

一类四维混沌系统切换混沌同步*

刘扬正^{1)†} 姜长生¹⁾ 林长圣²⁾

1) (南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

2) (南京工程学院非线性物理研究所, 南京 210013)

(2006 年 5 月 24 日收到, 2006 年 7 月 8 日收到修改稿)

构建了一类可切换的四维混沌系统, 通过选择器实现这类系统间的随机切换. 简要地分析了四维混沌系统平衡点的性质、混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性, 并设计了实现四维混沌系统切换的实际电路. 利用非线性反馈控制方法实现了这类系统与其中某个系统之间的切换混沌同步. 根据系统稳定性理论, 得到了非线性反馈控制器的结构和系统达到混沌同步时反馈控制增益的取值范围.

关键词: 非线性反馈, 混沌同步, 四维混沌系统

PACC: 0545

1. 引言

构建新的混沌系统是混沌研究的重要任务之一. 由于四维混沌系统可能产生超混沌现象^[1], 而利用超混沌同步进行保密通讯, 具有更好的保密性能. 因此, 构建四维混沌系统成为最近混沌研究的热点课题. 文献[2]根据系统合成的方法构建了四维 Lorenz 系统; 文献[3-4]利用系统拓展的方法构建的四维超混沌蔡氏电路系统和四维超混沌 Rossler 系统, 已成为人们广泛研究的对象; 文献[5]构建了具有系统变量立方项的四维混沌系统; 而文献[6]在三维 Liu 系统的基础上, 增加系统的一维状态, 建构了四维超混沌 Liu 系统; 文献[7-8]构建了简单的四维超混沌电路系统. 但上述四维混沌或超混沌系统都是单一的系统.

本文以三维 Lorenz 系统^[9]和三维 Liu 系统^[10]为基础, 采用系统状态扩展的方法构建一类可切换的四维混沌系统. 分析了这些四维系统平衡点的性质、混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性. 设计了实现四维混沌系统的实际电路, 通过开关的切换, 很容易实现这些四维混沌系统间的转换, 一个电路能实现多个系统的功能. 由于不同系统的混沌同步具有更好的灵活性, 应用到保密通讯具有更强的保密

性能, 近年来, 不同系统间的混沌同步问题受到了广泛的重视^[11-17], 但驱动系统和响应系统都是一一对应的. 通过对这类可切换的四维混沌系统的特性进行分析, 提出利用非线性反馈控制方法实现这类四维混沌系统与其中某个系统间的混沌同步, 实现驱动系统和响应系统的多一对应混沌同步. 根据系统的稳定性理论, 构造了非线性反馈控制器并确定了混沌同步时反馈控制增益的取值范围. 数值仿真和电路实验的结果验证了理论分析的正确性.

2. 系统构成

Lorenz 系统^[9]和 Liu 系统^[10]都是典型的三维自治非线性系统, 将其状态延伸一维构成四维系统, 为了电路实现时能满足运算放大器和模拟乘法器对输入电压限制的要求^[18, 19], 将四维混沌系统方程表述为以下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay, \\ \dot{y} = bx + w - 20xz, \\ \dot{z} = -cz + 20f_1(x, y), \\ \dot{w} = -dw + 10f_2(y, z), \end{cases} \quad (1)$$

式中 a, b, c, d 为系统参数, f_1, f_2 为系统可变化的非线性函数. 与三维 Lorenz 系统和 Liu 系统比较, 四维系统增加了一维状态 w , 并用系统变量 w 取代三

* 国家自然科学基金(批准号 90405011), 江苏省高校自然科学基金(批准号 D5KJD120083)和南京工程学院自然科学基金(批准号 KXJ06047)资助的课题.

† E-mail: lyz64@njit.edu.cn

维 Lorenz 系统第二个方程中的系统变量 y . 让系统参数保持恒定, 仅改变系统的非线性函数, 可以得到多个相互关联的四维混沌系统. 为了电路实现时系统间切换的方便, 限定可变化的非线性函数 f_1, f_2 为系统变量的二次函数. 例如, 令可变非线性函数 f_1 在系统变量二次函数 xy 和 x^2 中选择(当 $f_1 = xy$ 时, 四维混沌系统为三维 Lorenz 系统的拓展; 当 $f_1 = x^2$ 时, 四维混沌系统为三维 Liu 系统的拓展), 可变非线性函数 f_2 在系统变量二次函数 yz 和 y^2 中选择. 则 f_1, f_2 存在四种不同的组合方式(xy, yz), (x^2, yz), (xy, y^2), (x^2, y^2); 分别将其代入(1)式得到四个四维混沌系统, 这些系统的参数完全相同, 只是非线性函数不同, 由这些系统构成了一类相互关联且可切换的四维混沌系统.

下面以 $f_1 = xy, f_2 = yz$ 为例, 对四维混沌系统的特性进行简要分析. 将 $f_1 = xy, f_2 = yz$ 代入(1)式, 得到可切换四维混沌系统的一种形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay, \\ \dot{y} = bx + w - 20xz, \\ \dot{z} = -cz + 20xy, \\ \dot{w} = -dw + 10yz. \end{cases} \quad (2)$$

四维系统(2)式的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ b - 20z & 0 & -20x & 1 \\ 20y & 20x & -c & 0 \\ 0 & 10z & 10y & -d \end{bmatrix}, \quad (3)$$

表 1 4 个四维混沌系统特性分析表

可变化函数	平衡点	特征值	Lyapunov 指数
A $f_1 = xy, f_2 = yz$	$P^+(0.5271, 0.5271, 2.2222, 2.3421)$	$(-13.1051, -4.6407, 0.1229 \pm 12.8161i)$	$(1.105, 0, -1.229, -10.161)$
	$P^-(0.5271, -0.5271, 2.2222, -2.3421)$	$(-13.1051, -4.6407, 0.1229 \pm 12.8161i)$	
B $f_1 = x^2, f_2 = yz$	$P^+(0.5271, 0.5271, 2.2222, 2.3421)$	$(-17.2688, -4.6064, 2.1826 \pm 10.996i)$	$(1.211, 0, -2.145, -12.263)$
	$P^-(0.5271, -0.5271, 2.2222, -2.3421)$	$(-17.2688, -4.6064, 2.1826 \pm 10.996i)$	
C $f_1 = xy, f_2 = y^2$	$P^+(0.5006, 0.5006, 2.001, 0.5002)$	$(-14.0202, -5.0816, 0.8009 \pm 11.6709i)$	$(1.172, 0, -2.435, -12.741)$
	$P^-(0.4994, -0.4994, 1.9998, 0.4996)$	$(-13.7408, -4.9216, 0.5812 \pm 12.2975i)$	
D $f_1 = x^2, f_2 = y^2$	$P^+(0.5006, 0.5006, 2.001, 0.5002)$	$(-17.7400, -5.0613, 2.6507 \pm 10.0779i)$	$(1.644, 0, -2.749, -13.576)$
	$P^-(0.4994, -0.4994, 1.9998, 0.4996)$	$(-17.3854, -4.9401, 2.4127 \pm 10.6548i)$	

值得注意的是, 以上 4 个四维混沌系统之间存在一定的差异, 同时也存在着密切的联系. 根据(1)式设计了一个能实现 4 个四维混沌系统功能的实际电路, 如图 2 所示. 图中的运算放大器皆为 LF353, 电路中各元件的数值如图中标示, 它们由系统的参

数决定, 所有电阻的单位为 $k\Omega$. 由于系统中的非线性函数都是系统变量的二次函数, 可由模拟乘法器实现(图中的 \times), 模拟乘法器选用 AD633JN. 通过电路中开关的切换可进行系统间非线性函数的转换, 开关 K_1 的切换实现非线性函数 f_1 的变化; 开关 K_2

令 $-ax + ay = 0, bx + w - 20xz = 0, -cz + 20xy = 0, -dw + 10yz = 0$, 解得四维系统(2)式的三个平衡点 $P^0(0, 0, 0, 0), P^+(x_0, y_0, z_0, w_0), P^-(x_0, -y_0, z_0, -w_0)$. 取系统参数为 $a = 10, b = 40, c = 2.5, d = 5$. 因为 4 个四维混沌系统都具有平衡点 $P^0(0, 0, 0, 0)$, 且 Jacobian 矩阵在平衡点 P^0 处的特征值皆为 $\lambda_1 = -25.6155, \lambda_2 = 15.6135, \lambda_3 = -2.5, \lambda_4 = -5$, 因此平衡点 P^0 及其特征值不在表 1 中列出. 平衡点 P^0 的 4 个特征值皆为实数, 且有一个特征值大于零, 三个特征值小于零, 因而平衡点 P^0 是不稳定的鞍点. 可切换四维系统的 Jacobian 矩阵在平衡点 P^+ 和 P^- 处的特征值和 Lyapunov 指数的分析结果见表 1.

由表 1 可见, 系统的最大 Lyapunov 指数皆大于零, 因此四维系统都处于混沌状态. 可切换四维系统的 Jacobian 矩阵在平衡点 P^+ 和 P^- 处的 4 个特征值中都有两个特征值为小于零的实数, 另两个特征值为实部大于零的复数, 因而平衡点 P^+ 和 P^- 都是不稳定的焦点, 但特征值的大小不等, 说明由于四维混沌系统中各系统的非线性特性不同, 决定了它们在相空间中流的演化存在一定差异. 图 1 表示 4 个四维混沌系统在系统参数皆为 $a = 10, b = 40, c = 2.5$ 和 $d = 5$ 时, 在模拟示波器上观察到, 由图 2 所示的电路产生的混沌吸引子的相图((a) $x-w$ (b) $y-w$).

数决定, 所有电阻的单位为 $k\Omega$. 由于系统中的非线性函数都是系统变量的二次函数, 可由模拟乘法器实现(图中的 \times), 模拟乘法器选用 AD633JN. 通过电路中开关的切换可进行系统间非线性函数的转换, 开关 K_1 的切换实现非线性函数 f_1 的变化; 开关 K_2

的切换实现非线性函数 f_2 的变化. 利用图中开关的切换, 一个电路可以实现 4 个四维混沌系统的功能,

操作非常简便, 因此该电路系统具有重要的使用价值和广泛的应用前景.

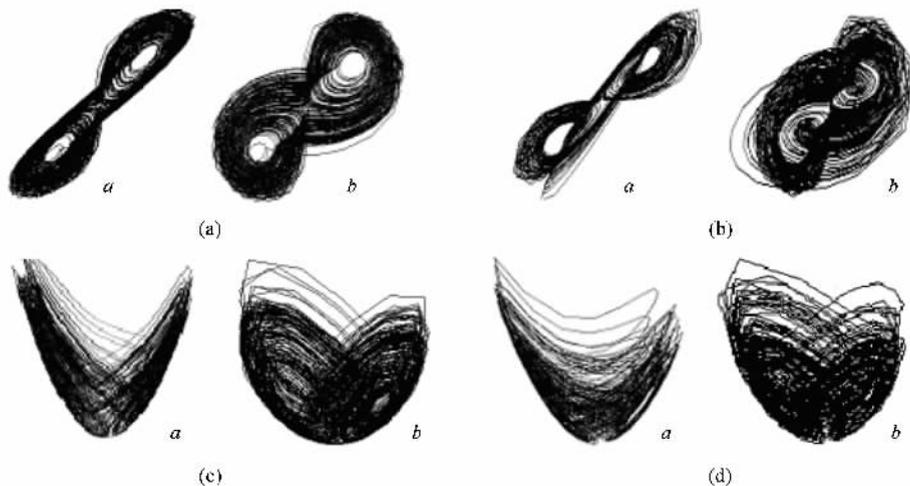


图 1 4 个混沌系统的相图比较 (a) $f_1 = xy, f_2 = yz$ (b) $f_1 = x^2, f_2 = yz$ (c) $f_1 = xy, f_2 = y^2$ (d) $f_1 = x^2, f_2 = y^2$

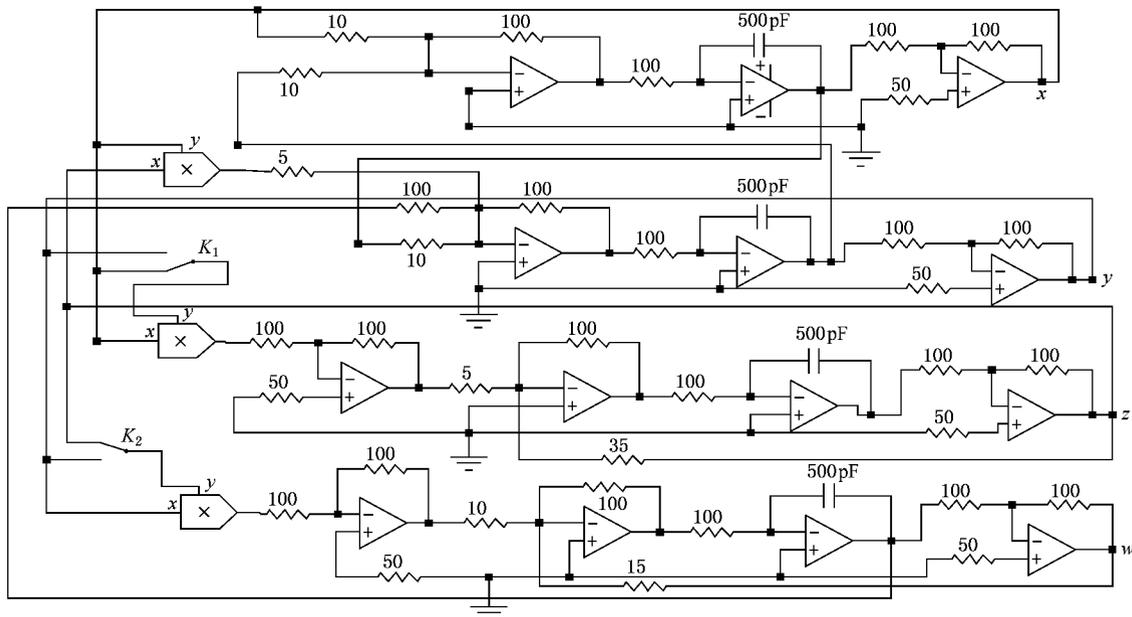


图 2 四维混沌系统实际电路图

3. 切换混沌同步

下面讨论驱动系统为可切换的四维混沌系统, 响应系统为某个固定的四维混沌系统的混沌同步问题. 让驱动系统的非线性函数 f_{11}, f_{12} 在 $(x_1, y_1, z_1, w_1), (x_1^2, y_1, z_1, w_1), (x_1, y_1, y_1^2, z_1, w_1), (x_1^2, y_1^2, z_1, w_1)$ 四种组合中选择, 则驱动系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + ay_1, \\ \dot{y}_1 = bx_1 + w_1 - 20x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + 20f_{11}(x_1, y_1), \\ \dot{w}_1 = -dw_1 + 10f_{12}(y_1, z_1), \end{cases} \quad (4)$$

不失一般性, 取响应系统非线性函数 $f_{21} = x_2^2, f_{22} = y_2^2$. 响应系统为一个固定的四维混沌系统. 利用非线性反馈控制方法实现驱动系统 (4) 和响应系统 (5) 的混沌同步. 非线性反馈控制器 $u_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 施

加在响应系统上,则响应系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -ax_2 + ay_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 = bx_2 + w_2 - 20x_2z_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 = -cz_2 + 20x_2^2 + u_3, \\ \dot{w}_2 = -dw_2 + 10y_2^2 + u_4. \end{cases} \quad (5)$$

为了得到非线性反馈控制器 $u_i(t)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 的表达式,令误差变量 $e_1 = x_1 - x_2$, $e_2 = y_1 - y_2$, $e_3 = z_1 - z_2$, $e_4 = w_1 - w_2$,由(4)(5)式得到误差系统方程

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) - u_1, \\ \dot{e}_2 = (b - 20z_2)e_1 - 20x_1e_3 + e_4 - u_2, \\ \dot{e}_3 = 2\alpha(f_{11} - x_1^2) + 40x_1e_1 - 20e_1^2 - ce_3 - u_3, \\ \dot{e}_4 = 1\alpha(f_{12} - y_1^2) + 20y_1e_2 - 10e_2^2 - de_4 - u_4. \end{cases} \quad (6)$$

取非线性反馈控制器 $u_i(t)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 为

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_2 = (b - 20z_2)e_1 + ke_2 - 20x_1e_3, \\ u_3 = 2\alpha(f_{11} - x_1^2), \\ u_4 = 1\alpha(f_{12} - y_1^2) + 20y_1e_2, \end{cases} \quad (7)$$

式中 k 为反馈控制增益.(7)式是一个变结构非线性反馈控制器,其结构随着驱动系统可变化的非线性函数 f_{11} , f_{12} 的改变而改变,而驱动系统非线性函数 f_{11} , f_{12} 的变化可以通过拨动驱动系统中的切换开关(如图2所示)实现.

将(7)式代入(6)式并表示为 $\dot{x} = A(t)x + \alpha(x, t)$ 的形式^[11],则误差系统方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \\ 40x_1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20e_1^2 \\ -10e_2^2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

定理:对于相互关联四维混沌系统(4)和系统(5),在如(7)式的变结构非线性反馈控制器作用下,当反馈控制增益 $k > 0$ 时,二系统实现完全混沌同步.

证明:由(8)式可知,误差变量的零点是误差系

统的平衡点.根据非线性系统的线性化稳定性定理^[10],误差系统(8)的线性矩阵

$$A(t) = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 1 \\ 40x_1 & 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d \end{bmatrix} \quad (9)$$

为时变矩阵,由于系统处于混沌状态,系统变量在一定的吸引域内变化,因此 $A(t)$ 对所有的 t 有界.由(9)式知,当反馈控制增益 $k > 0$ 时,矩阵 A 的所有特征值都具有负实部,因此线性系统 $\dot{e} = A(t)e$ 的零解一致渐近稳定.

误差系统(8)的非线性项 $O(e, t) = [0 \ 0 \ -20e_1^2 \ -10e_2^2]^T$,对所有的 t 有 $O(0, t) = 0$,且 $\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \frac{\|O(e, t)\|}{\|e\|} = 0$ 对 t 一致成立.所以误差系统(8)在其原点处渐近稳定,也意味着在变结构非线性反馈控制器作用下系统(4)与系统(5)达到混沌同步.定理得证.

对系统进行数值实验时,取系统参数 $a = 10$, $b = 40$, $c = 2.5$, $d = 5$,系统变量的初值为($x_1(0) = y_1(0) = z_1(0) = w_1(0) = 1.6$, $x_2(0) = y_2(0) = z_2(0) = w_2(0) = 0.1$)时,采用四阶龙格-库塔法,采样步长为 0.01 s.取驱动系统非线性函数为 $f_{11} = x_1y_1$, $f_{12} = y_1z_1$,响应系统非线性函数 $f_{21} = x_2^2$, $f_{22} = y_2^2$,驱动系统和响应系统的非线性函数不相同,因此,驱动系统和响应系统是两个不同的系统.在非线形反馈控制器(7)式的作用下,当反馈控制增益 $k = 0.2$ 时,二个不同的系统很快实现混沌同步.图3是二个不同系统误差变量 e_3 的时域图.

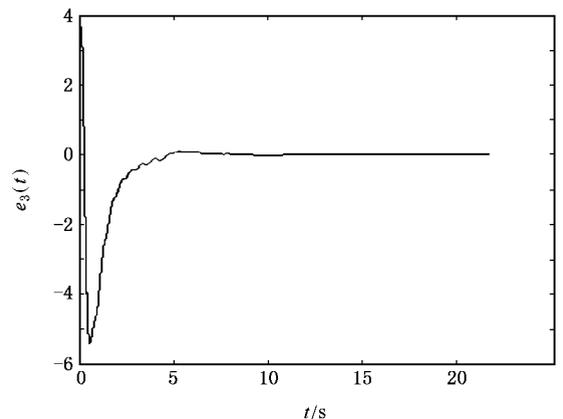


图3 控制不同系统混沌同步

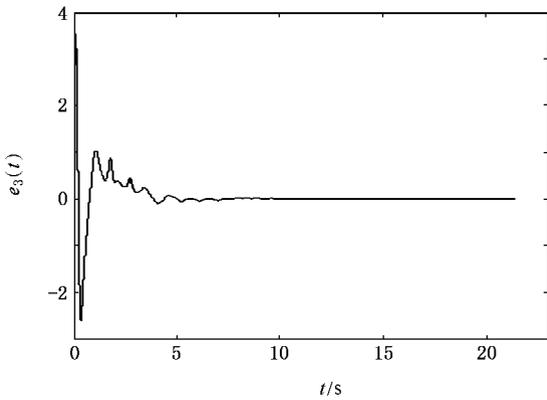


图4 控制相同系统混沌同步

保持系统初值不变,取驱动系统非线性函数为 $f_{11} = x_1^2$, $f_{12} = y_1^2$, 响应系统非线性函数 $f_{21} = x_2^2$, $f_{22} = y_2^2$, 驱动系统和响应系统的非线性函数相同,因此,响应系统是驱动系统的复制系统.在非线形反馈控制器(7)式的作用下,当反馈控制增益 $k = 0.2$ 时,二个相同系统很快实现混沌同步.图4是二个相同系统误差变量 e_3 的时域图.

当然,当响应系统非线性函数确定为 $f_{21} = x_2^2$ 和 $f_{22} = y_2^2$ 时,驱动系统的非线性函数可在 $f_{11} = x_1 y_1$, $f_{11} = x_1^2$ 和 $f_{12} = y_1 z_1$, $f_{12} = y_1^2$ 中任意选择,四种形式的驱动系统都可以利用变结构非线性反馈控制器(7)式实现驱动系统与响应系统的混沌同步.图5就是每隔 20 s 通过拨动图2中的切换开关随机改变驱动系统的非线性函数 f_{11} , f_{12} .在变结构非线性反馈控制器(7)式的作用下,当反馈控制增益 $k = 0.2$ 时,驱动系统和响应系统的误差变量 e_3 的时域图.

从图5可见,虽然驱动系统的非线性函数 f_{11} , f_{12} 在随机切换,但在变结构非线性反馈控制器(7)式的作用下,响应系统仍能够很快与驱动系统实现混沌同步.

由于响应系统与驱动系统实现混沌同步时,同步信号由驱动系统决定,因此,当驱动系统随机切换时,传输信道中的混沌信号也随之改变.图6表示在变结构非线性反馈控制器(7)式的作用下,响应系统(5)式与四个驱动系统(4)式实现混沌同步时,从示波器上观测到的系统变量 w_1 和 w_2 的时域图.

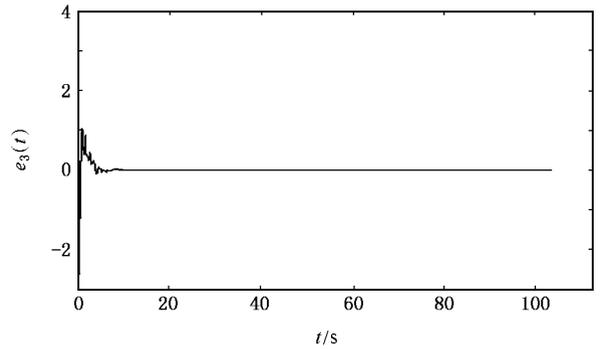


图5 控制多个系统与一个系统混沌同步

由此可见,当响应系统确定时,能与其实现混沌同步的驱动系统存在多种选择,这种选择的多样性,带来了驱动系统和响应系统组合的随机性和灵活性,也导致了传输信道中混沌同步信号变化的多样性^[14,20].将这种多个驱动系统与一个响应系统的切换混沌同步技术应用到保密通讯,能提高保密通讯的安全性能.

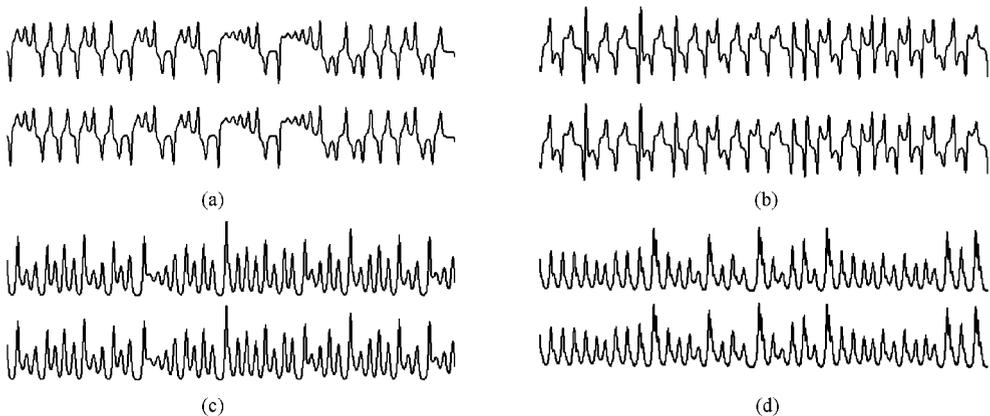


图6 4个驱动系统与某个响应系统混沌同步结果比较 (a) $f_1 = xy$, $f_2 = yz$ (b) $f_1 = x^2$, $f_2 = yz$ (c) $f_1 = xy$, $f_2 = y^2$ (d) $f_1 = x^2$, $f_2 = y^2$

4. 结 论

本文建构的一类可切换的四维混沌系统形式多样,物理实现灵活方便.利用系统变量非线性反馈控

制方法,实现了这类四维混沌系统与某个系统之间的切换混沌同步.非线性反馈控制混沌同步方法简单,物理实现容易.作者将对这类四维混沌系统可能产生的超混沌行为和基于多系统切换混沌同步的保密通讯技术,作进一步的研究.

- [1] Peng J H , Ding E J , Ding M , Yang W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [2] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaos Control , Synchronization and its Application* (Beijing : National Defense Industry Publishing House) [in Chinese] [王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)]
- [3] Thamilaran K , Lakshmanan M , Venkatesan A 2004 *Inter. J. Bifur. Chaos.* **14** 221
- [4] Lu J G 2006 *Chin. Phys.* **15** 83
- [5] Qi G Y , Du S Z , Chen G R , Chen Z Q , Yuan Z Z 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **22** 1671
- [6] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 963
- [7] Tamasevicius A , Namajunas A , Cenys A 1996 *Electronics Letters* **32** 957
- [8] Zou Y L , Zhu J , Chen G R 2005 *Chin. Phys.* **14** 697
- [9] Lorenz E N 1963 *J. Atoms. Sci.* **20** 130
- [10] Liu C X , Liu T , Liu L , Liu K 2004 *Chaos , Solitons & Fractals* **22** 1031
- [11] Liu Y Z , Fei S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3486 [刘扬正、费树岷 2005 物理学报 **54** 3486]
- [12] Ning D , Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 [宁 娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [13] Min F H , Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 [闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
- [14] Liu Y Z , Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 [刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035]
- [15] Park J H 2006 *Chaos , Solitons & Fractals* **27** 549
- [16] Gong X F , Lai C H 1999 *Chaos , Solitons & Fractals* **11** 1231
- [17] Yassen M T 2005 *Chaos , Solitons & Fractals* **23** 131
- [18] Cuomo K M , Oppenheim A V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 65
- [19] Lian K Y , Liu P 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst. - I* **47** 1418
- [20] Zhang J S , Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121]

Chaos switch-synchronization for a class of 4-D chaotic systems^{*}

Liu Yang-Zheng^{1)†} Jiang Chang-Sheng¹⁾ Lin Chang-Sheng²⁾

1) (College of Automatic Engineering , Nanjing University of Aeronautics and Astronautics , Nanjing 210016 , China)

2) (Institute of Nonlinear Physics , Nanjing Institute of Technology , Nanjing 210013 , China)

(Received 24 May 2006 ; revised manuscript received 8 July 2006)

Abstract

A class of switchable four-dimensional chaotic systems is built by adding an additional state to the three-order Lorenz system or Liu system. Some of its basic dynamical properties are studied briefly, such as the feature of equilibrium, the chaos attractor, Lyapunov exponent and fractal dimension. An electronic circuit is designed to realize the class of switchable four-dimensional chaotic systems. A method of chaos switch-synchronization between several chaotic systems based on nonlinear feedback control is proposed. Based on the stability theory, the functions of the nonlinear feedback control for synchronization of these systems are determined and the range of available feedback gain is derived.

Keywords : nonlinear feedback control , chaos switch-synchronization , the 4-D chaotic system

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90405011), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province ,China (Grant No. 05KJD120083) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology ,China (Grant No. KXJ06047).

[†] E-mail :lyz64@njit.edu.cn