第 56 卷 第 3 期 2007 年 3 月
1000-3290/2007/56(03)/1260-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.3,March,2007

可积开边界条件下的 q 形变玻色子模型*

李 博 王延申
(西安交通大学理学院应用物理系,西安 710049)
(2006 年 1 月 5 日收到;2006 年 2 月 13 日收到修改稿)

利用代数 Bethe Ansatz 方法在可积开边界条件下推广了 q 形变玻色子模型,得到可积开边界条件下此模型的哈密顿量及其本征方程.该工作可为在更小尺度下研究具有相互作用的玻色子系统提供有效的理论基础.

关键词:代数 Bethe Ansatz,q 形变玻色子模型,开边界,可积系统
PACC:0370,0380,0550,0530

1. 引 言

近年来具有 q 形变的玻色子模型[1]被广泛关注,其主要原因是在实验中对玻色-爱因斯坦凝聚的观测[2,3]以及由此而引起的原子激光领域的研究[4,5].这些实验所处理的系统都可以归结为具有相互作用的玻色子系统[6],在理论上可以引入 q 形变玻色子模型[7,8]来描述这类具有相互作用的玻色子系统,同时发现这个模型是精确可积的[9],但是目前对这类系统的研究主要是在周期性边界条件下[10,11]展开的.为了在更小尺度下描述这类系统的更加丰富的行为,必须在开边界条件下推广 q 形变玻色子模型.

可积模型的开边界处理方案由 Sklyanin 提出[12],其方案的核心是反射方程,此方程是开边界情况下可积性的充分条件.尽管 Sklyanin 的方案只适用于一些具有特殊对称性的 R 矩阵,然而现在已经证明其方案可以推广于具有任意 R 矩阵的可积系统.

本文首先概述周期性边界条件下的 q 形变玻色子模型,然后根据推广后的 Sklyanin 方案将 q 形变玻色子模型推广于可积开边界,并利用 Bethe Ansatz 方法得到可积开边界条件下此模型的的转置矩阵、哈密顿量及其本征方程.这将为在更小尺度下研究具有相互作用的玻色子系统提供有效的理论基础.

2. 周期性边界条件下的 q 形变玻色子模型

为了在后面便于讨论,首先在此简述周期性边界条件下的 q 形变玻色子模型的结论[10].其模型的哈密顿量由下式定义:

$$H_q = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}(B_n^\dagger B_{n+1} + B_n B_{n+1}^\dagger - 2N_n), \quad (1)$$

B_n,$B_n^\dagger$ 和 N_n 是作用在第 n 个格点上的局域量子算子,其周期性边界条件为 $M+1=1$.算符 B_n,$B_n^\dagger$ 和 N_n 满足 q 玻色子代数

$$[N_i, B_j^\dagger] = B_i^\dagger\delta_{ij}, [N_i, B_j] = -B_i\delta_{ij},$$
$$[B_i, B_j^\dagger] = q^{-2N_i}\delta_{ij}. \quad (2)$$

算符 N_n 满足幺正性即 $N_n = N_n^\dagger$,形变因子 $q = e^\gamma$,其中 γ 为大于 0 的实数.

进而可以定义总粒子数算符,并且由对易关系式(2)可证明其与哈密顿量(1)对易,即

$$\widehat{N} = \sum_{n=1}^{M} N_n, [H_q, \widehat{N}] = 0.$$

由 $B_j|0\rangle_j = 0$ 可定义局域 Fock 真空态.在局域 Fock 空间中可以得到 q 形变玻色子代数的具体表示,并得到其对归一化态的操作如下:

$$B_j^\dagger|n_j\rangle_j = [n_j+1]^{1/2}|n_j+1\rangle_j,$$
$$B_j|n_j\rangle_j = [n_j]^{1/2}|n_j-1\rangle_j,$$
$$N_j|n_j\rangle_j = n_j|n_j\rangle_j,$$

整个系统的 Fock 真空态可定义为 $|0\rangle = \prod_{j=1}^{M}|0\rangle$,

* 国家自然科学基金(批准号:10375045)资助的课题.

正交归一态为

$$|n\rangle = \prod_{j=1}^{M}|n_j\rangle_j = \prod_{j=1}^{M}([n_j]!)^{-1/2}(B_j^{\dagger})^{n_j}|0\rangle,$$

其中 $[n] = \dfrac{1-q^{-2n}}{1-q^{-2}}$，$[n]! = \prod_{l=1}^{n}[l]$.

q 形变玻色子模型在周期性边界条件下被证明是精确可积的，可以定义其在 $h_n \otimes V_a$ 空间中的 L 算符为 $L_{n,a}$，其中 h_n 为第 n 个量子空间，V_a 为辅助空间，同时 $V_a = C^2$. $L_{n,a}$ 在辅助空间 V_a 中的表示可以写为

$$L_{n,a}(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \chi B_n^{\dagger} \\ \chi B_n & e^{-\lambda} \end{pmatrix},$$

其中 $\chi = \sqrt{1-q^{-2}}$，谱参量 $\lambda \in c$，算符 L 满足 Yang-Baxter 方程

$$R_{12}(\lambda,\mu)L_{n,1}(\lambda)\otimes L_{n,2}(\mu) = L_{n,2}(\mu)\otimes L_{n,1}(\lambda)R_{12}(\lambda,\mu), \quad (3)$$

R_{12} 作用于 $V_1 \otimes V_2$（V_1，V_2 为辅助空间），其表示为

$$R_{12}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} f(\mu,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu,\lambda) & q & 0 \\ 0 & q^{-1} & g(\mu,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu,\lambda) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$f(\lambda,\mu) = \frac{\sinh(\lambda-\mu+\gamma)}{\sinh(\lambda-\mu)},$$

$$g(\lambda,\mu) = \frac{\sinh\gamma}{\sinh(\lambda-\mu)}.$$

进而可以定义单值矩阵在辅助空间中的表示为

$$T_{M,a}(\lambda) = L_{M,a}(\lambda)\cdots L_{1,a}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}.$$

由(4)式可证明单值矩阵也满足 Yang-Baxter 方程即(3)式.

相应的转置矩阵为 $\tau(\lambda) = a(\lambda) + d(\lambda)$，根据量子反散射理论[13]由转置矩阵可以构造包括系统哈密顿量在内的所有守恒量，并且如果知道其在相应本征态下的本征值就可以得到系统的能谱及其他守恒量的本征值，从而清晰地了解系统的动力学性质.

由 Bethe Ansatz 方法可以得到 q 形变玻色子模型在周期性边界条件下的转置矩阵及相应的本征态和本征值，其结论已由 Bogoliubov 给出[10]，此处不再详述.

3. 可积开边界条件下的 q 形变玻色子模型

本文的目标是在可积开边界条件下讨论 q 形变玻色子模型，并根据 Bethe Ansatz 方法得到其转置矩阵及在相应本征态下的本征值. 由此便可以得到包括系统哈密顿量在内的所有守恒量，从而了解 q 形变玻色子模型在开边界条件下的各种性质.

为了便于计算定义

$$\tilde{R}_{12}(\lambda-\mu) = P_{12}R_{12}(\lambda-\mu),$$

$$\tilde{R}_{21}(\lambda-\mu) = P_{12}\tilde{R}_{12}(\lambda-\mu)P_{12} \neq \tilde{R}_{12}(\lambda-\mu),$$

P_{ij} 是作用在 $V_i \otimes V_j$ 上的交换算符. 直接计算可以验证 $\tilde{R}(\lambda-\mu)$ 满足幺正性如下：

$$\tilde{R}_{12}(\lambda-\mu)\cdot\tilde{R}_{21}(\mu-\lambda) = \rho\cdot I_{4\times4},$$

$$\rho = \frac{\sinh^2(\mu-\lambda)-\sinh^2(\gamma)}{\sinh^2(\mu-\lambda)}.$$

同时 $\tilde{R}(\lambda-\mu)$ 满足交叉幺正性如下：

$$\tilde{R}_{12}^{t_1}(\lambda-\mu)\cdot\tilde{R}_{21}^{t_1}(\mu-\lambda+2\gamma) = I_{4\times4}.$$

由上式可知交叉参数 $\eta = -\gamma$.

为了描述系统在可积开边界条件下的行为，定义边界反射矩阵 K_-，K_+ 其分别满足边界 Yang-Baxter 方程

$$\tilde{R}_{12}(\lambda-\mu)K_-^1(\lambda)\tilde{R}_{21}(\mu+\lambda)K_-^2(\mu) = K_-^2(\mu)\tilde{R}_{12}(\lambda+\mu)K_-^1(\lambda)\tilde{R}_{21}(-\mu+\lambda), \quad (5)$$

$$\tilde{R}_{12}(-\lambda+\mu)K_+^1(\lambda)\tilde{R}_{21}(-\mu-\lambda+2\gamma)K_+^2(\mu) = K_+^2(\mu)\tilde{R}_{12}(-\lambda-\mu+2\gamma)K_+^1(\lambda)\tilde{R}_{21}(\mu-\lambda). \quad (6)$$

将 q 形变玻色子模型的 $\tilde{R}_{12}$，$\tilde{R}_{21}$ 代入(5)，(6)式，可以解得

$$K_-(\lambda) = \begin{bmatrix} \sinh(\xi_-+\lambda) & b_-\sinh(2\lambda) \\ c_-\sinh(2\lambda) & \sinh(\xi_--\lambda) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$K_+(\lambda) = \begin{bmatrix} \sinh(\xi_+-\lambda+\gamma) & b_+\sinh(2\lambda-2\gamma) \\ c_+\sinh(2\lambda-2\gamma) & \sinh(\xi_++\lambda-\gamma) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 ξ_-，b_-，c_-，ξ_+，b_+，c_+ 为边界参量. 在下面的讨论中我们假设在 K_- 与 K_+ 中，$b_- = b_+ = c_- = c_+ = 0$，这样考虑的物理背景是孤立子解在边界进行了完全的反射. 这样(7)式可以写为

$$K_-(\lambda) = \begin{bmatrix} \sinh(\xi_-+\lambda+\gamma/2) & 0 \\ 0 & \sinh(\xi_--\lambda-\gamma/2) \end{bmatrix}.$$

为了方便下面的计算,将 L 算符推广于非均匀链情况,定义 $L_{n,a}$ 为

$$L_{n,a}(\mathrm{i}|\lambda,\nu_i)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda-\nu_i} & \chi B_n^{\dagger}\\ \chi B_n & \mathrm{e}^{-\lambda+\nu_i}\end{pmatrix},$$

此时不同格点上的谱参量是不同的,因为对不同格点上的谱参量进行了不同的平移,平移量为 ν_i. 由于 Yang-Baxter 方程(3)中散射矩阵仅仅依赖于谱参量之差,因此重新定义的 $L_{n,a}$ 算子的交换关系依然由(3)式所确定. 周期性边界条件下单值矩阵为

$$T_{M,a}(\lambda,\{\nu_i\}_M)=L_{M,a}(M|\lambda,\nu_M)\cdots L_{1,a}(1|\lambda,\nu_1).$$

进一步可以定义开边界条件下的单值矩阵为

$$U(\lambda,\{\nu_i\}_M)=T(\lambda,\{\nu_i\}_M)K_-(\lambda)\times T^{-1}(-\lambda,\{\nu_i\}_M),\qquad(9)$$

其中 $T^{-1}(\lambda,\{\nu_i\}_M)$可以用聚合的方法得到

$$T^{-1}(\lambda,\{\nu_i\}_M)=\sigma_q\cdot T^{t}(\lambda+\gamma,\{\nu_i\}_M)\cdot\sigma_q^{-1}\cdot[\det_q T(\lambda,\{\nu_i\}_M)]^{-1},\qquad(10)$$

$$\sigma_q=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -q^{-1} & 0\end{bmatrix},$$

同时为了形式上的对称将 $\lambda\to\lambda+\gamma/2$,则表达式(9)可以表达为

$$U(\lambda,\{\nu_i\}_M)=T\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)K_-\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)\sigma_q\times T^{t}\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\sigma_q^{-1}q^{M+2\sum_{i=1}^{M}N_i}.$$

开边界条件下的单值矩阵在辅助空间中仍然是 2×2 矩阵, 分别将

$$U=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

代入(9)式,可得如下关系:

$$\begin{aligned}A(\lambda,\{\nu_i\}_M)=\Big[&\sinh\left(\xi_-+\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)a\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)d\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\\&-q^{-1}\sinh\left(\xi_--\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)b\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)c\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\Big]q^{M+2\sum_{i=1}^{M}N_i},\end{aligned}\qquad(11)$$

$$\begin{aligned}D(\lambda,\{\nu_i\}_M)=\Big[&\sinh\left(\xi_--\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)d\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)a\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\\&-q\sinh\left(\xi_-+\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)c\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)b\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\Big]q^{M+2\sum_{i=1}^{M}N_i},\end{aligned}\qquad(12)$$

$$\begin{aligned}C(\lambda,\{\nu_i\}_M)=\Big[&\sinh\left(\xi_-+\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)c\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)d\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\\&-q^{-1}\sinh\left(\xi_--\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)d\left(\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)c\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2},\{\nu_i\}_M\right)\Big]q^{M+2\sum_{i=1}^{M}N_i}.\end{aligned}\qquad(13)$$

为了得到开边界转置矩阵在其相应本征态下的本征值,首先必须构造开边界的真空态及转置矩阵在真空态下的本征值. 在周期性边界条件下 Fock 真空态为 $|0\rangle=\prod_{j=1}^{M}|0\rangle_j$,将 $T(\lambda,\{\nu_i\}_M)$作用于 Fock 真空态上可得

$$T(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=\begin{bmatrix}\exp(M\lambda-\sum_{i=1}^{M}\nu_i)|0\rangle & 0\\ 0 & \exp(-M\lambda+\sum_{i=1}^{M}\nu_i)|0\rangle\end{bmatrix},$$

由此可知

$$\begin{aligned}&a(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=\exp(M\lambda-\sum_{i=1}^{M}\nu_i)|0\rangle,\\&d(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=\exp(-M\lambda+\sum_{i=1}^{M}\nu_i)|0\rangle,\\&c(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=0.\end{aligned}\qquad(14)$$

将 $C(\lambda,\{\nu_i\}_M)$即(13)式作用于 Fock 真空态上,并将(14)式代入可得

$$C(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=0.$$

所以开边界条件下的 Fock 真空态就是周期性边界条件下的 Fock 真空态,进而可得

$$A(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle=\sinh\left(\xi_-+\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{e}^{2M\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)}|0\rangle,\qquad(15)$$

$$
\begin{aligned}
D(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle = &\sinh\left(\xi_- - \lambda - \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\times \mathrm{e}^{-M\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)}\mathrm{e}^{M\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)} q^M|0\rangle \\
&- q^{1+M}\sinh\left(\xi_- + \lambda + \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\times c\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right) b\left(-\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)|0\rangle .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

由 $T(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 中元素的对易关系，(16)式可以进一步化简为

$$
\begin{aligned}
D(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle = &\frac{1}{\sinh(2\lambda)}\sinh(2\lambda+\gamma) \\
&\times \sinh\left(\xi_- - \lambda + \frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{e}^{-2M\left(\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)}|0\rangle \\
&- \frac{\sinh\gamma}{\sinh(2\lambda)}A(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle ,
\end{aligned}
$$

则定义 $\widetilde{D} = D + \frac{\sinh\gamma}{\sinh(2\lambda)}A$，代入(16)式可得

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}(\lambda,\{\nu_i\}_M)|0\rangle = &\frac{\sinh(2\lambda+\gamma)}{\sinh(2\lambda)} \\
&\times \sinh\left(\xi_- - \lambda + \frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{e}^{-2M\left(\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)}|0\rangle .
\end{aligned}
\tag{17}
$$

接下来利用 Bethe Ansatz 方法构造转置矩阵的本征态 $B(\mu_1,\{\nu_i\}_M)\cdots B(\mu_n,\{\nu_i\}_M)|0\rangle$ 及其本征值. 将开边界的单值矩阵 $U(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 代入边界 Yang-Baxter 方程(5)中，并且将 $D = \widetilde{D} - \frac{\sinh\gamma}{\sinh(2\lambda)}A$ 代入 $U(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 中，可得对易关系

$$
\begin{aligned}
A(\lambda)B(\mu) = &\frac{\sinh^2(\lambda+\gamma)-\sinh^2\mu}{\sinh^2\lambda-\sinh^2\mu}B(\mu)A(\lambda) \\
&- \frac{\sinh\gamma\sinh(2\mu+\gamma)}{\sinh(\lambda-\mu)\sinh(2\lambda)}B(\lambda)A(\mu) \\
&+ \frac{\sinh\gamma}{\sinh(\mu+\lambda)}B(\lambda)\widetilde{D}(\mu),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}(\lambda)B(\mu) = &\frac{\sinh^2(\lambda-\gamma)-\sinh^2\mu}{\sinh^2\lambda-\sinh^2\mu}B(\mu)\widetilde{D}(\lambda) \\
&+ \frac{\sinh\gamma\sinh(2\lambda-\gamma)}{\sinh(\lambda-\mu)\sinh(2\lambda)}B(\lambda)\widetilde{D}(\mu) \\
&- \frac{\sinh\gamma\sinh(2\mu+\gamma)\sinh(2\lambda-\gamma)}{\sinh(\mu+\lambda)\sinh(2\mu)\sin(2\lambda)} \\
&\times B(\lambda)A(\mu).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

在(18)，(19)式中由于 ν_i 并不影响对易关系，故并未将其明显写出. 开边界时的转置矩阵定义为

$$
\begin{aligned}
\tau(\lambda,\{\nu_i\}_M) &= \mathrm{tr}K_+(\lambda)U(\lambda,\{\nu_i\}_M) \\
&= \frac{\sinh(2\lambda-\gamma)}{\sinh(2\lambda)}\sinh\left(\xi_+ - \lambda - \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\quad \times A(\lambda,\{\nu_i\}_M) + \sinh\left(\xi_+ + \lambda - \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\quad \times \widetilde{D}(\lambda,\{\nu_i\}_M).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

将转置矩阵作用于本征态 $B(\mu_1,\{\nu_i\}_M)\cdots B(\mu_n,\{\nu_i\}_M)|0\rangle$ 上，并利用对易关系式(18)，(19)以及 $A(\lambda,\{\nu_i\}_M)$，$\widetilde{D}(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 在 Fock 真空态上的本征值(15)，(17)式，可以得到 $\tau(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 作用于态 $B(\mu_1,\{\nu_i\}_M)\cdots B(\mu_n,\{\nu_i\}_M)|0\rangle$ 上的本征值为

$$
\begin{aligned}
\Lambda = &\mathrm{e}^{2M\left(\lambda+\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\sinh(2\lambda-\gamma)}{\sinh 2\lambda}\sinh\left(\xi_- + \lambda + \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\times \sinh\left(\xi_+ - \lambda - \frac{\gamma}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh^2(\lambda+\gamma)-\sinh^2\mu_i}{\sinh^2\lambda-\sinh^2\mu_i} \\
&+ \mathrm{e}^{-2M\left(\lambda-\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\sinh(2\lambda+\gamma)}{\sinh 2\lambda}\sinh\left(\xi_- + \lambda - \frac{\gamma}{2}\right) \\
&\times \sinh\left(\xi_+ - \lambda + \frac{\gamma}{2}\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\sinh^2(\lambda-\gamma)-\sinh^2\mu_i}{\sinh^2\lambda-\sinh^2\mu_i},
\end{aligned}
$$

其中谱参量 $\{\mu_i\}$ 是如下 Bethe Ansatz 方程的解：

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=i\neq 1}^{n}\frac{\sinh^2(\mu_i+\gamma)-\sinh^2\mu_j}{\sinh^2(\mu_i-\gamma)-\sinh^2\mu_j} \\
&= \mathrm{e}^{-4M\mu_i}\frac{\sinh\left(\xi_+ + \mu_i - \frac{\gamma}{2}\right)\sinh\left(\xi_- - \mu_i + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sinh\left(\xi_+ - \mu_i - \frac{\gamma}{2}\right)\sinh\left(\xi_- + \mu_i + \frac{\gamma}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

至此，我们得到开边界条件下 q 形变玻色子模型的转置矩阵及其本征方程，和相应的 Bethe Ansatz 方程.

可以将转置矩阵 $\tau(\lambda,\{\nu_i\}_M)$ 按如下方式展开：

$$
\tau(\lambda,\{\nu_i\}_M) = \sum_{l=-M-1}^{M+1}Q_l\mathrm{e}^{2l\lambda},
\tag{21}
$$

各个 Q_l 及其组合构成系统的守恒量. 由(20)式及(21)式，并且令 $\nu_1=\nu_2=\cdots=\nu_i=\frac{1}{2}\gamma$ 可得到开边界条件下系统的哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
-2H_q^B + 2\widehat{N} = &\sum_{n=1}^{M-1}(B_n^+B_{n+1} + B_nB_{n+1}^+) \\
&+ \frac{1}{2}(q^{-1}B_1^+B_1 + qB_1B_1^+)\exp(-2\xi_-) \\
&+ \frac{1}{2}(q^{-1}B_M^+B_M + qB_MB_M^+)\exp(2\xi_+).
\end{aligned}
$$

上式中第二、三项分别代表右、左边界项.

4. 讨　　论

本文利用代数 Bethe Ansatz 方法在开边界条件下推广了 q 形变玻色子模型，得到开边界条件下此模型的转置矩阵、本征方程及其哈密顿量. 这将为在更小尺度下研究具有相互作用的玻色子系统提供有

效的理论基础.

本文假设边界反射矩阵 K_-,K_+ 为对角形式,然而更加一般的情形是 K_-,K_+ 为非对角形式,其所对应的物理背景是孤立子解在边界不但有反射还有透射.此时由于无法构造转置矩阵的本征态,所以代数 Bethe Ansatz 方法将不再适用.如何在这种情形下得到系统的哈密顿量及能谱将成为下一步值得研究的问题.

当 $q\to1$ 时,q 形变玻色子模型转化为普通的玻色子模型,这个模型可以用来描述玻色子气体;当 $q\to\infty$ 时,q 形变玻色子模型转化为相模型,这个模型可以用来描述强耦合的玻色子系统.在下一步的工作中我们将把可积开边界的结论推广于相模型中,相关工作将在后续文章中报道.

[1] Kulish P P, Damakinsky E V 1990 *J. Phys.* A **23** 415

[2] Anderson MH, Ensher J R, Mattews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198

[3] Imamoglu A, Lewenstein M, You L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2511.

[4] Mewes M O, Anderson M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582

[5] Yvan Castin, Jean Dalibard 1997 *Phys. Rev.* A. **55** 4330

[6] Bogoliubov N M, Izergin A G, Kitanine N A, Pronko A G, Timonen J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4439

[7] Su G Z, Chen L X, Chen J C 2003 *Open Systems & Information Dynamics* **10** 135

[8] Shu Y G, Chen J C, Chen L X 2002 *Phys. Lett.* A **292** 309

[9] Bogoliubov N M, Bullough R K, Pang G D 1993 *Phys. Rev.* B **47** 11495

[10] Bogoliubov N M, Izergin A G, Kitanine N A 1998 *Nuclear Physics* B **516** 501

[11] Bogoliubov N M 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 9415

[12] Sklyanin E K 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 2375

[13] Faddeev L D 1996 arXiv: hep-th/9605187

The q-boson hopping model with integrable open boundary condition*

Li Bo Wang Yan-Shen

(*Department of Applied Physics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

(Received 5 January 2006; revised manuscript received 13 February 2006)

Abstract

Utilizing the algebraic Bethe Ansatz method, the Hamiltonian of q-boson hopping model and its eigenvalue equation are calculated under the integrable open boundary condition. Our result may serve as a theoretical basis for studying strongly correlated boson systems of still smaller scales.

Keywords: algebraic Bethe Ansatz, q-boson hopping model, open boundary condition, integrable model

PACC: 0370, 0380, 0550, 0530

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375045).