

# 用基于 Daubechies 尺度函数的时域 多分辨分析计算电磁散射<sup>\*</sup>

代少玉<sup>1)†</sup> 吴振森<sup>1)</sup> 徐仰彬<sup>2)</sup>

1) 西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

2) 西安建筑科技大学理学院, 西安 710055)

(2005 年 5 月 17 日收到, 2006 年 6 月 19 日收到修改稿)

利用 Daubechies 尺度函数的紧支撑性, 将一种新的时域多分辨分析(MRTD)算法应用到三维目标的电磁散射中并分析了其色散特性, 使用 MRTD/FDTD 接口技术解决了连接和吸收边界的处理. 算例表明, 在不牺牲精度的情况下, 该方法比传统的 FDTD 需要的网格数少, 计算速度快. 最后, 计算了二维 PBG 结构的反射特性.

关键词: 时域多分辨分析, Daubechies 尺度函数, 电磁散射

PACC: 4110H, 9460S, 6114D

## 1. 引 言

FDTD 方法在计算电磁学领域是非常有效的数值方法, 已广泛用于电子、等离子体和 PBG 等问题<sup>[1,2]</sup>. 由于受到数值色散的影响, FDTD 的空间网格密度必须足够大, 才能忽略其影响, FDTD 算法在计算电大尺寸或高介电常数的目标时, 计算网格相当庞大, 导致需要较多的内存和 CPU 时间, 激起了许多学者对加速算法的研究. 1999 年, 日本学者 Namiki 首先将 20 世纪 50 年代成熟的交替隐式差分格式应用到 FDTD 技术中, 提出了时域交替隐式差分(ADI-FDTD)算法, 并证明了该算法在时间上的无条件稳定性, 并在目标散射计算上明显优于传统的 FDTD<sup>[3]</sup>. 近年来, 应用小波函数分析电磁波特性的传播的数值分析方法引起了许多学者的兴趣, 其中时域多分辨分析(multiresolution time domain, MRTD)表现出了很强的近似精确解的能力<sup>[4]</sup>, 但是 Battle-Lemarie 尺度函数是非紧支撑的, 计算迭代时需要考虑许多项, 尤其是连接边界和吸收边界处理时带来了困难, 为了减少考虑的项数, 紧支撑的小波函数可以作为一个选择<sup>[5]</sup>. 1999 年 Cheong 等提出了具有 2 阶消失矩紧支撑的尺度函数的小波 Galerkin 法算

法<sup>[6]</sup>. 2001 年 Fujii 将该方法应用到大尺寸介质波导的仿真分析中<sup>[7]</sup>. 与当前流行的 FDTD 算法相比, MRTD 具有较好的色散特性<sup>[8]</sup>, 空间抽样可以小到 FDTD 的 1/2—1/3, 大大节省了内存, 提高了电磁场计算模拟效率.

结合标准 Galerkin 法, 本文给出了基于具有 2 阶消失矩紧支撑的 Daubechies 尺度函数( $D_2$ )的 MRTD 算法, 计算了介质立方体和一维导体随机粗糙面的双站雷达散射截面, 与传统 FDTD 相比, 在没有牺牲精度的条件下, MRTD 所需的网格数较少, 显示了 MRTD 算法的优越性. 另外, 使用了 MRTD/FDTD 混合技术, 处理连接边界和吸收边界就不需要特殊处理了. 最后, 计算了二维 PBG 结构的透射特性.

## 2. MRTD 的推导

Maxwell 方程组中关于  $E_z$  的微分形式如下:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z, \quad (1)$$

空间网格同样采用标准的 Yee 网格<sup>[1]</sup>, 电磁场各分量按下式展开:

$$H_x(\mathbf{r}, t) = \sum_{i,j,k,n=-\infty}^{\infty} H_{i,j,k,n}^{x,n+0.5} h_{n+0.5}(t)$$

<sup>\*</sup> 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20030701006)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: floatkey\_dai@126.com

$$\times \{\phi_i(x)\phi_{j+0.5}(y)\phi_{k+0.5}(z)\}, \quad (2)$$

$$H_y(\mathbf{r}, t) = \sum_{i,j,k,m=-\infty}^{\infty} H_{i+0.5,j,k}^{\phi_y, n+0.5} h_{n+0.5}(t) \times \{\phi_{i+0.5}(x)\phi_j(y)\phi_{k+0.5}(z)\}, \quad (3)$$

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \sum_{i,j,k,m=-\infty}^{\infty} E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n} h_n(t) \times \{\phi_i(x)\phi_j(y)\phi_{k+0.5}(z)\}, \quad (4)$$

其中  $E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n}$ ,  $H_{i+0.5,j,k}^{\phi_y, n+0.5}$ ,  $H_{i+0.5,j,k+0.5}^{\phi_y, n+0.5}$  为场展开系数,  $n, i, j, k$  分别为时间和空间的坐标并有  $t = n\Delta t, x = i\Delta x, y = j\Delta y, z = k\Delta z, \Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$  分别为时间和空间的离散间隔.  $h$  和  $\phi$  可以为各类尺度函数, 定义  $h(t)$  为 Haar 尺度函数,  $\phi$  为具有 2 阶消失矩的 Daubechies 尺度函数, 如图 1 所示.  $h_n(t)$ ,  $\phi_i(x)$  定义为

$$h_n(z) = h\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right), \phi_i(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - i\right) \quad (5)$$

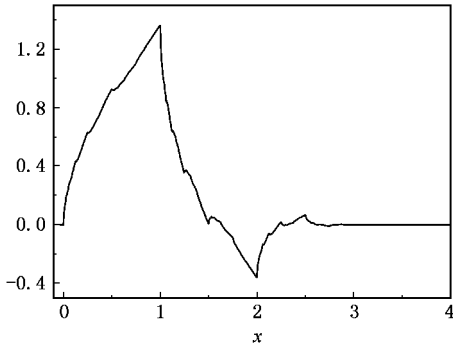


图 1 [0, 3] 紧支撑的 Daubechies 尺度函数

将场展开(2)–(4)式代入 Maxwell 方程组(1), 同时进行标准的 Galerkin 法检验<sup>[4, 9]</sup>, 并且利用下列内积关系式:

$$h_n(t), \frac{dh_{n+0.5}(t)}{dt} = \delta_{n, n'} - \delta_{n, n'+1}, \quad (6)$$

$$\phi_k(x), \phi_{k'}(z) = \delta_{k, k'} \Delta z, \quad (7)$$

$$\phi_i(x), \frac{d\phi_{i+0.5}(x)}{dx} = \sum_l \alpha(l) \delta_{i+l, i'}, \quad (8)$$

其中  $\delta_{k, k'}$  为狄拉克函数. 联系尺度函数和它的偏导数的系数  $\alpha(l)$  可以由傅里叶频域的数值内积获得.

$$\alpha(l) \equiv \frac{d\phi_{i+0.5}(x)}{dz} \phi_{i-1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \omega |\hat{\phi}(\omega)|^2 \sin[\alpha(l + 0.5)] H\omega, \quad (9)$$

$\hat{\phi}$  为  $\phi$  的 Fourier 变换. 表 1 列出了  $0 \leq l \leq 2$  时  $\alpha(l)$  的值,  $l > 2$  时  $\alpha(l)$  为 0 是由于 Daubechies 尺度函数

的紧支撑特性所致, 根据对称关系  $l < 0$  时,  $\alpha(-l) = \alpha(-l)$ . Galerkin 法检验后并整理可得  $E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n}$  步进迭代公式为

$$E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n+1} = \frac{2\epsilon - \sigma\Delta t}{2\epsilon + \sigma\Delta t} E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n} + \frac{2\Delta t}{2\epsilon + \sigma\Delta t} \times \left[ \sum_{l=-L_s}^{L_s-1} \alpha(l) \left( \frac{H_{i+0.5+l,j,k+0.5}^{\phi_y, n+0.5}}{\Delta x} - \frac{H_{i+0.5+l,j,k+0.5}^{\phi_y, n+0.5}}{\Delta y} \right) \right], \quad (10)$$

表 1  $0 \leq l \leq 2$  时  $\alpha(l)$  的值

$l$	$\alpha(l)$
0	1.229167
1	-0.093750
2	0.010417

对  $D_2$  而言  $L_s = 3$ . 进行类似的过程, 可得到其他所有电磁场的分量步进迭代公式. 为使(10)式达到数值稳定, 时间步长  $\Delta t$  应满足修正的 Courant 稳定性条件<sup>[4]</sup>

$$\frac{1}{\Delta t} \geq v_{\max} \sum_{l=1}^{L_s-1} |\alpha(l)| \times \sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}, \quad (11)$$

式中  $v_{\max}$  为计算空间电磁波的最大传播速度. 由于 Daubechies 尺度函数近似满足移位内插特性<sup>[10]</sup> (5) 式改写为

$$\phi_i(x) = \phi\left(\frac{x}{\Delta x} - i + M_1\right), \quad (12)$$

其中  $M_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx$  对  $D_2$  而言  $M_1 = 0.6343975$ . 尽管尺度函数的支撑域是 [0, 3], 然而无论计算的目标怎样复杂, 只要利用局部抽样, 计算不均匀问题的算法仍然很简单. 总场值仍然可以近似为该点的尺度系数, 例如

$$E_z[i\Delta x, j\Delta y, (k+0.5)\Delta z, n\Delta t] = \int \iiint E_z(\mathbf{r}, t) \delta\left(\frac{x}{\Delta x} - i\right) \delta\left(\frac{y}{\Delta y} - j\right) \times \delta\left(\frac{z}{\Delta z} - k\right) \delta\left(\frac{t}{\Delta t} - n\right) dx dy dz dt = E_{i,j,k+0.5}^{\phi_z, n}, \quad (13)$$

值得注意的是抽样的值特别依赖检验函数<sup>[10]</sup>.

### 3. 连接边界和吸收边界处理

等效原理表明在总场边界设置等效电磁流可以

在总场区引入入射波,而在散射场区没有入射波.这样,截断边界附近只有散射场,是外行波,符合截断边界面上设置的吸收边界条件只能吸收外向行波的要求<sup>[11]</sup>.利用 Daubechies 尺度函数的移位内插特性,在目标和连接边界之间,引入 MRTD/FDTD 接口边界,在内外区域使用不同的迭代公式.这样连接边界和吸收边界都位于 FDTD 区域,采用传统的 FDTD 处理方法<sup>[11]</sup>.在自由空间中,我们采用两步法验证这种方法的 PML 的有效性和精确性,厚度为 8 个元胞.第 1 步,在一个小的计算区域内,点(0,0)处以高斯脉冲形式辐射,记录坐标(5,5)处场的时间序列,即  $E(t)$ ;第 2 步,为了去除边界的影响,我们拓展计算区域并在电磁波被 PML 层反射到点(5,5)之前终止程序,即  $E_0(t)$ .相对局部误差定义为  $[E(t) - E_0(t)] / E_0(t)$ .图 2 为吸收的反射残余时间序列,可见吸收效果非常好,未见发散,精确性和有效性得到了验证.

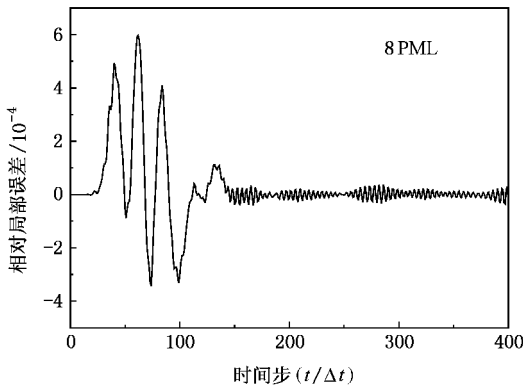


图 2 二维 PML 反射残余

## 4. 数值结果

### 4.1. 色散特性

色散特性分析通常先假设 Maxwell 的时谐解,然后代入各向同性均匀、线性、无耗的步进方程中,数值求解所产生的非线性方程<sup>[14]</sup>.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=0}^{L_x-1} a(l) \sin(k_x(l+1/2)\Delta x) \right\}^2 \\ &+ \left\{ \frac{1}{\Delta y} \sum_{l=0}^{L_y-1} a(l) \sin(k_y(l+1/2)\Delta y) \right\}^2. \quad (14) \end{aligned}$$

图 3 给出了 MRTD 的色散特性,其中  $\Delta x = \Delta y$

$= \delta, c\Delta t/\delta = 0.5, X = k_x\Delta x$  可以看出在 MRTD 在  $0^\circ$  和  $45^\circ$  传播方向上的线性性都高于 FDTD,这样就保证了 MRTD 网格数较少时的精度.

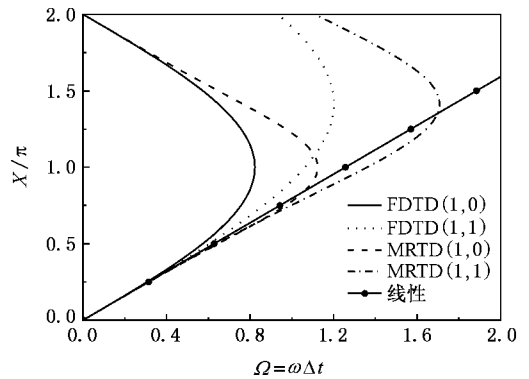


图 3 色散曲线图

### 4.2. 散射截面

为了论证 MRTD 的有效性和高数值线性,计算了介质立体的散射截面,边长 1 m,入射波的波长为 1 m,相对介电常数  $\epsilon_r = 4$ ,入射角度为  $\theta_{inc} = 0^\circ, \phi_{inc} = 0^\circ$ , $x$  方向极化. $\delta$  为空间网格大小, $s = c\Delta t/\delta = 0.45$ ,计时为整个程序计算完毕的时间.图 4 和表 2 Fine 指的是使用 FDTD 方法,空间网格密度远超过规定数,时间步足够长.MRTD 计算时, $\delta = 0.05$  m,和 Fine 吻合,耗时 200 s,而此时 FDTD 的结果相差较大,甚至将网格降低到  $\delta = 0.025$  m,结果和 Fine 仍没有很好的吻合,此时耗时达 742 s.另外,随着网格数的增加,为了达到电磁波的稳定,相应的时间步也必须增加.因此 MRTD 算法大大减少了网格数,提高了计算速度,而没有牺牲任何精度,从而提高了效率,还验证了 MRTD/FDTD 混合方法的正确性.

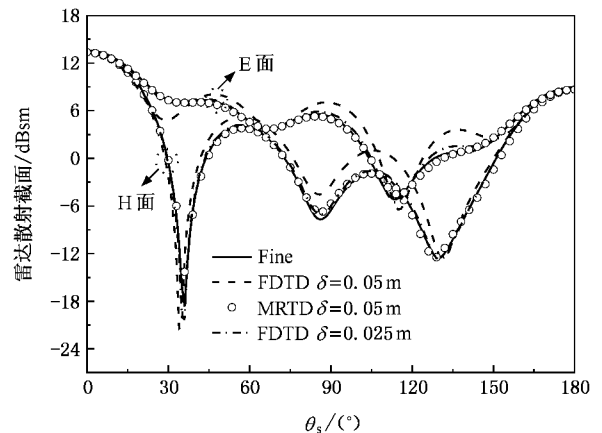


图 4 雷达散射截面

表 2 离散间隔、时间步和 CPU 时间

方法	FDTD	MRTD
间隔/m	0.025	0.05
时间步	4000	2000
时间/s	742	200

图 5 为一维导体随机粗糙面的双站散射特性<sup>[12]</sup>，入射波波长 1 m，网格尺寸 0.05 m，粗糙面的高度起伏  $h = 0.05$  m，相关长度  $l = 0.35$  m，粗糙面的长度  $L = 40$  m， $g = L/4$ ， $\theta_i = 30^\circ$ ，最后结果是对 100 个粗糙面的散射截面的平均，和矩量法一致，更多细节见文献 [12]。

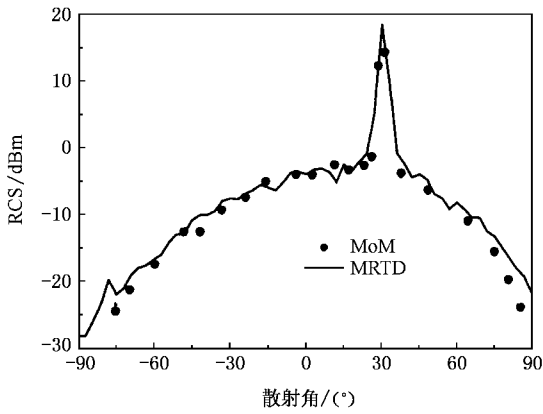


图 5 粗糙面的双站散射截面特性

### 4.3. PBG 结构的带阻特性

近年来，光子带隙结构(PBG)的应用逐渐深入电波工程，光子带隙的最大特点就是周期性，如图 6。根据物理学原理，周期性粒子受电磁波照射时会发生 Bragg 干涉现象，导致某些频段的电磁波无法穿透，从而出现了带阻现象。作者考虑沿  $x$  方向入射  $TM_z$  的情况，对于周期边界上的  $E^{bz}$  的节点，MRTD 计算中涉及到周期边界外侧的  $H^{by}$  节点，如图 7。利用 Floquet 定理来处理计算区域以外的网格点<sup>[2]</sup>。

$$H_{i,M+1/2}^{by,n+1/2} = H_{i,M-1/2}^{by,n+1/2}, \quad (15)$$

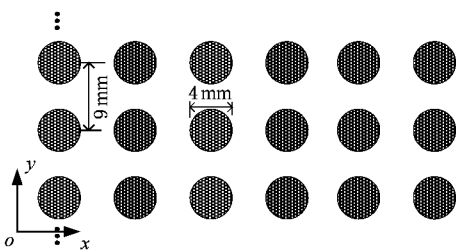


图 6 二维 PBG 结构示意图

$$H_{i,M+1/2}^{by,n+1/2} = H_{i,M+1/2}^{by,n+1/2}, \quad (16)$$

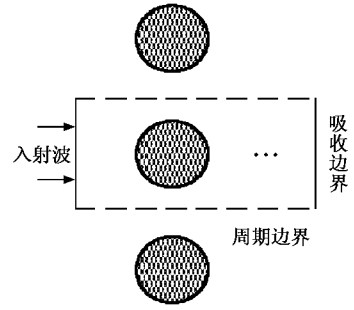


图 7 周期结构中的一个单元

式中  $j = 1, j = M$  分别为下上周期边界，其他点类似。图 6 是由 6 层直径为 4 mm 的红宝石圆柱组成。红宝石介电常数  $\epsilon_r = 4.2$ ，它们之间距离为  $d = 9$  mm，MRTD 中取  $\delta = 0.25$  mm。由图 8 可知，随着介电常数减小时，PBG 的带阻效应越来越弱，且带宽也随之减小，而中心频点却逐渐增加。图 9 是考察层数对带阻特性的影响，当层数达到 6 层以上时，带阻效应相当明显，而要求精度较高时，可以采用 6—8 层周

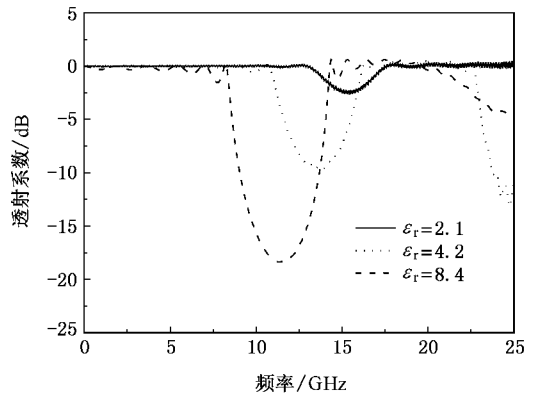


图 8 介电常数对带阻效应的影响

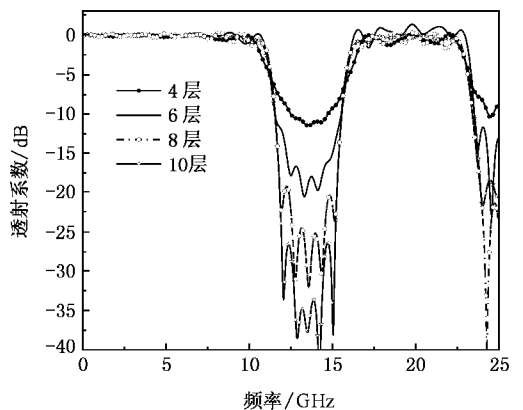


图 9 层数对带阻效应的影响

期单元.从物理意义上来说,这种现象是由于层数增加时,干涉效果更为明显,使得带阻效果明显.

## 5. 结 论

将基于 Daubechies 紧支集尺度函数的时域多分辨分析(MRTD)算法用于电磁散射特性分析中而且

比其他 MRTD 方法应用简单<sup>[4]</sup>.与传统的 FDTD 算法相比,本文算法在不牺牲计算精度的前提下能够大大节省计算内存和计算时间,和 FDTD 法一样可用于任意复杂结构目标的计算机辅助设计分析. MRTD 因其有高线性色散特性,在计算电大尺寸目标时很有优势,是计算电磁学中强而有力的计算方法,应用前景将会更加广阔.

- [1] Taflov A 2000 *Computational Electro-dynamics : The Finite Difference Time Domain Method* ( Boston :Artech House )
- [2] Bao X L , Zhang W X , Zheng W L , Li L W 2003 *Acta Appl . Sci .* **21** 236 ( in Chinese ) [ 包秀龙、章文勋、郑文龙、李乐伟 2003 应用科学学报 **21** 236 ]
- [3] Tang W , Yan Y B , Li Q L , Wu Z S 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 4173 ( in Chinese ) [ 汤 炜、闫玉波、李清亮、吴振森 2004 物理学报 **53** 4173 ]
- [4] Krumpholz M , Katehi Linda P B 1996 *IEEE MTT* **44** 555
- [5] Daubechies I 1992 *Ten Lectures On Wavelets* ( Philadelphia , PA : SIAM )
- [6] Cheong Y W , Lee Y M , Ra K H *et al* 1999 *IEEE Microwave*

*Guided Wave Letters* **9** 207

- [7] Fujii M , Hofer W J R 2001 *IEEE MTT* **49** 886
- [8] Fujii M , Hofer W J R 2000 *IEEE Microwave Guided Wave Letters* **10** 125
- [9] Harrington R F 1982 *Field Computation by Moment Methods* ( Malabar , FL : Krieger )
- [10] Sweldens W , Piessens R 1993 *Proc . Statistical Computing Section* **20**
- [11] Berenger J P 1994 *J . Computational Physics* **114** 185
- [12] Tsang L , Kong J A , Ding K H *et al* 2001 *Scattering of Electromagnetic Waves : Numerical Simulation* ( New York : John Wiley & Sons , Inc )

# Using the MRTD based on Daubechies scaling functions to solve the problem of electromagnetic scattering

Dai Shao-Yu<sup>1</sup>† Wu Zhen-Sen<sup>1</sup>) Xu Yang-Bin<sup>2</sup>)

<sup>1</sup> *School of Science , XiDian University , Xi 'an 710071 , China* )

<sup>2</sup> *School of Science , Xi 'an University Architecture and Technology , Xi 'an 710055 , China* )

( Received 17 May 2005 ; revised manuscript received 19 June 2006 )

## Abstract

A new method of multiresolution time domain analysis is proposed , which is based on compactly supported Daubechies scaling functions in the electromagnetic scattering of three dimensional objects. The highly linear dispersional properties are investigated. Using the interfaces of MRTD/FDTD technique , the connecting and absorption boundaries are dealt with. Numerical experiments show that , compared with conventional FDTD , this method can reduce cells without sacrificing solution accuracy , and uses less CPU time. Finally , the characteristics of PBG structure are obtained using this scheme.

**Keywords** : multiresolution time domain ( MRTD ) , Daubechies scaling function , electromagnetic scattering

**PACC** : 4110H , 9460S , 6114D

\* Project supported by the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China( Grant No. 20030701006 ).

† E-mail : floatkey\_dai@126.com