

相对论效应对大振幅电子等离子体振荡破裂影响的数值模拟^{*}

徐 慧 盛政明[†] 张 杰

(中国科学院物理研究所光物理实验室,北京 100080)

(2006 年 4 月 14 日收到,2006 年 6 月 12 日收到修改稿)

通过数值求解符拉索夫方程和泊松方程,研究了相对论效应和温度效应对等离子体振荡破裂的影响.不考虑相对论效应情况下,初始扰动幅度较小时,不会发生等离子体振荡破裂,系统具有时间周期性.此时电子温度的增加,会使得等离子体振荡最大幅度减小.考虑相对论效应时,即使初始的等离子体电子密度扰动幅度不大,随着时间演化,相对论效应也能导致等离子体振荡破裂,而且初始电子密度扰动越小,产生等离子体振荡破裂所需时间越长.在初始电子密度扰动较大时,无论考虑和不考虑相对论效应都会出现波破裂,但两者的结果有很大不同.此外温度效应会降低能发生等离子体波破裂的阈值,等离子体波的相速度越大,能产生的波破裂现象也越明显.

关键词:等离子体振荡,相对论效应,振荡破裂

PACC:5235F,5235R,5260

1. 引 言

非线性等离子体振荡是等离子体中最简单的集体效应,所以是一个比较值得研究的问题.冷等离子体中的非线性电子等离子体振荡在不同的时期曾经被广泛研究^[1-7].人们发现,只要电场强度不超过阈值 $m_e \omega_{pe}^2 / ek$,最初周期分布的结构都能保持周期振荡而不发生破裂.其中 $2\pi/k$ 为波长, ω_{pe} 为电子等离子体振荡频率, e , m_e 分别是静止电子的电荷和密度.如果电场强度超过该阈值,电子密度在某个位置会变成无穷大,即发生了所谓的波破裂现象.后来,对于具有一定温度的电子等离子体做了类似于冷离子等离子体的解析分析^[8].研究表明,不管是驻波还是行波等离子体振荡,电子的温度效应都能使发生波破裂的阈值条件降低很多,但电场最大值却跟电子温度的关系很小.对于离子不稳定性的研究也表明,考虑温度效应后的结果跟冷等离子体时很不同^[9,10].在这两种情况下,对只依赖于一个变量 $x - vt$ 的行波 BGK 模的情况也进行了深入的研究^[11-15].后来,随着高强度激光的获得和激光等

离子体相互作用中的多种加速概念的提出,一些物理学家就开始探索能否在一些特殊的实验装置条件下观察到预期的波破裂以及在这之后出现的相关现象^[16-22],其中有些采用了拉格朗日坐标转换进行的分析^[16-18].1989年,Infeld和Rowlands考虑了电子振荡运动的相对论效应,进一步解析研究了冷等离子体振荡^[23].他们发现,只要时间足够长,不管系统的初始密度扰动幅度是多大,相对论效应都能使之发生波破现象.

由于大振幅电子等离子体振荡是完全的非线性过程,在一些弱非线性条件下虽然可得到近似的解析解,但强非线性条件下往往不能求解,特别是波破裂发生后的物理过程,解析方法将无能为力.另外,强相对论下,非行波的等离子体振荡以及波破裂的产生过程迄今没有被人研究过.本文采用直接求解非线性符拉索夫方程和泊松方程,数值模拟了大振幅驻波等离子体振荡的演化过程,以及初始等离子体波振幅、电子温度对波破裂的影响.这个问题与激光等离子体波加速电子、空间等离子体物理有一定关系.我们的方法可以模拟任意初始密度分布的等离子体波的时间演化.

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10335020,10476033) 国家杰出青年基金(批准号:10425416) 和国家高技术研究计划(863)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: zsheng@aphy.iphy.ac.cn

2. 模拟方法

研究一个一维周期分布的等离子体系统,电子初始温度较低,相空间的初始分布函数在速度 v 空间是一个很窄的 Maxwell 分布. 在 x 方向上,电子密度在均匀分布的基础上有一个小幅度的周期性扰动. 假设整个过程中离子不动 ($m_i \gg m_e$),只形成归一化的正电荷背景,忽略碰撞效应以及演化过程中产生的磁场,电子在相空间的分布函数 $f(x, v, t)$ 和自洽电场 $E(x, t)$ 分别满足符拉索夫方程和泊松方程:

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = 1 - \int f(x, v, t) dv, \quad (2)$$

其中变量归一化如下: $\frac{\omega_{pe}}{c} x \rightarrow x, \omega_{pe} t \rightarrow t, \frac{v}{c} \rightarrow v,$

$$\frac{2T_e}{m_e c^2} \rightarrow \beta, \frac{e}{m_e \omega_{pe} c} E \rightarrow E, \frac{\int f(x, v, t) dv}{n_0} \rightarrow \int f(x, v,$$

$$t) dv, \omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e}}$$

是电子等离子体振荡频率, T_e 是电子的初始温度, c 是真空中光速, m_e 是电子静止质量, e 是电子电荷, n_0 是背景离子密度.

对于方程(1)的求解采用 Cheng 等提出的时间算子分裂法^[24],把符拉索夫方程分成 3 步求解. 第 1 步,根据电子相空间初始分布,求出方程 $\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 经过 $\Delta t/2$ 时间后的分布函数;第 2 步,由泊松方程(2)求出此时的电场,进而解方程 $\frac{\partial f}{\partial t} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0$,得到经过 Δt 时间后的分布函数;第 3 步,再求解方程 $\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 经过 $\Delta t/2$ 时间的分布函数,从而完成一个时间步长 Δt 的计算. 上述方法中的每一步计算,都是求解一个双曲型方程. 对于双曲型方程的求解,我们采用 Filbet 等人提出的 PFC(positive and flux conservative)方法^[25]. 该方法基于流量守恒法(flux conservative method),在差分函数上做了一定的修正,从而解决了其他方法不能克服的两个缺点:一是运算过程中,保证质量守恒;二是克服了当分布函数比较陡的时候的振荡问题,保证整个运算过程

中分布函数不会出现负值. 由于在 x 方向采用周期性边界条件,所以由泊松方程求解电场时采用快速傅里叶变化(FFT)方法^[26].

上面的方程是不考虑相对论效应时得到的,在等离子体电子温度、等离子体波相速度、等离子体电子振荡速度高到一定程度时,必须考虑到相对论效应. 这种情况下的方程为如下形式:

$$\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + \frac{p}{\gamma} \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f(x, p, t)}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = 1 - \int f(x, p, t) dp, \quad (4)$$

其中 $p = \gamma m_e v, \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 是相对论因子, $\frac{p}{m_e c}$

$\rightarrow p, \frac{\int f(x, p, t) dp}{n_0} \rightarrow \int f(x, p, t) dp$,其他量的含义以及其归一化与非相对论时一样. 采用与非相对论情况一样的方法可求解该方程组.

3. 模拟结果

3.1. 不考虑相对论效应时的情况

假设初始电子密度在均匀分布的基础上有一个余弦扰动,扰动的相对幅度为 Δ ,则初始电子分布可以表示为 $f_e(x, v, t = 0) = [1 + \Delta \cos(kx)] \exp(-v^2/\beta) \sqrt{\beta\pi}$,其中 k 是电子等离子体波波矢. 假设 $k = 0.5, \beta = 0.0001$,图 1(a)~(d)分别为 $\Delta = 0.01, \Delta = 0.45, \Delta = 0.5, \Delta = 0.6$ 时对应的等离子体密度的时空分布图. 当扰动非常小($\Delta = 0.01$)时,系统可以看作是完全线性的,整个过程实际上是一个驻波的演化过程,在时间上具有非常好的周期性,每经过 2π 的时间,就回到初始状态. 随着扰动幅度的增加,非线性效应逐渐起作用. 在 $\Delta = 0.45$ 时,可以看到,在奇数倍的 π 时刻,大量电子在 $kx = \pi$ 的位置堆积,使得电子密度变得很大,最大值约为 5.35,远远大于最初的扰动,相应的电场分布在此处变得非常陡. 系统在时间上基本保持周期性,周期为 2π . $\Delta = 0.5, 0.6$ 时,在 π 的奇数倍时刻也能看到电子的堆积,但时间上它们已经不再具有周期性,密度的最大值逐渐减小,尤其是 $\Delta = 0.6$ 的情况更加明显.

为了更清楚地看到上面的性质,图 2(a)~(d)分别给出了 $\Delta = 0.01, \Delta = 0.45, \Delta = 0.5$ 和 $\Delta = 0.6$

时,在 $t = 3\pi/2$ 时刻的相空间的分布函数. 可以看到,随着密度扰动的增加,从 $\Delta = 0.5$ 开始,出现了波破裂现象. 即在给定的空间点位置,作为流体的电

子速度呈现多个值,由此导致临近的电子出现位置交换的现象. 随着初始扰动幅度的增大,波破裂现象变得更明显. 这些结论与冷等离子体模型的理论

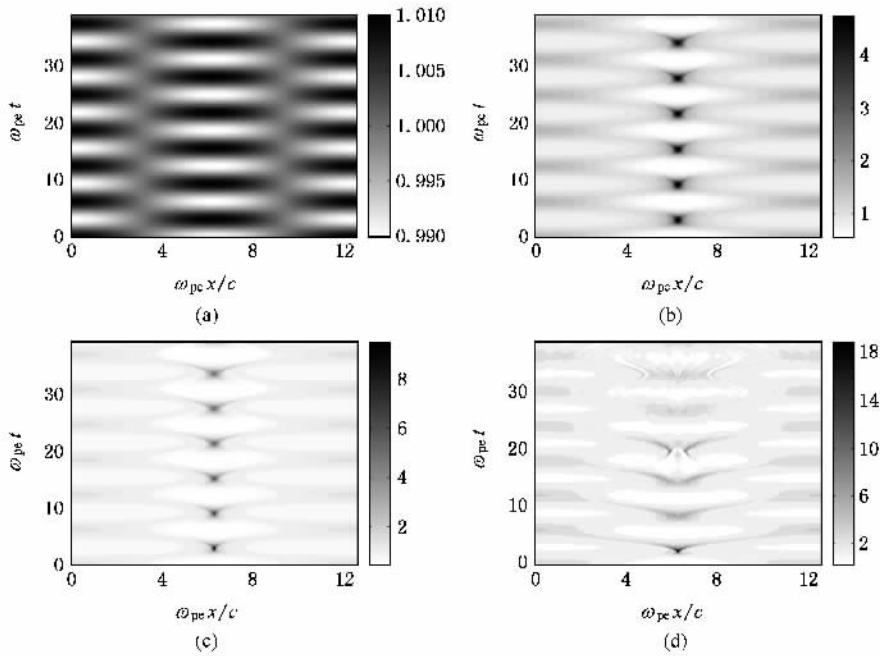


图 1 电子等离子体密度的时空分布图 (a) $\Delta = 0.01$ (b) $\Delta = 0.45$ (c) $\Delta = 0.5$ (d) $\Delta = 0.6$; 其他参数为 $2T_e/m_e c^2 = 0.0001, k = 0.5$

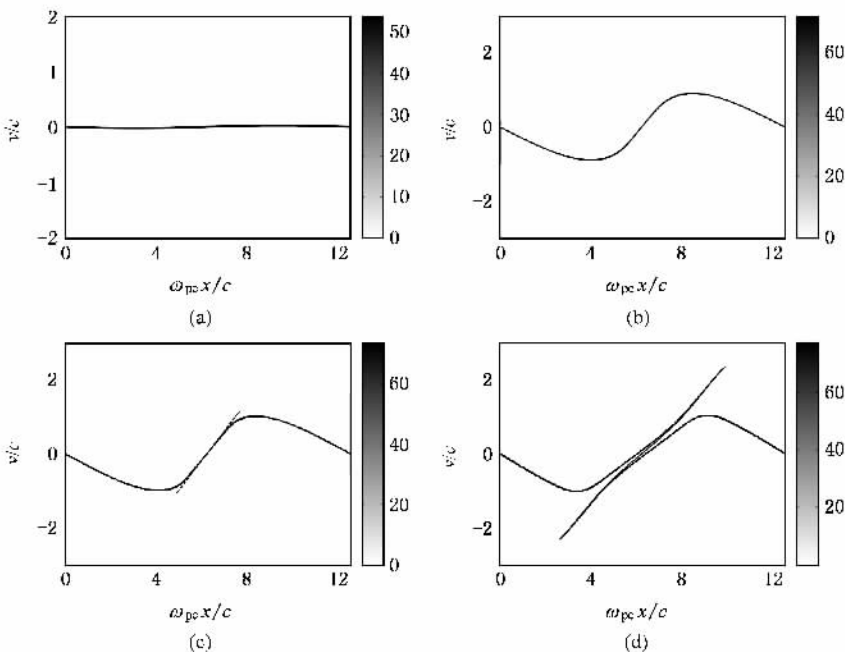


图 2 $t = 3\pi/2$ 时刻电子在相空间的分布 (a) $\Delta = 0.01$ (b) $\Delta = 0.45$ (c) $\Delta = 0.5$ (d) $\Delta = 0.6$; 其他参数为 $2T_e/m_e c^2 = 0.0001, k = 0.5$

分析一致^[7].

为了知道温度的影响,图3给出了 $\Delta = 0.45$, $2T_e/m_e c^2 = 0.00001$ 时电子等离子体密度的时空分布.与图1(b)比较可以看出,温度越低,越接近于冷等离子体系统,演化过程中能够得到最高电子密度增加,但是不会超过冷等离子体理论计算结果 $5.5^{[7]}$.

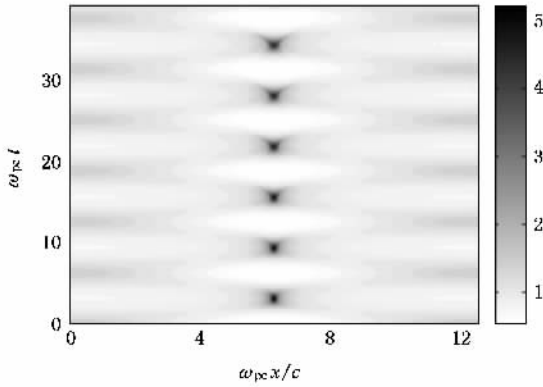


图3 $\Delta = 0.45$, $2T_e/m_e c^2 = 0.00001$, $k = 0.5$ 时电子等离子体密度时空变化图

3.2. 相对论效应的影响

上面的结果都是在不考虑相对论效应的情况下得到的.当等离子体振荡的相速度接近光速,并且电子在其中的振荡速度接近光速时,必须考虑相对论效应的影响.譬如在相对论强激光与等离子体相互作用中,激发的电子等离子体振荡通常具有类似的特点.

图4(a)~(d)分别为 $\Delta = 0.3$, $2T_e/m_e c^2 = 0.0001$ 时,不考虑相对论效应得到的电子等离子体密度的时空分布、产生的静电场的时空分布、几个特殊时刻的空间密度分布和相应时刻的电场分布.与之对应的考虑相对论效应时的情况,见图4(e)~(h).按照非相对论的冷等离子体振荡理论,在这种强度的初始扰动下,不会发生波破裂现象^[7],与不引入相对论效应时得到的模拟结果一致.而相对论效应的引入使得本来随时间周期变化、不能发生波破裂现象的系统,在时间的累积作用下,其周期性逐渐发生破坏,一段时间后,也会发生波破裂现象.这个结果与文献[23]给出的在弱相对论条件下的理论是一致的.

为了更清楚的看出上面的结果,图5给出了在 $t = 2\pi$ 和 $t = 51.5$ 时刻,相应于图4的电子相空间的

密度分布函数.图5(a)(b)为不考虑相对论效应时的结果,(c)(d)为相应的考虑相对论效应时的情况.相对论效应的引入,使一开始没有波破裂的系统,在 $t = 51.5$ 时刻发生了波破.

文献[23]中的结论是不管初始扰动的大小是多少,只要考虑了相对论效应,系统发生波破现象都是不可避免的.为了验证这一结论,我们研究了扰动很小($\Delta = 0.1$)时的情况.图6(a)为不考虑相对论效应时的电子密度分布随时间的变化,可以看出它随着时间是周期变化的.考虑相对论效应后,随着时间的增加,电子等离子体密度的分布逐渐偏离周期变化,这个过程是时间不可逆的,最后出现了波破裂,见图6(b)(c).图6(d)对应初始扰动比较大的情况($\Delta = 0.6$),与图1(d)相比,可以看出,相对论效应使密度分布周期性的破坏更快一些,破裂的时间更早一些,破裂后产生的结构更复杂一些.

3.3. 电子温度和等离子体相速度对等离子体振荡的影响

有关温度对等离子体波破裂阈值的影响,人们已经做了一定的理论研究.一般认为,温度将使波破裂的振幅降低^[27,28],这主要取决于两个主要因素:热压强效应和电子捕获效应.但迄今为止,通过数值模拟研究不同温度下这两个效应各自的作用还未见报道.图7给出了在给定的初始密度扰动($\Delta = 0.3$)下,不同的电子温度时,在 $t = 51.496$ 时刻得到的电子相空间分布以及电子密度的时空分布.其中7(a),(b)对应 $2T_e/m_e c^2 = 2.0$;(c),(d)对应 $2T_e/m_e c^2 = 0.001$;(e),(f)对应 $2T_e/m_e c^2 = 0.00001$.比较图7(c)(d)(e)和(f)可以看出,随着温度的降低,相同初始扰动条件下,波破裂现象越来越不明显,这是由于温度效应带来的压强会阻止等离子体密度增加,使得温度越高,产生波破裂的阈值就越低^[27,28].其次,随着电子温度的提高,相应电子的热速度就增加,就使更多的沿波传播方向运动的电子被俘获^[27],即在温度非常高时($2T_e/m_e c^2 = 2.0$),由于相当多的电子速度可以接近等离子体波的相速度,这些电子被俘获后在相空间形成了漩涡状结构,如图7(a)所示.

我们还研究了初始扰动振幅相同的情况下,不同相速度的波对应的情况,图8分别给出了 $k = 1.0$, $\rho = 0.25$ 时得到的电子等离子体密度时空分布和 $t = 51.496$ 时刻的分布函数.比较图4,图5和图8,

可以看到,相速度 $v_{ph} = \omega_{pe}/kc$ 越大,非线性效应就越明显,能够产生的波破裂现象也越明显. 这是由

于产生的静电波的相速度越大,相同的密度扰动对应的电场强度就越大,而非线性效应也就越明显.

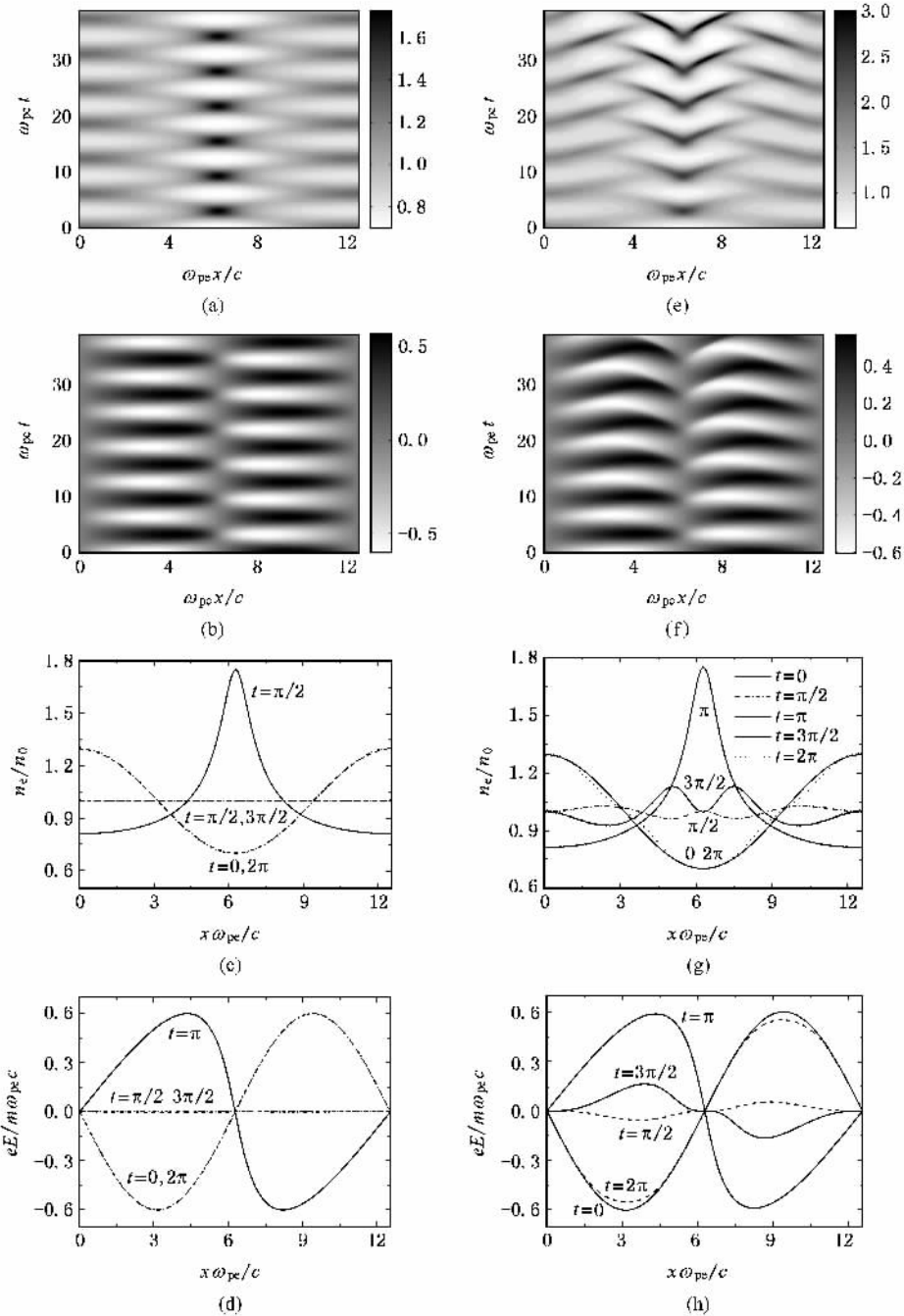


图4 (a)–(d)分别为不考虑相对论效应时,对应的电子密度的时空分布、产生的静电场的时空分布、几个特殊时刻的密度和电场分布 (e)–(h)为相应的考虑相对论效应的情况 其中 $\Delta = 0.3, 2T_e/m_e c^2 = 0.0001, k = 0.5$

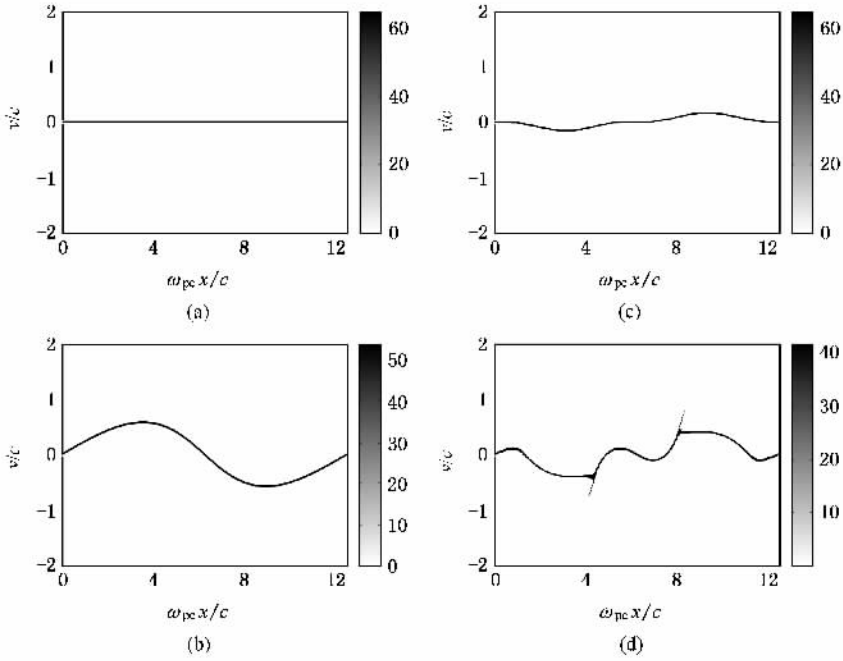


图 5 (a)(b)给出了 $t = 2\pi$ 和 $t = 51.5$ 时刻, 不考虑相对论效应时电子分布 ;(c)(d)为相应的引入相对论效应时的情况 初始条件与图 4 相同

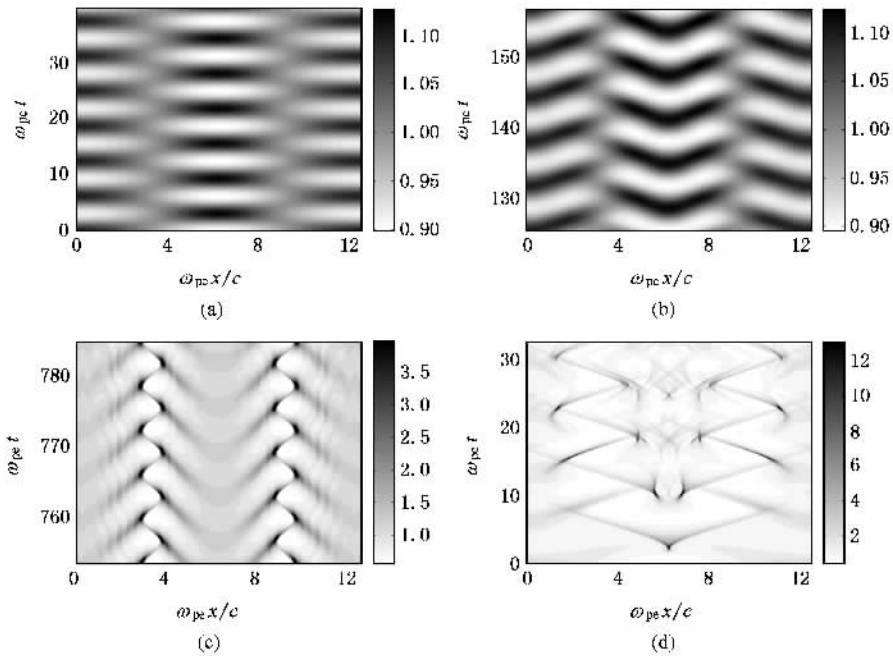


图 6 (a) 为不考虑相对论效应时 $\Delta = 0.1 \ 2T_e/m_e c^2 = 0.0001$ 对应的电子密度的时空分布 ;(b), (c) 为考虑相对论效应时, $\Delta = 0.1 \ 2T_e/m_e c^2 = 0.0001$ 对应的电子密度的时空分布在比较晚时的情况 (d) 考虑相对论效应时, $\Delta = 0.6 \ 2T_e/m_e c^2 = 0.0001$ 对应的电子密度的时空分布

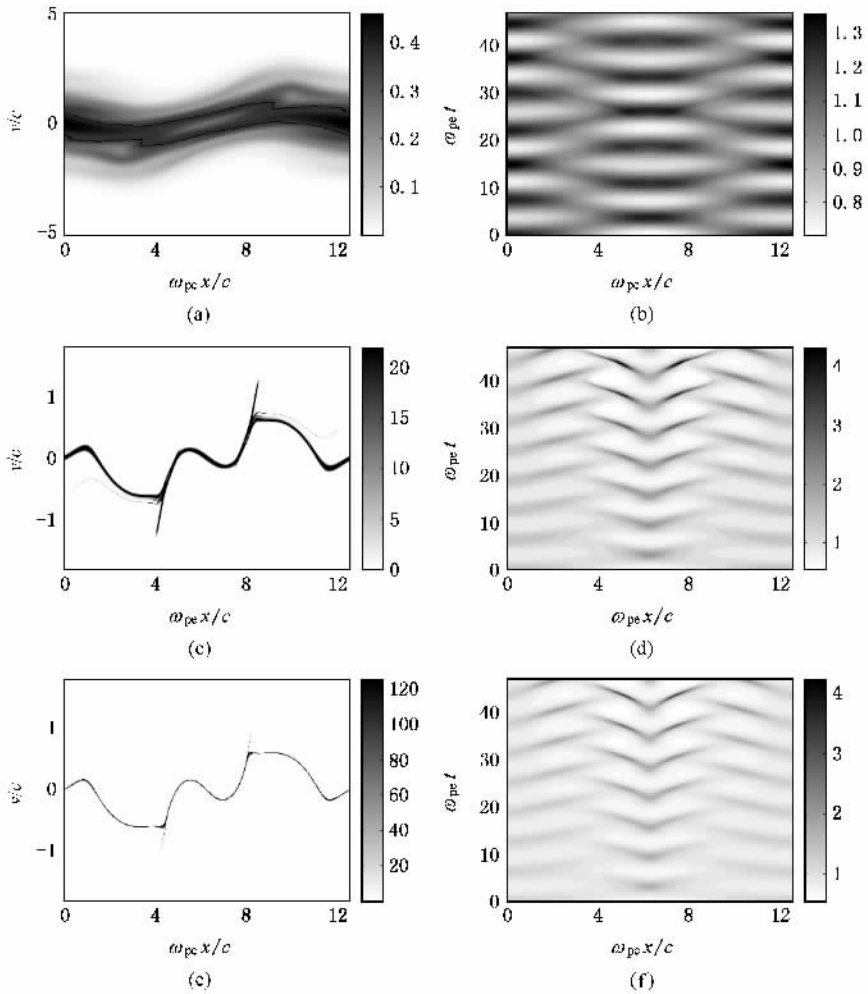


图7 初始扰动相同时 ($\Delta = 0.3$) 不同温度的电子等离子体, 考虑了相对论效应时, 在 $t = 51.496$ 时刻得到的电子的相空间分布 (a) (c), (e) 和密度的时空分布 (b) (d) (f) 其中 $k = 0.5$; (a) (b) $2T_e/m_e c^2 = 2.0$; (c) (d) $2T_e/m_e c^2 = 0.001$ (e) (f) $2T_e/m_e c^2 = 0.00001$

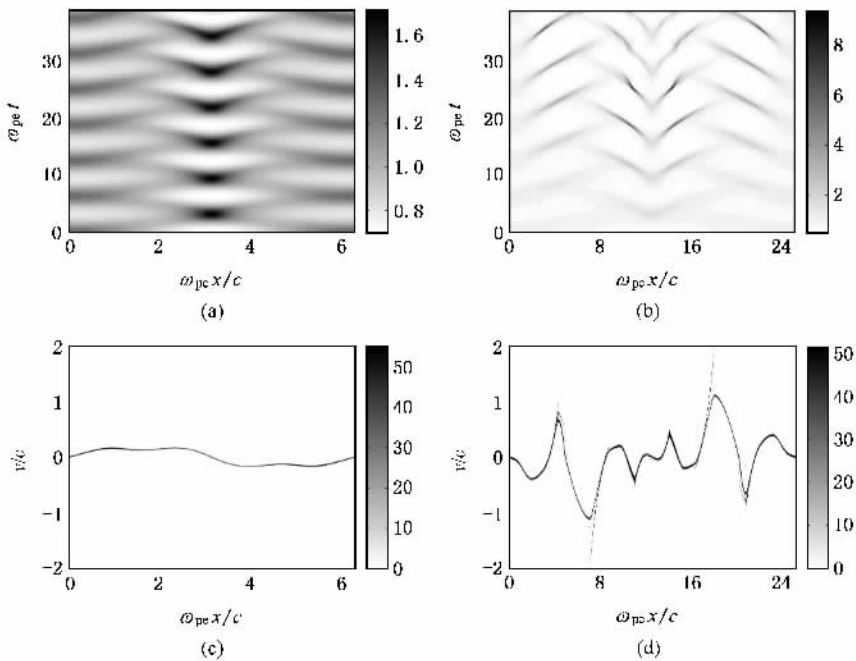


图8 初始扰动相同 ($\Delta = 0.3$), 对应不同相速度的等离子体波在考虑相对论效应时, 电子密度的时空分布 (a) (b) 和在 $t = 51.496$ 时刻得到的电子相空间分布 (c) (d) 其中 $2T_e/m_e c^2 = 0.0001$ (a) (c) $k = 1.0$; (b) (d) $k = 0.25$

4. 总 结

通过数值求解符拉索夫方程和泊松方程,研究了相对论效应和温度效应对等离子体振荡破裂的影响. 不考虑相对论效应情况下,扰动幅度较小时,不会发生等离子体振荡破裂,系统具有时间周期性,电子温度的增加会使得等离子体振荡最大值降低;扰动幅度超过一定值后,较强的非线性作用会使系统发生波破. 考虑相对论效应时,不管初始的等离子

体电子密度扰动幅度是多大,由于时间累积效应,相对论效应都能使系统发生振荡破裂现象;初始电子密度扰动越小,产生等离子体振荡破裂所需的时间越长;初始电子密度扰动较大时,考虑相对论效应时发生波破后的现象跟不考虑相对论时的结果有很大不同. 此外,温度效应会降低能发生等离子体波破裂的阈值,与解析的理论一致,等离子体波的相速度越大,非线性效应越明显,能产生的波破裂现象也越明显.

- [1] Sturrock P A 1957 *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **242** 277
- [2] Dawson J M 1959 *Phys. Rev.* **113** 383
- [3] Buneman O 1959 *Phys. Rev.* **115** 503
- [4] Konyukov M V 1960 *Sov. Phys. JETP* **37** 570
- [5] Kalman G 1960 *Ann. Phys. (Paris)* **10** 29
- [6] Davidson R C, Schram P P 1968 *Nucl. Fusion* **8** 1983
- [7] Davidson R C 1972 *Method in Nonlinear Plasma Theory* (New York : Academic)
- [8] Infeld E, Rowlands G 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2013
- [9] Xue J K, Duan W S, Lang H 2002 *Chin. Phys.* **11** 1184
- [10] El-Labany S K, Abdel Krim M S, El-Warraki S A, El-Taibany W F 2003 *Chin. Phys.* **12** 0759
- [11] Davidson R C 1968 *Phys. Fluids* **11** 194
- [12] Albritton J, Rowlands G 1975 *Nucl. Fusion* **15** 1199
- [13] Speziale T, Catto P J 1977 *Phys. Fluids* **20** 990
- [14] Infeld E, Rowlands G 1979 *J. Phys. A* **12** 2255
- [15] Krueer W L 1979 *Phys. Fluids* **22** 1111
- [16] Akhiezer A I, Lyubarski G Y 1951 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **53** 193
- Akhiezer A I, Polovin R V 1955 *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **102** 919
1956 *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31** 354
- Polovin R V 1957 *Sov. Phys. JETP* **4** 290
- [17] Rosenbluth M N, Liu C S 1972 *Phys. Rev. Lett.* **29** 701
- Lee P S, Lee Y C, Chang C T, Chun D S 1973 *Phys. Rev. Lett.* **30** 538
- [18] Tang C M, Sprangle P, Sudan R N 1985 *Phys. Fluids* **28** 1974
- [19] Mendoca J T 1985 *J. Plasma Phys.* **34** 115
- [20] Noble R J 1985 *Phys. Rev. A* **32** 460
- [21] McKinstrie C J, Kindel J M *Application of Laser Plasma* (New York : Dekker)
- [22] Joshi C, Mori W B, Karsouleas T, Dawson J M, Kindel J M, Forslund D W 1984 *Nature (London)* **311** 525
- [23] Infeld E, Rowlands G 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1122
- [24] Cheng C Z, Knorr G 1976 *J. Comput. Phys.* **22** 330
- [25] Filbet F, Sonnendrucker E, Bertrand P 2001 *J. Comput. Phys.* **172** 166
- [26] Brigham E O 1979 *The Fast Fourier Transform* Liu Qun Trans. (Shanghai : Shanghai Science and Technology Press [in Chinese] 布赖姆 E O 1979 快速富里叶变换 柳群 译 [上海 : 上海科学技术出版社])
- [27] Katsouleas T, Mori W B 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 90
- [28] Sheng Z M, Meyer-ter-Vehn J 1997 *Phys. Plasmas* **4** 493

Vlasov simulation of the relativistic effect on the breaking of large amplitude plasma waves^{*}

Xu Hui Sheng Zheng-Ming[†] Zhang Jie

(*Laboratory of Optical Physics, Institute of Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

(Received 14 April 2006; revised manuscript received 12 June 2006)

Abstract

The influence of relativistic and thermal effects on plasma wave breaking has been studied by solving the coupled Vlasov-Poisson equations. When the relativistic effect is not considered, the wave breaking will not occur, provided the initial perturbation is less than certain value as predicted previously, and the largest amplitude of the plasma wave will decrease with the increase of the initial temperature. When the relativistic effect is considered, wave breaking always occurs during the time evolution, irrespective of the initial perturbation amplitude. Yet the smaller the initial perturbation amplitude is, the longer is the time for wave breaking to occur. With large initial perturbations, wave breaking can always occur with and without the relativistic effect. However, the results are significantly different in the two cases. The thermal effects of electrons decrease the threshold value of initial amplitude for wave breaking and large phase velocity makes the nonlinear phenomenon occur more easily.

Keywords : plasma oscillation, relativistic effect, wave breaking

PACC : 5235F, 5235R, 5260

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10335020, 10476033), the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 10425416) and the National High Technology Research and Development Program of China.

[†] Corresponding author. E-mail : zmseng@aphy.iphy.ac.cn