第 56 卷 第 2 期 2007 年 2 月
1000-3290/2007/56(02)/0755-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.2,February,2007

几种典型背景中 Green-Schwarz 超弦的 κ-对称性*

王展云[1)2)†] 王晓辉[2)] 石康杰[2)] 岳瑞宏[2)]

1)(西安邮电学院电子与信息工程系,西安 710121)

2)(西北大学现代物理研究所,西安 710069)

(2006 年 8 月 6 日收到;2006 年 9 月 4 日收到修改稿)

Metsaev 和 Tseytlin(MT)给出的 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中 Green-Schwarz(GS) IIB 超弦的 Polyakov 作用量可以写成等价的 Nambu-Goto 形式. 对于这种形式,给出了新的与靶空间的流有关的投影算子,并用其构造了使作用量不变的局域 κ-变换. κ-对称性的这种新方案是由 Schwarz 对于 GS 模型提出的. 由于 MT 模型与 GS 模型有所不同,文中所构造的局域 κ-变换有一些新的特点,且适用于其他类似于 MT 模型的系统. 文中分别以 $AdS_5 \otimes S^1$ 背景中 IIB 弦及 Polyakov 新提出的模型为例,构造了 κ-对称性的靶空间形式.

关键词:Green-Schwarz 超弦,κ-对称性,$AdS_5 \otimes S^5$,$AdS_5 \otimes S^1$

PACC:1130L,1190

1. 引 言

用统一的理论来研究自然界的四种基本相互作用是人类长期追求的目标,超弦理论(准确地讲 M 理论)是迄今为止最有希望能将四种基本相互作用统一起来的理论. 特别它是能使引力理论[1,2](广义相对论)与量子论相容.

由于 Maldacena[3] 著名的 AdS/CFT 对应猜想将 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景中的 IIB 超弦理论与 $N=4, d=4$ 的具有超共形对称性的超对称规范理论完全等同起来[4,5],使得 AdS 空间背景下的弦理论得到广泛的关注. Metsaev 和 Tseytlin[6,7] 提出在 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景下的 IIB 超弦模型(MT 模型),可以看作是在陪集超空间 $\dfrac{SU(2,2|4)}{SO(4,1)\otimes SO(5)}$ 上含有 Wess-Zumino-Witten 项的二维非线性 σ 模型[6,8—13]. 它具有时空整体的 $SU(2,2|4)$ 超对称性以及世界面上的局域的 κ-对称性. 他们构造了一个在陪集超空间 $\dfrac{SU(2,2|4)}{SO(4,1)\otimes SO(5)}$ 中的 Polyakov 类型作用量,推导出运动方程,并给出了使作用量不变的 κ-变换. 最近,Bena,Polchinski 和 Roiban[14] 证明了这个模型是可积的. Polyokov 认为 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景下 GS IIB 弦的可积性与 κ-对称性之间可能有很重要的联系. 可积性使物理问题可以解析求解,这在理论上有重要意义. 因此低维可积场论[15] 及相应的孤子理论[16,17] 备受物理界重视.

κ-对称性是 GS 弦理论中作用量所具有的一种局域对称性:作用量在局域 κ-变换下不变. 最早由 Siegel[18] 对于超粒子[19] 提出这种费米对称性,后来应用于超弦[20]. κ-对称性能够去掉原来模型中的多余费米自由度,从而实现超对称,所以是 Green-Schwarz 弦理论中的重要组成部分[21].

在最初 Green 和 Schwarz 的开创性论文[20,22] 中,作用量采用 Polyakov 作用量形式,其中包括度规张量 g_{ij} 作为动力学变量出现在作用量中. 作用量对 g_{ij} 的变分给出 g_{ij} 与其他场量的关系式,称为 virasoro 约束. 如果将这个约束关系代入作用量中就会得到不含 g_{ij} 的作用量表达式,这就是 Nambu-Goto 型作用量. 当满足 virasoro 约束时,我们称系统的变量是在质壳上(on-shell),而不满足 virasoro 约束时系统的变量是在质壳外(off-shell). 在文献[6]中,对 κ-对称性用的是传统做法,κ-变换包含场量的变换和度规的变换. 这两部分变换对作用量的贡献互相抵消,使得作用量不变. 这种做法有一定的缺点. 首先,由于

* 国家自然科学基金(批准号:10575080)资助的课题.

† E-mail:zywang81@sohu.com

virasoro 约束,场量的变更本身就可能会带来度规的变更.如果要求 g_{ij} 满足另外的变更,就可能会减少 κ-变换原有的自由度,至少对其中的变换参量 κ^{jI} 要有约束.

其次,在 off-shell 时所给出的底空间形式的 κ-变换中,$\delta_\kappa\theta$ 的自由度是满秩的.对 $D=10$,$\delta_\kappa\theta^1$,$\delta_\kappa\theta^2$ 各有 16 种可能的线性独立形式.由于 g_{ij} 被认为是独立的动力学变量,因而 $\delta_\kappa\theta$ 实际上是任意的.但是在 on-shell 时,κ-变换中 $\delta_\kappa\theta$ 的自由度不是满秩的,只有 off-shell 情况中的一半.采用 Polyakov 作用量得出 on-shell 情况下底空间形式的 κ-变换中,$\delta_\kappa(\sqrt{-g}g_{ij})$ 对 Polyakov 作用量变分没有贡献,是多余的.

由于以上原因,传统的用底空间投影算子给出的 Polyakov 作用量的 κ-变换形式概念复杂、含混,不能直接看出自由度的数目.可能正是由于这些缺点,Schwarz 后来对 GS 模型[20,22] 提出了一种新的 κ-对称性方案[23],利用 virasoro 约束条件消去世界面度规 g_{ij},使作用量的动能部分变为 Nambu-Goto 型作用量,然后直接对 Nambu-Goto 型作用量构造 κ-变换.

因为在经典情形下系统必须是 on-shell 的,新方案对 Nambu-Goto 型作用量,给出新的与靶空间的流有关的投影算子,并用其构造使 Nambu-Goto 型作用量不变的 κ-变换.为明确起见,我们称这种新方案为靶空间形式的 κ-变换.靶空间形式的 κ-变换在许多概念上更加明了.而且已经将 virasoro 约束条件包含在作用量中,使得 κ-变换更加简洁,κ-变换中 $\delta_\kappa\theta$ 的自由度的秩更加明显.因而对于理论研究更有价值.

Schwarz[23] 的模型是在平直空间背景下的弦模型,他的新的 κ-变换方案要求模型中所有的 gamma 矩阵互相之间必须是反对易的.然而,对于 MT 模型,当采用惯用的 16×16 的 gamma 矩阵时,AdS_5 和 S^5 这两个空间中的 gamma 矩阵互相之间是对易的.所以,κ-变换的靶空间形式的构造与 GS 模型会有差异.当然,我们也可以采用十维空间中 32×32 的 gamma 矩阵来研究 κ-对称性的靶空间形式,使所有的 gamma 矩阵互相之间是反对易的.这种方案虽然更接近 Schwarz 的构造方法,但对于弯曲空间,仍需对 Schwarz 新的 κ-变换方案进行推广才能得到正确结果.本文用的是前一种方案,即 AdS_5 和 S^5 空间中的 gamma 矩阵互相之间对易.因为它比较直接,而且符合多数文献的约定[6,24,25].

本文推广了 Schwarz 的新的 κ-变换方法到 AdS 这样的弯曲空间中去,给出了 MT 模型具体 κ-变换方案.这种推广对所有的与 MT 模型类似的模型都适用.作为例子,我们给出 $AdS_5\otimes S^1$ 背景中弦模型新的 κ-变换方案.我们在第 4 节还给出了 Polyakov 模型[26] 的 κ-变换新方案.这个模型与 GS 模型有较大的不同.这些 AdS 空间的模型有一些不同于 GS 模型的特点,因此本文的 κ-变换方案也有相应的创新.

2. $AdS_5\otimes S^5$ 背景中的 IIB 弦作用量的 κ-对称性

2.1. $AdS_5\otimes S^5$ 背景中 GS 弦作用量和 κ-对称性的底空间(传统)形式

与十维平直时空中 Poincare 超群的作用一样,超群 $SU(2,2|4)$ 是在 $AdS_5\otimes S^5$ 背景中运动的 IIB 型超弦所具有的整体超对称群.$AdS_5\otimes S^5$ 背景中的 IIB 弦场量取值在陪集超空间 $\dfrac{SU(2,2|4)}{SO(4,1)\otimes SO(5)}$ 上,这里 $SO(4,1)\otimes SO(5)$ 是稳定子群.陪集超空间的玻色部分为

$$\frac{SO(4,2)}{SO(4,1)}\otimes\frac{SO(6)}{SO(5)}=AdS_5\otimes S^5,$$

其中 $SO(4,2)$,$SO(6)$ 分别是 AdS_5 和 S^5 的等长变换群(isometry group).陪集超空间玻色部分的坐标是 x^a,$x^{a'}$.费米部分的坐标是 $\theta^{\alpha\alpha' I}$,这里 $\theta^{\alpha\alpha' I}$ 是具有相同手征性的 32 分量的旋量.超代数 $su(2,2|4)$ 的生成元由玻色和费米两部分组成.玻色生成元分别由 AdS_5 和 S^5 中的两套平移和转动算符 (P_a, J_{ab}) 和 $(P_{a'}, J_{a'b'})$ 组成,其中 $a,b,c,d=0,1,2,3,4$; $a',b',c',d'=5,6,7,8,9$.费米生成元由两组 Majorana-Weyl 旋量 $Q_{\alpha\alpha' I}$ 组成,这里指标 $I,J=1,2$; $\alpha,\beta=1,2,3,4$ 是 AdS_5 中的旋量指标;$\alpha',\beta'=1,2,3,4$ 是 S^5 中的旋量指标.

超代数 $su(2,2|4)$ 的生成元 $T_A=(P_a, J_{ab}, P_{a'}, J_{a'b'}, Q_{\alpha\alpha' I})$ 所满足的对易关系如下:

$$\begin{aligned}
[P_a, P_b] &= J_{ab},\\
[P_{a'}, P_{b'}] &= -J_{a'b'},\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= \eta_{bc}J_{ad}+\eta_{ad}J_{bc}-\eta_{ac}J_{bd}-\eta_{bd}J_{ac},\\
[J_{a'b'}, J_{c'd'}] &= \eta_{b'c'}J_{a'd'}+\eta_{a'd'}J_{b'c'}\\
&\quad -\eta_{a'c'}J_{b'd'}-\eta_{b'd'}J_{a'c'},\\
[P_a, J_{bc}] &= \eta_{ab}P_c-\eta_{ac}P_b,\\
[P_{a'}, J_{b'c'}] &= \eta_{a'b'}P_{c'}-\eta_{a'c'}P_{b'},
\end{aligned}$$

$$[Q_{\alpha\alpha' I},\ P_a] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\in_{IJ}Q_{\beta\alpha' J}(\gamma_a)_\alpha^{\ \beta},$$

$$[Q_{\alpha\alpha' I},\ P_{a'}] = \frac{1}{2}\in_{IJ}Q_{\alpha\beta' J}(\gamma_{a'})_{\alpha'}^{\ \beta'},$$

$$[Q_{\alpha\alpha' I},\ J_{ab}] = -\frac{1}{2}Q_{\beta\alpha' I}(\gamma_{ab})_\alpha^{\ \beta},$$

$$[Q_{\alpha\alpha' I},\ J_{a'b'}] = -\frac{1}{2}Q_{\alpha\beta' I}(\gamma_{a'b'})_{\alpha'}^{\ \beta'},$$

$$\begin{aligned}\{Q_{\alpha\alpha' I}, Q_{\beta\beta' J}\} = \delta_{IJ}[&-2\mathrm{i}C'_{\alpha'\beta'}(C\gamma^a)_{\alpha\beta}P_a\\ &+2C_{\alpha\beta}(C'\gamma^{a'})_{\alpha'\beta'}P_{a'}]\\ &+\in_{IJ}[C'_{\alpha'\beta'}(C\gamma^{ab})_{\alpha\beta}J_{ab}\\ &-C_{\alpha\beta}(C'\gamma^{a'b'})_{\alpha'\beta'}J_{a'b'}].\end{aligned}\tag{1}$$

在这里，玻色指标的升降可通过五维度规 $\eta_{ab}=\eta^{ab}=(-++++)$ 和 $\eta_{a'b'}=\eta^{a'b'}=(+++++)$ 来实现. gamma 矩阵 γ^a 和 $\gamma^{a'}$ 分别是 $so(4,1)$ 和 $so(5)$ Clifford 代数生成元，是 4×4 的矩阵. 且有

$$\begin{aligned}\{\gamma^a,\gamma^b\} &= 2\eta^{ab},\\ \{\gamma^{a'},\gamma^{b'}\} &= 2\eta^{a'b'}.\end{aligned}\tag{2}$$

在以下我们写出的 $\gamma^a,\gamma^{a'}$ 将分别表示 $\gamma^a\otimes\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{I}\otimes\gamma^{a'}$，$\boldsymbol{I}$ 是 4×4 单位矩阵. 因而下文中的 γ^a 和 $\gamma^{a'}$ 都是 16×16 的矩阵，而相应的旋量也都是 16 分量的.

C,C' 分别是 $SO(4,1)$ 和 $SO(5)$ 空间的 4×4 的电荷共轭矩阵

$$C = C' = \begin{bmatrix}\mathrm{i}\sigma^2 & 0\\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^2\end{bmatrix},\tag{3}$$

$C=C_{\alpha\beta}$，$C'=C'_{\alpha'\beta'}$. 对应于上面约定的 16×16 的 gamma 矩阵，我们约定 $\boldsymbol{C}=C\otimes C'$. 这里 $C\gamma^a,C'\gamma^{a'}$，C,C' 都是反对称矩阵，$C\gamma^{ab}$，$C'\gamma^{a'b'}$ 是对称矩阵. Levi-Civita 符号定义为 $\in^{12}=-\in^{21}=1$.

Metsaev 和 Tseytlin[6] 给出的 $AdS_5\otimes S^5$ 背景中 IIB 弦的作用量，即

$$\begin{aligned}S &= S_0+S_1,\\ S_0 &= -\frac{1}{2}\int_{\partial M_3}d^2\sigma\sqrt{-g}g^{ij}(L_i^aL_j^a+L_i^{a'}L_j^{a'}),\\ S_1 &= \mathrm{i}\int_{M_3}s^{IJ}(L^a\wedge\bar{L}^I\gamma^a\wedge L^J\\ &\quad+\mathrm{i}L^{a'}\wedge\bar{L}^I\gamma^{a'}\wedge L^J)\\ &= -2\int_{\partial M_3}\bar{L}^1\wedge L^2,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 S_0 是动能项，S_1 是 Wess-Zumino 项，$s^{IJ}=\mathrm{diag}(1,-1)$. $g=\det[g_{ij}]$，$g^{ij}g_{jl}=\delta_l^i$，$[g^{ij}]$ 是世界叶上的度规. 这里及以后重复上指标也表示求和，即 $L_i^aL_j^a\equiv\sum_{a,b}L_i^aL_j^b\eta_{ab}$.

左不变的 Maurer-Carton 1-形式 $L^A=\mathrm{d}X^ML_M^A$，$X^M=(x,\theta)$ 由流

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= G'^{-1}\mathrm{d}G'\\ &= L^aP_a+L^{a'}P_{a'}+\frac{1}{2}L^{ab}J_{ab}\\ &\quad+\frac{1}{2}L^{a'b'}J_{a'b'}+L^{\alpha\alpha' I}Q^I_{\alpha\alpha'}\end{aligned}$$

给出，这里 $G'=G'(x,\theta)$ 是超群 $SU(2,2|4)$ 的陪集代表元. L^I 是 Majorana 旋量，它的狄拉克共轭由 $\bar{L}^I=(L^I)^tC\otimes C'$ 给出. 上式中各 Maurer-Carton 1-形式带下标表示此 1-形式在底空间坐标 σ,τ 方向的分量. 所以指标 $i,j,k=1,2$.

为验证 κ-对称性及得到运动方程我们需要用到 Maurer-Carton 1-形式的变分. 我们通过右乘做这样的变分 $G'\to G''\simeq G'(1+\omega)$，其中

$$\begin{aligned}\omega &= G'^{-1}\delta G'\\ &\equiv P_a\delta x^a+P_{a'}\delta x^{a'}+\frac{1}{2}J_{ab}\delta x^{ab}\\ &\quad+\frac{1}{2}J_{a'b'}\delta x^{a'b'}+Q^I_{\alpha\alpha'}\delta\theta^{\alpha\alpha' I},\end{aligned}$$

是一个无穷小代数元(不是微分形式). 流 $\boldsymbol{L}=G'^{-1}\mathrm{d}G'$，由 $\delta\boldsymbol{L}=\mathrm{d}\omega+[\boldsymbol{L},\omega]$ 得到 Maurer-Cartan 1-形式的变分如下：

$$\begin{aligned}\delta L^a &= \mathrm{d}\delta x^a+L^{ab}\delta x^b+L^b\delta x^{ba}+2\mathrm{i}\bar{L}^I\gamma^a\delta\theta^I,\\ \delta L^{a'} &= \mathrm{d}\delta x^{a'}+L^{a'b'}\delta x^b+L^{b'}\delta x^{b'a'}-2\bar{L}^I\gamma^{a'}\delta\theta^I,\\ \delta L^I &= \mathrm{d}\delta\theta^I+\frac{\mathrm{i}}{2}\in^{IJ}(\delta x^a\gamma^a+\mathrm{i}\delta x^{a'}\gamma^{a'})L^J\\ &\quad-\frac{\mathrm{i}}{2}\in^{IJ}(L^a\gamma^a+\mathrm{i}L^{a'}\gamma^{a'})\delta\theta^J\\ &\quad-\frac{1}{4}(\delta x^{ab}\gamma^{ab}+\delta x^{a'b'}\gamma^{a'b'})L^I\\ &\quad+\frac{1}{4}(L^{ab}\gamma^{ab}+L^{a'b'}\gamma^{a'b'})\delta\theta^I.\end{aligned}\tag{5}$$

$AdS_5\otimes S^5$ 背景中 IIB 弦的作用量(4)式具有局域的 κ-对称性[6]，相应的 κ-变换为

$$\begin{aligned}\delta_\kappa x^a &= \delta_\kappa x^{a'} = 0,\\ \delta_\kappa\theta^I &= 2(L_i^a\gamma^a-\mathrm{i}L_i^{a'}\gamma^{a'})\kappa^{iI},\\ \delta_\kappa(\sqrt{-g}g^{ij}) &= -16\mathrm{i}\sqrt{-g}(P_-^{jk}\bar{L}_k^1\kappa^{i1}+P_+^{jk}\bar{L}_k^2\kappa^{i2}),\end{aligned}\tag{6}$$

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij}\pm\frac{1}{\sqrt{-g}}\in^{ij}\right).\tag{7}$$

κ^{iI} 为 16 分量旋量，满足自对偶约束

$$P_-^{ij}\kappa_j^1 = \kappa^{i1},\ P_+^{ij}\kappa_j^2 = \kappa^{i2}.\tag{8}$$

κ-对称性是 Green-Schwarz 弦模型具有的重要性质. (4)式中 S_0 项为 Polyakov 作用量，在经典意义上

是与 Nambu-Goto 作用量等价的. 从上面的变换可看出这里投影算子(7)式是用底空间度规张量 g^{ij} 和二阶 Levi-Civita 符号 $\in^{ij}$ 来描述的. 我们称之为 κ-变换的底空间形式. 这种形式由于包含额外的度规变换 $\delta_\kappa(\sqrt{-g}g^{ij})$，因而有引言中所说的缺点.

2.2. Nambu-Goto 型作用量和 κ-变换的靶空间形式

我们将 virasoro 约束条件代入，作用量中的动能项就可以采用物理意义更加明确的 Nambu-Goto 形式，Wess-Zumino 项能表示成一个二形式在三维光滑定向紧致流形边缘上的积分：

$$\begin{aligned}S &= S_0 + S_1\\&= -\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G} + \mathrm{i}\int_{M_3}s^{IJ}\\&\quad\times(L^a\wedge\bar{L}^I\gamma^a\wedge L^J + \mathrm{i}L^{a'}\wedge\bar{L}^I\gamma^{a'}\wedge L^J)\\&= -\int_{\partial M_3}(\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G} + 2\bar{L}^1\wedge L^2),\end{aligned}\tag{9}$$

其中 S_0 是 Nambu-Goto 作用量，S_1 是 Wess-Zumino 项(这里 γ^a 和 $\gamma^{a'}$ 是 16×16 的矩阵). G_{ij} 是诱导度规，$G=\det[G_{ij}]$，矩阵元 $G_{ij}=L_i^aL_j^a+L_i^{a'}L_j^{a'}$.

定义

$$\begin{aligned}\not{L}_i^+ &\equiv L_i^a\gamma^a + \mathrm{i}L_i^{a'}\gamma^{a'},\\\not{L}_i^- &\equiv L_i^a\gamma^a - \mathrm{i}L_i^{a'}\gamma^{a'},\\G_{ij} &= L_i^aL_j^a + L_i^{a'}L_j^{a'} \equiv L_i\cdot L_j.\end{aligned}\tag{10}$$

由(2)式可以证明

$$\begin{aligned}2G_{ij} &= \not{L}_i^+\not{L}_j^- + \not{L}_j^+\not{L}_i^-\\&= \not{L}_i^-\not{L}_j^+ + \not{L}_j^-\not{L}_i^+,\end{aligned}\tag{11}$$

$$G_{ii} = \not{L}_i^+\not{L}_i^- = \not{L}_i^-\not{L}_i^+.\tag{12}$$

上式对 i 不求和. G 矩阵可以表示为

$$[G_{ij}] = \begin{bmatrix}L_1\cdot L_1 & L_1\cdot L_2\\L_2\cdot L_1 & L_2\cdot L_2\end{bmatrix}\tag{13}$$

Nambu-Goto 项中

$$\begin{aligned}G \equiv \det[G_{ij}] &= (L_1\cdot L_1)(L_2\cdot L_2)\\&\quad-(L_1\cdot L_2)(L_2\cdot L_1).\end{aligned}\tag{14}$$

下面我们构造针对 Nambu-Goto 型作用量(9)式的 κ-变换新形式. 首先在(5)式的 Maurer-Carton 1-形式的变更中，我们令玻色量的变更 $\delta_\kappa x^a$，$\delta_\kappa x^{ab}$，$\delta_\kappa x^{a'}$，$\delta_\kappa x^{a'b'}$ 均为零，只取费米量变更 $\delta_\kappa\bar{\theta}^1$，$\delta_\kappa\bar{\theta}^2$. 对作用量求变分，得到 Nambu-Goto 项的变分为

$$\delta_\kappa S_0 = 2\mathrm{i}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}G^{ij}\delta_\kappa\bar{\theta}^I\not{L}_j^+L_i^I,\tag{15}$$

Wess-Zumino 项

$$S_1 = \mathrm{i}\int_{M_3}H,\tag{16}$$

$$\begin{aligned}H &= s^{IJ}(L^a\wedge\bar{L}^I\gamma^a\wedge L^J + \mathrm{i}L^{a'}\wedge\bar{L}^I\gamma^{a'}\wedge L^J),\\\delta H &= \mathrm{d}\Lambda,\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\Lambda &= s^{IJ}(\bar{L}^I\gamma^a\wedge L^J\delta x^a + 2L^a\wedge\bar{L}^I\gamma^a\delta\theta^J\\&\quad+\mathrm{i}\bar{L}^I\gamma^{a'}\wedge L^J\delta x^{a'} + 2\mathrm{i}L^{a'}\wedge\bar{L}^I\gamma^{a'}\delta\theta^J).\end{aligned}\tag{18}$$

Wess-Zumino 项 S_1 的变分

$$\begin{aligned}\delta_\kappa S_1 &= 2\mathrm{i}\in^{ij}s^{IJ}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\delta_\kappa\bar{\theta}^I\not{L}_j^+L_i^J\\&= 2\mathrm{i}\in^{ij}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma(\delta_\kappa\bar{\theta}^1\not{L}_j^+L_i^1 - \delta_\kappa\bar{\theta}^2\not{L}_j^+L_i^2).\end{aligned}\tag{19}$$

因此得到总作用量的变分为

$$\begin{aligned}\delta_\kappa S &= 4\mathrm{i}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}\\&\quad\times(\delta_\kappa\bar{\theta}^1P_+^{ij}\not{L}_j^+L_i^1 + \delta_\kappa\bar{\theta}^2P_-^{ij}\not{L}_j^+L_i^2),\end{aligned}\tag{20}$$

这里定义了

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}\left(G^{ij}\pm\frac{\in^{ij}}{\sqrt{-G}}\right),\tag{21}$$

其中 G^{ij} 是矩阵 $[G_{ij}]$ 的逆矩阵元. 这是与(7)式一致的底空间投影算子.

构造 16×16 的矩阵

$$\gamma = -\frac{\in^{ij}\not{L}_i^+\not{L}_j^-}{2\sqrt{-G}},\ \gamma^2 = 1,\ \mathrm{tr}\gamma = 0.\tag{22}$$

由(11)和(14)式可以证明

$$\begin{aligned}&(\not{L}_1^+\not{L}_2^- - \not{L}_2^+\not{L}_1^-)\not{L}_1^+\\&= (-\not{L}_2^+\not{L}_1^- + 2G_{12})\not{L}_1^+ - \not{L}_2^+\not{L}_1^-\not{L}_1^+\\&= -2\not{L}_2^+(\not{L}_1^-\not{L}_1^+) + 2G_{12}\not{L}_1^+\\&= -2G_{11}\not{L}_2^+ + 2G_{12}\not{L}_1^+,\end{aligned}\tag{23}$$

类似地

$$\begin{aligned}&(\not{L}_1^+\not{L}_2^- - \not{L}_2^+\not{L}_1^-)\not{L}_2^+\\&= -2G_{12}\not{L}_2^+ + 2G_{22}\not{L}_1^+.\end{aligned}\tag{24}$$

再由 $P_\pm^{ij}$ 的表达式(21)，计算得到

$$(\not{L}_1^+\not{L}_2^- - \not{L}_2^+\not{L}_1^-)P_\pm^{ij}\not{L}_j^+ = \mp2\sqrt{-G}P_\pm^{ij}\not{L}_j^+.\tag{25}$$

即满足

$$\gamma P_\pm^{ij}\not{L}_j^+ = \pm P_\pm^{ij}\not{L}_j^+,\tag{26}$$

这时就有

$$(1\mp\gamma)P_\pm^{ij}\not{L}_j^+ = 0.\tag{27}$$

为得到局域的 κ-对称性，此时可以取 κ-变换为

$$\begin{aligned}\delta_\kappa x^a &= \delta_\kappa x^{a'} = 0,\\\delta_\kappa x^{ab} &= \delta_\kappa x^{a'b'} = 0,\\\delta_\kappa\bar{\theta}^1 &= \bar{\kappa}^1P_-,\end{aligned}$$

$$\delta_\kappa \bar{\theta}^2 = \bar{\kappa}^2 P_+ . \tag{28}$$

这里定义了新的与 Maurer-Carton 1-形式有关的投影算子 $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma)$(我们称之为靶空间中的投影算子).由(27)式就可以保证(20)式中的 $\delta_\kappa S = 0$.

因为投影算子 $P_\pm$ 是靶空间的 16×16 矩阵,我们称这种形式的 κ-对称的方案为 κ-对称性的靶空间形式,其实也就是直接使 Nambu-Goto 作用量不变的 κ-对称变换.

由于 γ 的迹为零,而且 $\gamma^2 = 1$,所以 $P_\pm$ 的秩为 16×16 单位矩阵的一半.因而 $\delta_\kappa\bar{\theta}^I$ 的秩也是 8.又可以通过取特例证实(26)式中 $P_\pm^{ij} \not{L}_j^+$ 的秩不小于 8,因而 8 就是局域对称变换 $\delta_\kappa\bar{\theta}^I$ 最大的可能自由度数目.因此,总的 κ-对称自由度为 $8+8=16(I=1,2)$.更详细的分析说明,底空间形式的 κ-变换机理中 $\delta_\kappa(\sqrt{-g}g_{ij})$ 在 on-shell 时是对作用量变分没有贡献的.这时 κ-变换(6)式与现在给出的以靶空间投影算子给出的 κ-变换(28)式都能使作用量不变.但是现在的公式可以免去(6)式中 $\delta_\kappa(\sqrt{-g}g_{ij})$ 与由 $\delta_\kappa\bar{\theta}^I$ 引起的 $\delta_\kappa(\sqrt{-g}g_{ij})$ 的相洽性分析的麻烦.而且对 $\delta_\kappa\bar{\theta}^I$ 自由度的分析也更清楚.不同的 $\not{L}^+$ 和 $\not{L}^-$ 的引入是由于 $[\gamma^a, \gamma^{b'}] = 0$.这是 Schwarz 原来的方案[23]中没有的,这一特点在其他 MT 类型的模型中都存在.下一节就是一个例子.

3. $AdS_5\otimes S^1$ 背景中 GS 弦作用量的 κ-对称性

3.1. $AdS_5\otimes S^1$ 背景中 GS 弦作用量及运动方程

$AdS_5\otimes S^1$ 背景中的 GS 弦同样是一个 σ-模型加上 Wess-Zumino 项,只是 S^5 的部分换成 S^1,相应的 Maurer-Carton 1-形式为 L^R 和 $L^{a'}$.这里指标 $a' = 1, 2, 3$;Majorana 旋量 $L^{\alpha\alpha' I}$ 中 $\alpha' = 1, 2$. 它的陪集超空间为 $\frac{SU(2,2|2)}{SO(4,1)\otimes SO(3)}$, $SO(4,1)\otimes SO(3)$ 是稳定子群. γ^a 和 $\tau^{a'}$ 分别是 $SO(4,1)$ 和 $SO(3)$ Clifford 代数生成元,γ^a 是 4×4 的矩阵,$\tau^{a'}$ 是 2×2 的矩阵.以下我们写出的 γ^a,$\tau^{a'}$ 将分别表示 $\gamma^a\otimes \boldsymbol{I}_{2\times2}$ 和 $\boldsymbol{I}_{4\times4}\otimes\tau^{a'}$,都是 8×8 的矩阵,相应 8 的旋量也都是 8 分量的.超代数 $su(2, 2|2)$ 的生成元 P_a, J_{ab}, R, $T_{a'}$, $Q_{\alpha\alpha' I}$ 所满足的对易关系及 Clifford 代数的生成元与电荷共轭矩阵的具体实现详见文献[24].$AdS_5\otimes S^1$ 背景中的 GS 弦的作用量具有与 $AdS_5\otimes S^5$ 相似的形式[24]:

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1, \\ S_0 &= -\frac{1}{2}\int_{\partial M_3} \mathrm{d}^2\sigma \sqrt{-g}g^{ij}(L_i^a L_j^a + L_i^R L_j^R), \\ S_1 &= -2\int_{\partial M_3} \bar{L}^1 \wedge L^2 . \end{aligned} \tag{29}$$

S_0 为动能项,S_1 是 Wess-Zumino 项.

为验证 κ-对称性及得到运动方程,同样的,我们需要 Maurer-Cartan 1-形式的变分.超群 $su(2, 2|2)$ 的群元用 $G'(x, \theta)$ 表示,有

$$\begin{aligned} \omega &= G'^{-1}\delta G' \\ &\equiv P_a\delta x^a + R\delta x^R + \frac{1}{2}J_{ab}\delta x^{ab} \\ &\quad + T_{a'}\delta x^{a'} + Q_{\alpha\alpha'}^I\delta\theta^{I\alpha\alpha'}, \end{aligned}$$

及流

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= G'^{-1}\mathrm{d}G' \\ &= L^a P_a + L^R R + \frac{1}{2}L^{ab}J_{ab} \\ &\quad + L^{a'}T_{a'} + L^{\alpha\alpha' I}Q_{\alpha\alpha'}^I . \end{aligned}$$

同样地,由 $\delta\boldsymbol{L} = \mathrm{d}\omega + [\boldsymbol{L}, \omega]$,得到 Maurer-Cartan 1-形式的变分:

$$\begin{aligned} \delta L^a &= \mathrm{d}\delta x^a + L^{ab}\delta x^b + L^b\delta x^{ba} + 2\mathrm{i}\bar{L}^I\gamma^a\delta\theta^I, \\ \delta L^R &= \mathrm{d}\delta x^R - 2\bar{L}^I\delta\theta^I, \\ \delta L^I &= \mathrm{d}\delta\theta^I + \frac{\mathrm{i}}{2}\in^{IJ}(\delta x^a\gamma^a + \mathrm{i}\delta x^R)L^J \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{IJ}(L^a\gamma^a + \mathrm{i}L^R)\delta\theta^J \\ &\quad - \frac{1}{4}(\delta x^{ab}\gamma^{ab} + 2\delta x^{a'}T^{a'})L^I \\ &\quad + \frac{1}{4}(L^{ab}\gamma^{ab} + 2L^{a'}T^{a'})\delta\theta^I . \end{aligned} \tag{30}$$

由此能够得到 Wess-Zumino 项的变分为($s^{IJ} = \mathrm{diag}(1, -1)$)

$$\begin{aligned} \delta(\bar{L}^1 \wedge L^2) &= \mathrm{d}(\delta\bar{\theta}^1 L^2 - \bar{L}^1\delta\theta^2) \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}s^{IJ}\bar{L}^I(\delta x^a\gamma^a + \mathrm{i}\delta x^R) \wedge L^J \\ &\quad + \mathrm{i}s^{IJ}\delta\bar{\theta}^I(L^a\gamma^a + \mathrm{i}L^R) \wedge L^J . \end{aligned} \tag{31}$$

应用(30)和(31)式,我们得到用 Maurer-Cartan 1-形式所表达的运动方程如下:

$$\begin{aligned} &\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}L_j^a) + \sqrt{-g}g^{ij}L_i^{ab}L_j^b \\ &+ \mathrm{i}\in^{ij}s^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^a L_j^J = 0, \\ &\partial_i(\sqrt{-g}g^{ij}L_j^R) - \in^{ij}s^{IJ}\bar{L}_i^I L_j^J = 0, \\ &(\sqrt{-g}g^{ij}\delta^{IJ} - \in^{ij}s^{IJ})(L_i^a\gamma^a + \mathrm{i}L_i^R)L_j^J = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

在得到上述运动方程之外,在这里作用量对 g_{ij}

做变分得到 virasoro 约束

$$L_i^aL_j^a + L_i^RL_j^R = \frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}(L_k^aL_l^a + L_k^RL_l^R). \tag{33}$$

3.2. $AdS_5\otimes S^1$ 背景中 GS 弦的 κ-对称性

$AdS_5\otimes S^1$ 背景中 GS 弦的作用量所具有的局域 κ-对称性对应的 κ-变换如下：

$$\begin{aligned}
&\delta_\kappa x^a = \delta_\kappa x^{ab} = \delta_\kappa x^{a'} = \delta_\kappa x^R = 0,\\
&\delta_\kappa\theta^1 = P_-^{ij}(L_i^a\gamma^a - \mathrm{i}L_i^R)\kappa_j^1,\\
&\delta_\kappa\theta^2 = P_+^{ij}(L_i^a\gamma^a - \mathrm{i}L_i^R)\kappa_j^2,\\
&\quad\delta_\kappa(\sqrt{-g}g^{ij})\\
&= -8\mathrm{i}\sqrt{-g}(P_-^{il}P_-^{jk}\bar{L}_k^1\kappa_l^1 + P_+^{il}P_+^{jk}\bar{L}_k^2\kappa_l^2).
\end{aligned}\tag{34}$$

这里的两个投影算子 $P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij} \pm \frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{ij}\right)$ 具有如下性质：

$$\begin{aligned}
P_\pm^{ij} &= P_\mp^{ji},\\
P_\pm^{ij}P_\pm^{kl} &= P_\pm^{kj}P_\pm^{il}.
\end{aligned}\tag{35}$$

用(30)和(35)式可证明作用量(29)式在(34)式变换下不变.

下面我们给出 κ-对称性的靶空间形式. $AdS_5\otimes S^1$ 背景有一定特殊性：S^1 空间中的 gamma 矩阵是 8×8 单位矩阵. 同样地，这里作用量采用 Nambu-Goto 形式

$$S = -\int_{\partial M_3}(\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G} + 2\bar{L}^1\wedge L^2). \tag{36}$$

矩阵元 G_{ij} 的定义同上节类似

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= L_i^aL_j^a + L_i^RL_j^R \equiv L_i\cdot L_j,\\
[G_{ij}] &= \begin{bmatrix} L_1\cdot L_1 & L_1\cdot L_2\\ L_2\cdot L_1 & L_2\cdot L_2\end{bmatrix},\\
G &= \det[G_{ij}],
\end{aligned}\tag{37}$$

定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_j^+ &= L_j^a\gamma_a + \mathrm{i}L_j^R,\\
\mathcal{L}_j^- &= L_j^a\gamma_a - \mathrm{i}L_j^R,
\end{aligned}\tag{38}$$

可以证明

$$\begin{aligned}
2(L_i\cdot L_j) &\equiv \mathcal{L}_i^+\mathcal{L}_j^- + \mathcal{L}_j^+\mathcal{L}_i^-\\
&= \mathcal{L}_i^-\mathcal{L}_j^+ + \mathcal{L}_j^-\mathcal{L}_i^+.
\end{aligned}\tag{39}$$

应用 Maurer-Cartan 1-形式的变分(30)和(31)式，得到作用量的变分为

$$\begin{aligned}
\delta_kS &= \delta_kS_0 + \delta_kS_1,\\
\delta_kS_0 &= 2\mathrm{i}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}G^{ij}\delta\bar{\theta}^I\\
&\quad\times(L_j^a\gamma^a + \mathrm{i}L_j^R)L_i^I,\\
\delta_kS_1 &= 2\mathrm{i}\in^{ij}s^{IJ}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\delta\bar{\theta}^I\\
&\quad\times(L_j^a\gamma^a + \mathrm{i}L_j^R)L_i^J.
\end{aligned}\tag{40}$$

定义

$$P_\pm^{ij} = \frac{1}{2}\left(G^{ij} \pm \frac{\in^{ij}}{\sqrt{-G}}\right). \tag{41}$$

由(40)式，得到总的作用量的变分为

$$\begin{aligned}
\delta_kS &= 4\mathrm{i}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}\\
&\quad\times(P_+^{ij}\delta_\kappa\bar{\theta}^1\mathcal{L}_j^+L_i^1 + \delta_k\bar{\theta}^2P_-^{ij}\mathcal{L}_j^+L_i^2).
\end{aligned}\tag{42}$$

定义 8×8 矩阵

$$\gamma = -\frac{\in^{ij}\mathcal{L}_i^+\mathcal{L}_j^-}{2\sqrt{-G}}, \tag{43}$$

可以证明

$$\begin{aligned}
\gamma P_\pm^{ij}\mathcal{L}_j^+ &= \pm P_\pm^{ij}\mathcal{L}_j^+,\\
\gamma^2 &= 1,\ \mathrm{tr}\gamma = 0.
\end{aligned}\tag{44}$$

定义靶空间投影算子为

$$P'_\pm = \frac{1}{2}(1\pm\gamma), \tag{45}$$

由上述关系，我们得到 $AdS_5\otimes S^1$ 背景中 GS 弦的作用量对应的局域 κ-变换为

$$\begin{aligned}
&\delta_\kappa x^a = \delta_\kappa x^R = \delta_\kappa x^{a'} = \delta_\kappa x^{ab} = 0,\\
&\delta_\kappa\bar{\theta}^1 = \bar{\kappa}^1P'_-,\\
&\delta_\kappa\bar{\theta}^2 = \bar{\kappa}^2P'_+.
\end{aligned}\tag{46}$$

4. Polyakov 模型 κ-对称性的靶空间形式

Polyakov[26] 所讨论的非临界且非平庸的例子是建立在超群 $OSp(2|4)$ 基础上的超空间. 它的玻色部分 $Sp(4)\approx SO(3,2)$ 作用在 AdS_4 空间上，描述了某种三维规范理论. 在这个模型中超代数 $osp(2|4)$ 的生成元有 $J_{ab}, Q_{\alpha I}, \lambda$. 其中 $a, b, c, d = 0,1,2,3,4$；$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. $I, J = 1, 2$. 且有 $J_{a4} = P_a$ ($a = 0,1,2,3.$). 这里度规张量 $\eta_{ab} = \eta^{ab} = (-\ +\ +\ +\ -)$.

超代数 $osp(2|4)$ 的生成元有 $J_{ab}, Q_{\alpha I}, \lambda$，生成元所满足的对易关系为

$$\begin{aligned}
[\lambda, J_{ab}] &= 0,\\
[\lambda, Q_{\alpha I}] &= \in^{IJ}Q_{\alpha J},\\
[J_{ab}, J_{cd}] &= 2(\eta_{bc}J_{ad} + \eta_{ad}J_{bc} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}),\\
[J_{ab}, Q_{\alpha I}] &= Q_{\beta I}(\gamma_{ab})_{\beta\alpha},\\
\{Q_{\alpha I}, Q_{\beta J}\} &= \frac{1}{2}\delta^{IJ}(C\gamma^{ab})_{\alpha\beta}J_{ab} + 2\in^{IJ}C_{\alpha\beta}\lambda.
\end{aligned}\tag{47}$$

其中电荷共轭矩阵 C 及 gamma 矩阵都是 4×4 的矩阵.

令流 $J\equiv G'^{-1}\mathrm{d}G'=\frac{1}{2}L^{ab}J_{ab}+l\lambda+L^{\alpha I}Q_{\alpha I}$. 其中 L^{ab} 可分为两部分：$L^{a4}=L^{a}$ 和 L^{ab}（$a,b\leqslant3$，后文都采用这个约定），G' 是超群 $OSp(2|4)$ 的群元. 相应地，$\omega\equiv G'^{-1}\delta G'=P_a\delta x^a+\frac{1}{2}J_{ab}\delta x^{ab}+\lambda\delta y+Q_{\alpha I}\delta\theta^{\alpha I}$. 由 Maurer-Cartan 结构方程 $\mathrm{d}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{J}=0$ 及 $\delta\boldsymbol{J}=\mathrm{d}\omega+[\boldsymbol{J},\omega]$，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}L^a&=-2L^{ac}\wedge L^c+\frac{1}{2}\bar{L}^I\gamma^{a4}\wedge L^I,\\
\mathrm{d}L^{ab}&=-2L^{ac}\wedge L^{cb}+2L^a\wedge L^b+\frac{1}{2}\bar{L}^I\gamma^{ab}\wedge L^I,\\
\mathrm{d}L^I&=-\frac{1}{2}L^{ab}\gamma_{ab}\wedge L^I-L^a\gamma_{a4}\wedge L^I+\in^{IJ}l\wedge L^J,\\
\mathrm{d}l&=\in^{IJ}\bar{L}^I\wedge L^J.
\end{aligned}\tag{48}
$$

以及 Maurer-Cartan 1-形式的变分

$$
\begin{aligned}
\delta L^a&=\mathrm{d}\delta x^a+2L^{ac}\delta x^c+2L^c\delta x^{ca}-\bar{L}^I\gamma^{a4}\delta\theta^I,\\
\delta L^{ab}&=\mathrm{d}\delta x^{ab}+2L^{ac}\delta x^{cb}-2L^a\delta x^b\\
&\quad-2L^{bc}\delta x^{ca}+2L^b\delta x^a-\bar{L}^I\gamma^{ab}\delta\theta^I,\\
\delta L^I&=\mathrm{d}\delta\theta^I+\frac{1}{2}(L^{ab}\gamma_{ab}\delta\theta^I-\delta x^{ab}\gamma_{ab}L^I)\\
&\quad+(L^a\gamma_{a4}\delta\theta^I-\delta x^a\gamma_{a4}L^I)\\
&\quad+\in^{IJ}(\delta yL^J-l\delta\theta^J),\\
\delta l&=\mathrm{d}\delta y-2\in^{IJ}\bar{L}^I\delta\theta^J.
\end{aligned}\tag{49}
$$

Polyakov 模型的作用量

$$
\begin{aligned}
S&=-\frac{1}{2}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-g}g^{ij}L_i^aL_j^a+k\int_{M_3}\Omega_3\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-g}g^{ij}L_i^aL_j^a\\
&\quad+k\in^{IJ}\int_{M_3}L^a\wedge\bar{L}^I\gamma^{a4}\wedge L^J\\
&=-\frac{1}{2}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-g}g^{ij}L_i^aL_j^a\\
&\quad+k\in^{ij}\in^{IJ}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\bar{L}_i^I\gamma^4L_j^J.
\end{aligned}\tag{50}
$$

Ω_3 定义在陪集超空间 $\frac{OSp(2|4)}{SO(3,1)\times SO(2)}$ 上，具有规范对称性 $SO(3,1)\times SO(2)$. $\Omega_3=\mathrm{d}\Omega_2$，$\Omega_2=\in^{IJ}\bar{L}^I\gamma^4\wedge L^J$. L_i^a，L_j^J 等表示 Maurer-Carton 1-形式在底空间坐标 (τ,σ) 方向的分量. $i,j,m,n=1,2$. 上式中 k 为一常参数，将由整个作用量所满足的 κ-对称性来定. 随后将看到 $k=\mp\frac{1}{4}$.

对作用量做变分（令 $\delta_\kappa x^a=\delta_\kappa x^{ab}=\delta_\kappa y=0$）

$$
\begin{aligned}
\delta_\kappa S&=\delta_\kappa\left(-\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}\right)\\
&\quad+k\delta_\kappa\left(\in^{ij}\in^{IJ}\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\bar{L}_i^I\gamma^4L_j^J\right)\\
&=\delta_\kappa S_1+k\delta_\kappa S_2,
\end{aligned}\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_\kappa S_1&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\sqrt{-G}G^{ij}L_{ai}\bar{L}_j^I\gamma^a\gamma^4\delta_k\theta^I,\\
\delta_\kappa S_2&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma4\in^{ij}\in^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^4\gamma_{a4}L_j^a\delta_k\theta^J\\
&=-\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma4\in^{ij}\in^{IJ}\bar{L}_i^I\gamma^aL_j^a\delta_k\theta^J.
\end{aligned}\tag{52}
$$

总作用量的变分为

$$
\begin{aligned}
\delta_\kappa S&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma(\sqrt{-G}G^{ij}L_i^a\bar{L}_j^I\gamma^a\gamma^4\delta_\kappa\theta^I\\
&\quad-4k\in^{ji}\in^{IJ}L_i^a\bar{L}_j^I\gamma^a\gamma^4(\gamma^4)^{-1}\delta_\kappa\theta^J)\\
&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\bar{L}_j^I(\sqrt{-G}G^{ij}L_i^a\Gamma^a\delta_{IJ}\\
&\quad-4k\in^{ji}L_{ai}\Gamma^aF_{IJ})\delta_k\theta^J\\
&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\bar{L}_j(\sqrt{-G}G^{ij}\not{L}_i-4k\in^{ji}\not{L}_iF)\delta_\kappa\theta\\
&=\int_{\partial M_3}\mathrm{d}^2\sigma\bar{L}_j\sqrt{-G}\left(G^{ij}\not{L}_i\pm\frac{\in^{ji}\not{L}_iF}{\sqrt{-G}}\right)\delta_k\theta.
\end{aligned}\tag{53}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
F&=(\gamma^4)^{-1}\otimes\mathrm{i}\sigma_2,\\
\Gamma^a&=\gamma^a\gamma^4\otimes\boldsymbol{I}_{2\times2},\\
\not{L}_i&\equiv L_{ai}\Gamma^a,
\end{aligned}\tag{54}
$$

这里我们将费米量的指标 I,J 通过附加一个二维空间来表示，并取 $k=\mp\frac{1}{4}$. $\in=\mathrm{i}\sigma^2$，$\boldsymbol{I}$ 为 2×2 单位矩阵.

定义

$$
B_\pm^j\equiv G^{ji}\not{L}_i\pm\frac{\in^{ji}\not{L}_iF}{\sqrt{-G}},\tag{55}
$$

构造

$$
\gamma=\frac{\in^{mn}\not{L}_m\not{L}_nF}{2\sqrt{-G}}.\tag{56}
$$

可以证明

$$
B_\pm^j\gamma=\pm B_\pm^j,\tag{57}
$$

$$
B_\pm^j\frac{1\mp\gamma}{2}=0,\tag{58}
$$

$$
\gamma^2=1,\mathbf{tr}\gamma=0.\tag{59}
$$

定义 $P''_\pm=\frac{1\pm\gamma}{2}$，从上可以看出 $P''_\pm$ 同样是投影算

子,因此只要取 κ- 变换

$$\delta_\kappa x^a = \delta_\kappa x^{ab} = \delta_k y = 0,$$
$$\delta_\kappa \theta = P''_\pm k. \tag{60}$$

就可以使当 $k = \mp\frac{1}{4}$时,$\delta_\kappa S = 0$.

5. 结　论

由于传统形式的 κ-变换存在缺点,从 Metsaev 和 Tseytlin[6] 所构造的 $AdS_5 \otimes S^5$ 背景下 GS IIB 弦作用量的 Nambu-Goto 形式出发,推广了 Schwarz 的新 κ-变换方案到 AdS 的弯曲空间中去,构造了作用量所具有的 κ-对称性的靶空间形式.文中构造的 κ-对称性的靶空间形式与 Schwarz[23] 给出的方案是不同的.Schwarz 讨论的是平直空间背景下的弦模型,系统中所有的 gamma 矩阵相互之间反对易,而本文对 MT 模型中 AdS_5 与 S^5 这两个空间采用互相对易的 16×16的 gamma 矩阵,因而投影算子与 Schwarz 所构造的形式不同.如果用 32×32 的 gamma 矩阵,虽然所有的 gamma 矩阵相互之间反对易,但由于是弯曲空间,仍须对 Schwarz 的方案进行推广.新方案中投影算子是用靶空间的流来构造的.与底空间中构造的 κ-变换相比而言,κ-变换的靶空间形式简单,意义明确.这种构造方法同样可以推广到其他与 MT 模型类似的模型,如 $AdS_2 \otimes S^2$,$AdS_3 \otimes S^3$ 等背景中 GS 弦.文中分别以 $AdS_5 \otimes S^1$ 背景下的弦模型和 Polyakov 模型为例,给出了具体的 κ-变换方案.Polyakov 模型中所有 gamma 矩阵是反对易的,但 Wess-Zumino 项不同,所以用同样的方法得到的投影算子与 MT 模型不同.

[1] Lu Q K, Liu Y F, Zou Z L, Guo H Y 1974 *Acta Phys. Sin.* **23** 95 (in Chinese)[陆启铿、刘煜奋、邹振隆、郭汉英 1974 物理学报 **23** 95]

[2] Wu Y B, Shao Y, Dong P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2846 (in Chinese)[吴亚波、邵 颖、董 鹏 2004 物理学报 **53** 2846]

[3] Maldacena J 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 231 [arXiv:hep-th/9711200]

[4] Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M 1998 *Phys. Lett.* B **428** 105

[5] Witten E 1998 e-print hep-th/9802150

[6] Metsaev R R, Tseytlin A A 1998 e-print hep-th/9805028

[7] Metsaev R R 2000 *JHEP* **0011** 014

[8] Metsaev R R 2001 *class. Quant. Grav.* **18** 1245 [arXiv:hep-th/0012026]

[9] Kallosh R, Rahmfeld J 1998 e-print hep-th/9808038

[10] Kallosh R, Tseytlin A A 1998 e-print hep-th/9808088

[11] Claus P, Gunaydin M, Kallosh R *et al* 1999 *JHEP* **9905** 019 [arXiv:hep-th/9905112]

[12] Kallosh R, Rahmfeld J, Rajaraman A 1998 e-print hep-th/9805217

[13] Roiban R, Siegel W 2000 *JHEP* **0011** 024

[14] Bena I, Polchinski J, Roiban R 2004 *Phys. Rev.* D **69** 046002

[15] Tian X D, Yue R H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1485 (in Chinese)[田晓东、岳瑞宏 2005 物理学报 **54** 1485]

[16] Zhang X P, Guo Q, Hu W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5189 (in Chinese)[张霞萍、郭 旗、胡 巍 2005 物理学报 **54** 5189]

[17] Xia T C, Wang H, Zhang Y F 2005 *Chin. Phys.* **14** 0247

[18] Siegel W 1983 *Phys. Lett.* B **128** 379

[19] Brink L, Schwarz J H 1981 *Phys. Lett.* B **100** 310

[20] Green M B, Schwarz J H 1984 *Phys. Lett.* B **136** 367

[21] Xiong C H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 47 (in Chinese)[熊传华 2005 物理学报 **54** 47]

[22] Green M B, Schwarz J H 1984 *Nucl. Phys.* B **243** 285

[23] Schwarz J H 2005 *Lectures on World-Volume Theories Report on International Spring School on String Theory*

[24] Chen B, He Y L, Zhang P, Song X C 2005 *Phys. Rev.* D **71** 086007

[25] Zhou J G 1999 *Nucl. Phys.* B **559** 92

[26] Polyakov A M 2004 *Mod. Phys. Lett.* A **19** 1649

The κ-symmetry of Green-Schwarz superstring in some typical background*

Wang Zhan-Yun[1)2)†] Wang Xiao-Hui[2)] Shi Kang-Jie[2)] Yue Rui-Hong[2)]

1)(*Department of Telecom, Xi'an Institute of Post and Telecommunications, Xi'an 710121, China*)

2)(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China*)

(Received 6 Auguest 2006; revised manuscript received 4 September 2006)

Abstract

The action of type IIB superstring in $AdS_5 \otimes S^5$ background given by Metsaev and Tseytlin (MT) can be reformulated in the Nambu-Goto form. For this form we give the new projection operator involving vielbeins in the target space to con-struct local κ-transformations which leave the action invariant. This new formulation of κ-symmetry (called target space form) is first suggested by Schwarz for the Green-Schwarz (GS) model. Due to the difference between GS model and MT model, our construction has some new aspects, which is applicable to all models similar to the MT model. An example is given for the $AdS_5 \otimes S^1$ IIB superstring. We also study the κ-symmetry in target space form for the Polyakov model.

Keywords: Green-Schwarz superstring, κ-symmetry, $AdS_5 \otimes S^5$, $AdS_5 \otimes S^1$

PACC: 1130L, 1190

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10575080).

† E-mail: zywang81@sohu.com