吸引子的分形结构,提出了一种混沌时间序列自仿射模型,用于混沌时间序列的自适应预测.算法采用迭代函数系统跟踪混沌的局部运动轨迹来预测混沌时间序列.实验结果表明,该方法预

测准确率较高,对混沌时间序列先验知识要求较少,适用于多种混沌时间序列的预测.且可修正和调整迭代函数系统参数,为复杂非线性系统的辨识和混沌时间序列预测、控制提供了一条实际有效的途径.

对于时间序列的自仿射性,虽然一些研究者进行了一些讨论,但目前仍缺乏明确的理论指导.如何在混沌时间序列建模与预测中合理选择迭代函数系统参数,以及进一步减少运算量,有待于更深入的研究.

- [ 1 ] Kantz H, Schreiber T 1997 *Nonlinear Time Series Analysis* ( Cambridge : Cambridge University Press )
- [ 2 ] Zhou C, Chen T 1997 *Phys. Lett. A* **234** 429
- [ 3 ] Zhang J S, Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1248 ( in Chinese )  
[ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 1248 ]
- [ 4 ] Cui W Z, Zhu C C, Bao W X, Liu J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3009 ( in Chinese ) [ 崔万照、朱长纯、保文星、刘君华 2005 物理学报 **54** 3009 ]
- [ 5 ] Gan J C, Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2995 ( in Chinese )  
[ 甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 2995 ]
- [ 6 ] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 88
- [ 7 ] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 ( in Chinese )  
[ 张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403 ]
- [ 8 ] Chellapilla K, Rao S 1998 *IEEE Signal Processing Letters* **5** 39
- [ 9 ] Zhang J S, Li H C, Xiao X C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 710 ( in Chinese ) [ 张家树、李恒超、肖先赐 2004 物理学报 **53** 710 ]
- [ 10 ] Takens F 1981 *Lecture Notes in Mathematics* ( Berlin : Springer-Verlag ) p366
- [ 11 ] Castro R, Sauer T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 1030
- [ 12 ] Farmer J D, Sidorowich J J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 845
- [ 13 ] Tan W, Wang Y N 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 795 ( in Chinese ) [ 谭文、王耀南 2003 物理学报 **52** 795 ]
- [ 14 ] Cao L Y, Hong Y, Fang H 1995 *Phys. D* **85** 225
- [ 15 ] Haykin S, Li L 1995 *IEEE Trans. Signal Processing.* **43** 526
- [ 16 ] Mandelbrot B B 1983 *The Fractal Geometry on Nature.* ( New York : Freeman )
- [ 17 ] McDonald S W, Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1985 *Phys. D* **17** 125
- [ 18 ] Foroutan-pour K, Dutilleul P, Smith D L 1999 *Appl. Math. Comput.* **105** 195
- [ 19 ] Barnsley M F 1988 *Fractal Everywhere* ( New York : Academic )
- [ 20 ] Huang R S 2001 *Chaos and Control* ( Wuhan : Publishing House of Wuhan University ) p287 [ 黄润生 2001 混沌及其控制( 武汉 : 武汉大学出版社 ) 第 287 页 ]
- [ 21 ] Wang X Y 2003 *Chaos in Complex Non-linear Systems* ( Beijing : Publishing House of Electronics Industry ) ( in Chinese ) p18, p40 [ 王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌( 北京 : 电子工业出版社 ) 第 18, 40 页 ]
- [ 22 ] Mazel D S, Hayes M H 1992 *IEEE Trans. Signal Processing* **17** 24
- [ 23 ] Xie H P, Xue X Q 1997 *Mathematic Foundation of Fractal Applications* ( Beijing : Science Press ) ( in Chinese ) p27—40, 99—106, 170—175 [ 谢和平、薛秀谦 1997 分形应用中的数学基础( 北京 : 科学出版社 ) 第 27—40, 99—106, 170—175 页 ]
- [ 24 ] Farmer J D 1982 *Phys. D* **3** 336

# Prediction of chaotic time series based on fractal self-affinity<sup>\*</sup>

He Tao<sup>†</sup> Zhou Zheng-Ou

( *Department of Electronic Engineering , University of Electronic Science and Technology of China , Chengdu 610054 , China* )

( Received 31 May 2006 ; revised manuscript received 10 July 2006 )

## Abstract

Based on the fractal structure of strange attractor and self-affine property of time series , a method is proposed for predicting chaotic time series . The algorithm first exploits the iterative function system to track current chaotic trajectory and selects the segment which possesses the best self-affine property of the time series statistically . Then the prediction model is constructed according to attractor and coverage theorem . To illustrate the performance of the proposed model , simulations are performed on the chaotic Mackey-Glass time series , EEG signal and Lorenz chaotic system . The results show that the chaotic time series are accurately predicted , which demonstrates the effectiveness of the model .

**Keywords** : self-affine , iterative function system , chaotic time series , prediction

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60472014 ).

<sup>†</sup> E-mail : hetao99@263.net