

脉冲式棘齿势场作用下囚禁离子的规则与混沌运动*

陈文钦^{1,2)} 海文华¹⁾ 李 辉¹⁾ 马志英²⁾

1) 湖南师范大学物理系,长沙 410081)

2) 华南热带农业大学基础学院,儋州 571737)

(2006 年 8 月 9 日收到,2006 年 8 月 16 日收到修改稿)

考虑赝势近似下囚禁于 Paul 阱中的单离子与由脉冲式双激光驻波构成的棘齿势场的相互作用,应用积分方程方法得到系统的经典运动精确解,通过数值方法作出相空间轨道并计算由平均速度定义的流,结合分析与数值结果研究囚禁离子的规则与混沌运动特性.与单驻波型激光脉冲情形相比,发现两个重要的棘齿效应:一是脉冲式棘齿势场的作用导致参数空间混沌区域的改变,从而适当调节第二驻波参数,可使离子的规则运动变为混沌运动,或者混沌运动变为规则运动;二是通过分析平均流随激光参数的变化,发现棘齿势场的介入能使囚禁离子作平均意义上的单向输运.随着势场强度增加到混沌区域,流的强度明显减小并改变方向,系统进入混沌运动.

关键词:脉冲式棘齿势,囚禁离子,混沌,输运

PACC: 0545, 3280

1. 引 言

离子阱与囚禁于阱中的离子构成一个非常有用的物理系统,而激光冷却和离子囚禁技术的结合开辟了离子阱应用的新篇章.目前,离子阱系统已被广泛应用于科学和技术研究的多个领域.它不仅作为一种强有力的工具被用来检验量子力学的基本原理,如非经典态的制备^[1-3],量子跃迁现象的观测^[4],而且在高新技术领域具有广泛的应用前景,如应用于量子逻辑操作^[5-7]、量子计算^[8,9]、量子信息^[10,11]、高精度离子阱频标^[12]、高精光谱测量^[13]和离子阱质谱分析^[14]等等.由于离子阱中囚禁离子的运动对外场参数和初始条件的影响极其敏感,两者的微小变化都可能导致离子的经典运动轨迹发生较大的偏移,甚至产生不可预测的混沌现象.根据量子-经典对应原理,经典不稳定性与混沌特征必将在离子的量子运动中有所对应.因此对囚禁离子各种新的经典运动性质的研究仍然是必要和重要的.

目前已经有许多文献对单离子和多离子体系的动力学特征进行了深入研究^[15,16].囚禁于离子阱中的单个离子,由于不与其他粒子碰撞而成为孤立的体系,能长时间地囚禁于阱中.通过施加外场与离子

相互作用,可以探索系统的各种有趣的物理性质.单离子与激光场之间的相互作用已经吸引了许多研究者,相关的研究结果也较多^[17,18].当激光强度较小时,激光的作用相当于对系统的微扰,单离子在囚禁场中仍然作规则运动.随着激光强度不断增大,非线性现象变得越来越明显,系统逐渐由规则运动进入混沌运动^[19-22].文献 20 研究了激光驻波作用下的单离子系统,文献 21, 22 研究了单驻波型激光脉冲作用下的囚禁单离子系统.

与单束激光驻波对离子作用不同,两束激光驻波作用于离子将产生所谓的棘齿效应^[23,24].近年来,有关棘齿效应的研究很多,研究的领域也很广,比较典型的有在不对称周期势中布朗粒子的运动^[24,25]、约瑟夫森结阵列中棘齿势对磁通的作用^[26,27]、冷原子中不对称光学晶格的棘齿效应^[23,28]和其他量子领域的“棘齿效应”^[29]等等.在文献 24]中,作者研究了在不对称棘齿势作用下粒子的经典动力学问题,采用不同时刻和不同初始条件下的平均速度定义了粒子流,通过分析流随棘齿势强度的变化曲线与平均速度的分叉图之间的关系,得到了粒子的混沌运动与反向流之间的联系.

本文主要探讨在赝势近似下和由脉冲式双激光驻波构成的棘齿势场作用下,囚禁于 Paul 阱中的单

* 国家自然科学基金(批准号:10575034,10547115)和波谱与原子分子物理国家重点实验室(批准号:1152504)资助的课题.

† 通讯作者, E-mail: whhai2005@yahoo.com.cn

离子系统的规则与混沌运动. 我们首先应用积分方程方法得到系统的经典运动精确解, 包括任意时间区间的连续运动态和以激光脉冲打开时刻为时间变量的离散映射关系. 通过数值方法作出在不同参数值和不同初始条件下的相空间轨道并计算由平均速度定义的流. 结合分析与数值结果研究囚禁离子的规则与混沌运动特性. 与单驻波型激光脉冲情形相比, 我们发现脉冲式棘齿势场作用下的囚禁离子的运动要复杂得多. 存在两个重要的棘齿效应: 一是适当调节棘齿势场的第二驻波强度, 可使离子由规则运动变为混沌运动, 或者由混沌运动变为规则运动; 二是通过分析平均流随激光参数的变化, 发现在囚禁势存在的情况下, 棘齿势场的介入也可能使离子产生平均意义下的单向输运. 随着势场强度增加到混沌区域, 平均流的强度明显减小并改变方向, 系统进入混沌运动.

2. 系统的经典运动精确解

我们考虑囚禁于 Pual 阱中的一维单离子, 沿 x 方向引入两列激光驻波, 它们的强度正比于 Rabi 频率的平方, 在一定条件下可用 δ 脉冲来近似^[30]. 若周期性地开关激光源, 两列激光驻波形成脉冲式棘齿型势场^[23, 24]. 在赝势近似下, 系统的哈密顿量可写为^[21, 23, 24, 30]

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + KV(x) \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - iT), \quad (1)$$

式中 i 为整数, m 为离子质量, p 和 x 分别为离子动量和坐标, ω_0 为阱频, 与加在 Pual 阱上的直流电压和交流电压以及阱参数有关; T 为开关激光光源的时间周期, $K = \hbar\sigma\sqrt{\pi}\Omega_0^2/(8\Delta)$ 为势场的有效强度, 与 \hbar 有相同量纲, 其中 Δ 为失谐量, $\sigma \rightarrow 0$ 为脉冲宽度, Ω_0 为 Rabi 频率; $V(x)$ 是无量纲棘齿型周期势,

$$V(x) = \cos(2kx) + \alpha \cos\left(4kx - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2)$$

式中 α 为控制棘齿型周期势的倾斜因子, 取值一般在 0 至 0.5 之间, 是无量纲参数, k 为第一列激光驻波的波矢, 第二列激光驻波的波矢为 $2k$. 当选取参数 $\alpha = 0.25$ 和 $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ 时, 棘齿势 $V(x)$ 如图 1 所示. 由图可见, 该棘齿势的每个势阱或势垒都是左右不对称的.

将 (1) 式代入哈密顿正则方程, 可以得到离子在

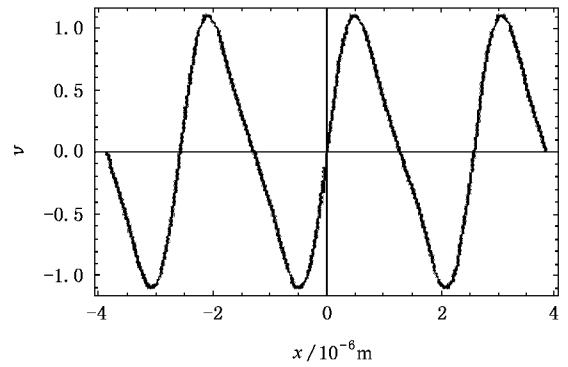


图 1 参数取为 $\alpha = 0.25$ 和 $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ 情形的无量纲棘齿型周期势

阱中受棘齿型周期势作用的经典运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \left[\sin(2kx) + 2\alpha \sin\left(4kx - \frac{\pi}{2}\right) \right] \times \sum_{i=1}^{\infty} \delta(t - iT), \quad (3)$$

式中 $a = 2Kk/m$ 与速度具有相同的量纲. 下面分两种情形对方程 (3) 的解进行分析.

1) 当时间 $t \neq iT$ 时 (3) 式因右边等于 0 而成为简谐运动方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4)$$

方程 (4) 在时间区间 $(i-1)T < t < iT$ 的解为我们熟知的

$$x = A_i \cos(\omega_0 t) + B_i \sin(\omega_0 t), \quad (5a)$$

$$\dot{x} = -\omega_0 A_i \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B_i \cos(\omega_0 t), \quad (5b)$$

A_i, B_i 为由初始条件决定的积分常数. (5) 式表明, 当 $t \neq iT$ 时, 离子作频率为 ω_0 、振幅为 $\sqrt{A_i^2 + B_i^2}$ 的周期运动, 但对于不同的时间区间, A_i 和 B_i 为不同的待定常数.

2) 当 $t = iT$ 时, 设 $0 < \epsilon \ll 1$, 由于位置 x 是连续的, 可以得到 iT 和 $(iT \pm \epsilon)$ 时刻有相同的位置表达式, 即

$$x_i = x(iT) = A_i \cos(\omega_0 iT) + B_i \sin(\omega_0 iT) \approx x(iT \pm \epsilon). \quad (6)$$

下面利用文献 [31, 32] 中提出的解积分方程的方法, 求给定初始坐标 A_1 和初始速度 $\omega_0 B_1$ 时方程 (3) 的精确解. 首先求 (4) 式的两线性无关解

$$X_1 = \sin(\omega_0 t), \quad (7a)$$

$$X_2 = X_1 \int X_1^{-2} dt = -\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_0 t). \quad (7b)$$

这样可以得到在时间区间 $0 < t < iT$, 与微分方程

(3) 完全等价的积分方程

$$\begin{aligned}
 x = & A_1 \cos(\omega_0 t) + X_2 \int_{T-\varepsilon}^{iT-\varepsilon} X_1 a \left[\sin(2kx) \right. \\
 & \left. + 2\alpha \sin\left(4kx - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sum_{n=1}^{i-1} \delta(t - nT) dt \\
 & + B_1 \sin(\omega_0 t) - X_1 \int_{T-\varepsilon}^{iT-\varepsilon} X_2 a \left[\sin(2kx) \right. \\
 & \left. + 2\alpha \sin\left(4kx - \frac{\pi}{2}\right) \right] \sum_{n=1}^{i-1} \delta(t - nT) dt. \quad (8)
 \end{aligned}$$

利用 δ 函数的性质, 将(7)式代入(8)式, 我们得到在时间区间 $0 < t < iT$ 的精确解

$$\begin{aligned}
 x = & A_1 \cos(\omega_0 t) - a \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 & + B_1 \sin(\omega_0 t) + a \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (9)
 \end{aligned}$$

它描述系统在任意时间区间的连续运动态. 再利用(5)式和(6)式即可得到在 $t = iT$ 时刻的精确解

$$\begin{aligned}
 x_i = & A_1 \cos(\omega_0 iT) - a \frac{\cos(\omega_0 iT)}{\omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 & + B_1 \sin(\omega_0 iT) + a \frac{\sin(\omega_0 iT)}{\omega_0} \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (10a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i = & -\omega_0 A_1 \sin(\omega_0 iT) + a \sin(\omega_0 iT) \sum_{n=1}^{i-1} \sin(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 & + \omega_0 B_1 \cos(\omega_0 iT) + a \cos(\omega_0 iT) \sum_{n=1}^{i-1} \cos(\omega_0 nT) \\
 & \times \left[\sin(2kx_n) + 2\alpha \sin\left(4kx_n - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (10b)
 \end{aligned}$$

很显然, 式中 $A_1 = x_0$, $\omega_0 B_1 = v_0$, x_0 和 $v_0 = \dot{x}_0$ 分别为初始时刻 ($t = 0$) 离子运动的位置和速度. 由(10)式容易得到离子在 $t = iT$ ($i > 1$) 时刻位置和速度的递推式

$$\begin{aligned}
 x_i = & x_{i-1} \cos(\omega_0 T) + \frac{\dot{x}_{i-1}}{\omega_0} \sin(\omega_0 T) \\
 & + a \frac{\sin(\omega_0 T)}{\omega_0} \left[\sin(2kx_{i-1}) + 2\alpha \sin\left(4kx_{i-1} - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (11a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i = & -\omega_0 x_{i-1} \sin(\omega_0 T) + \dot{x}_{i-1} \cos(\omega_0 T) \\
 & + a \cos(\omega_0 T) \left[\sin(2kx_{i-1}) + 2\alpha \sin\left(4kx_{i-1} - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (11b)
 \end{aligned}$$

它们给出以激光脉冲打开时刻为时间变量的离散映射关系. 从(11)式可以看出, 只要给定初始时刻的位置和速度 x_0, \dot{x}_0 , 就可以通过迭代得到任意 iT 时刻的运动状态.

3. 囚禁离子的规则与混沌轨道

当(3)式中 $\alpha = 0$ 时, 文献[21]已经对囚禁离子的规则和混沌运动进行了深入的分析. 显然, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 也就是说存在棘齿势作用时, 囚禁离子的运动会更加复杂. 由(11)式出发, 利用数学软件 Mathematica 编制迭代程序, 我们画出了不同参数值和初始条件下囚禁单离子 $^9\text{Be}^+$ 的相空间轨道, 并用以对囚禁离子的规则与混沌运动作进一步研究.

首先, 我们考虑离子运动随参数 α 变化的情况. 选取参数 $a = 0.027394 \text{ m/s}$, $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.3650 \times 10^5 \text{ Hz}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, $x(0) = 6.00 \times 10^{-5} \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$. 当 $\alpha = 0$ 时, 所得的图像如图 2(a) 所示, 图像点构成封闭曲线, 表明囚禁离子作周期运动. 当 $\alpha \neq 0$, 即存在棘齿势时, 离子运动将随着 α 的增加而变得更加复杂. 我们通过数值实验发现, $\alpha = 0.11$ 时, 离子将逐渐由周期运动进入混沌运动. 当到 $\alpha = 0.171$ 时, 图像点已经完全扩散开来, 混沌现象已经很明显, 如图 2(b) 所示. 当 $\alpha = 0.25$ 时, 图像如图 2(c) 所示, 图像点混乱程度继续增加, 并且出现分形结构, 表明囚禁离子的运动越来越复杂, 混沌程度加深, 混沌区域扩大. 然后, 我们分别研究了 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.25$ 时, 也就是有无棘齿周期势两种情况下, 囚禁离子运动随着参数 α, ω_0, T 的变化情形. 我们发现, 在其他参数和初始条件不变的情况下, $\alpha = 0$ 时, 囚禁离子要在势场的有效强度值达到 $a = 0.032 \text{ m/s}$ 时才开始进入混沌运动, 而 $\alpha = 0.25$ 时, 在 $a = 0.0163 \text{ m/s}$ 时就开始进入混沌运动, 如图 2(d) 所示. 同样, 在其他参数和初始条件不变的情况下, $\alpha = 0$ 时, 有多个 ω_0 的取值区间, 可以使离子出现周期运动, 例如阱频区间 $[2.36800 \times 10^5 \text{ Hz}, 2.38100 \times 10^5 \text{ Hz}]$ 等. 在 $\alpha = 0.25$ 时, 只有少数狭窄的阱频区间出现周期运动, 如在较小的阱频区间 $[2.38310 \times 10^5 \text{ Hz}, 2.38430 \times 10^5 \text{ Hz}]$, 囚禁离子作周

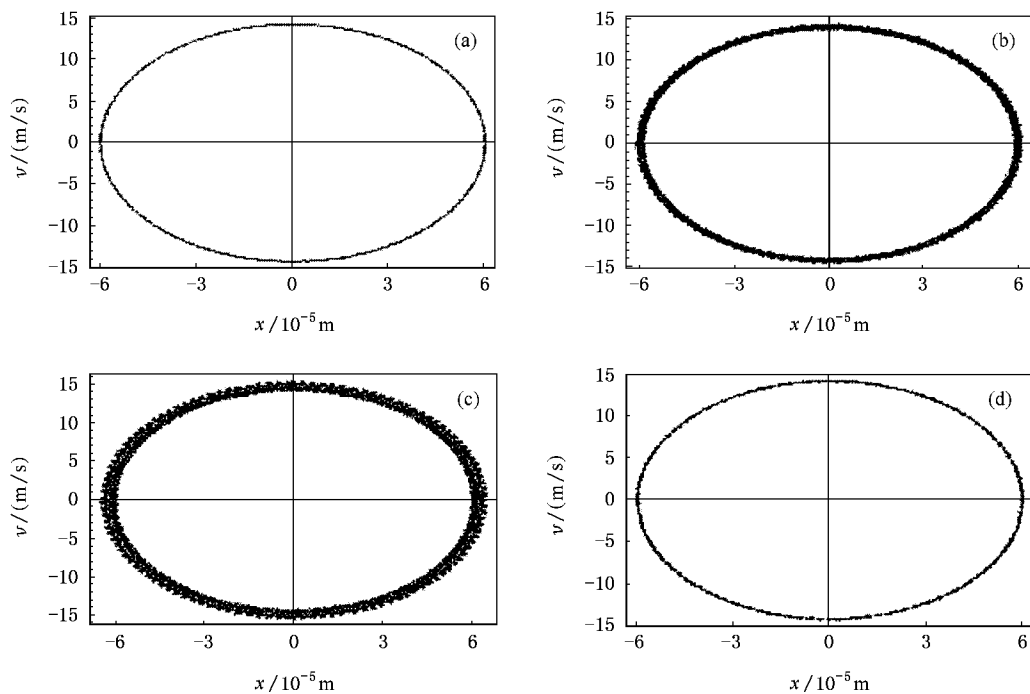


图 2 不同 α 和 a 值对应的相空间轨道 (其他参数和初始值取为 $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5 \text{ Hz}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, $x(0) = 6.00 \times 10^{-5} \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$) (a) $\alpha = 0$, $a = 0.027394 \text{ m/s}$, 图像为封闭曲线, 表明离子作周期运动 (b) $\alpha = 0.171$, $a = 0.027394 \text{ m/s}$, 图像向四周完全扩散开来且分布是混乱的, 表明离子逐渐由周期运动过渡到了混沌运动 (c) $\alpha = 0.25$, $a = 0.027394 \text{ m/s}$, 图像点混乱程度继续增加, 并且出现分形结构, 表明囚禁离子运动的混乱程度加深, 混沌区域扩大 (d) $\alpha = 0.25$, $a = 0.0163 \text{ m/s}$, 图像点对比 (a) 有一定扩散, 表明在势场的有效强度较弱时, 第二个激光的介入也能导致混沌运动

期运动. 同时在研究周期 T 对离子运动的影响时, 发现有相类似的由第二个激光介入引起的周期运动参数区域减小的现象. 由此我们得出结论, 棘齿势场对囚禁离子的影响要比单激光驻波的影响复杂的多. 前者更容易使囚禁离子进入混沌状态.

此外, 通过研究也发现, 在选取合适参数的情况下, 第二个激光的介入也有可能使原来的混沌运动变为周期运动. 即在棘齿势场下系统的周期运动参数区域中, 存在 $\alpha = 0$ 时系统的混沌运动参数区域. 例如当选取参数 $\alpha = 0$, $a = 0.027394 \text{ m/s}$, $T = 8.30 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5 \text{ Hz}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, $x(0) = 6.00 \times 10^{-5} \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0$, 这里的参数与图 2(a) 比较仅仅是将开关激光源的周期 T 变小了, 但此时我们发现囚禁离子的运动是混乱的, 如图 3(a) 所示. 如果其他参数不变, 取 $\alpha = 0.25$, 也就是第二个激光的介入形成棘齿周期势场后, 囚禁离子的运动反而变为周期的了, 如图 3(b) 所示. 而且此时非常有趣的就是, 相点全部落在相空间的 32 个点上, 囚禁离子以 $32T$ 为一个时间周期依次在相空间的 32 个位置上作周期运动.

为了进一步了解棘齿势场对囚禁离子的影响, 我们还对弱囚禁状态的离子进行了研究. 此时调节加在势阱上的直流电压和交流电压, 可使阱频 ω_0 很小, 从而方程 (3) 中 ω_0^2 项可以看作微扰. 因此, 在零级近似下, 可认为 (11) 式中 $\omega_0 \rightarrow 0$. 为了简单, 设新变量 $y = \dot{x}T$. 利用罗比塔法则, 由 (11) 式可以得到 $\omega_0 \rightarrow 0$ 情形的递推关系式

$$x_i = x_{i-1} + y_{i-1} + aT \left[\sin(2kx_{i-1}) + 2\alpha \sin\left(4kx_{i-1} - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (12a)$$

$$y_i = y_{i-1} + aT \left[\sin(2kx_{i-1}) + 2\alpha \sin\left(4kx_{i-1} - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (12b)$$

当 $\alpha = 0$ 时 (12) 式是熟知的标准映射. 为了研究第二个激光的介入对标准映射下离子运动的影响, 取参数 $a = 0.4202 \text{ m/s}$, $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$, $x(0) = 6.00 \text{ m} \times 10^{-5}$, $\dot{x}(0) = 0$, 作不同 α 值对应的相空间轨道如图 4 所示. 图 4(a) 说明, 当 $\alpha = 0$ 时离子作周期运动. 图 4(b) 取 $\alpha = 0.25$ 形成的

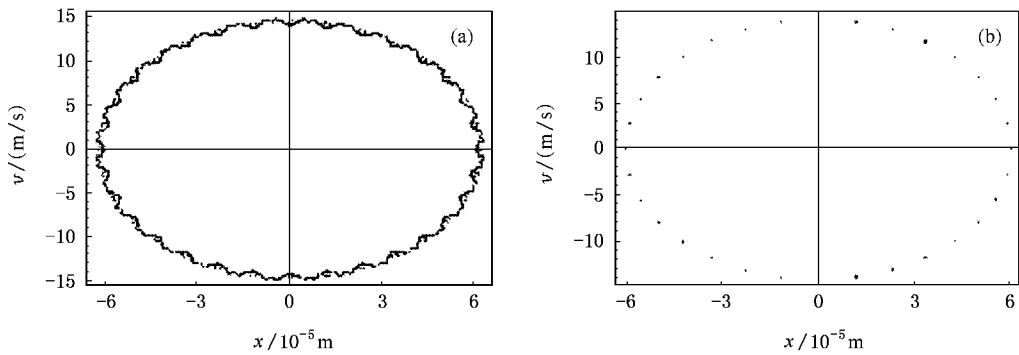


图3 不同 α 值对应的相空间轨道(其他参数和初始值取为 $a = 0.027394$ m/s, $T = 8.30 \times 10^{-7}$ s, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5$ Hz, $k = 1.22 \times 10^6$ m $^{-1}$, $x(0) = 6.00 \times 10^{-5}$ m, $\dot{x}(0) = 0$) (a) $\alpha = 0$, 离子运动相空间状态点偏离单一曲线扩散开来, 明显具有不规则性, 表明囚禁离子处于混沌状态 (b) $\alpha = 0.25$, 图像点以 $32T$ 为一个时间周期分别依次落在不同的 32 个位置上, 显然囚禁离子做周期运动

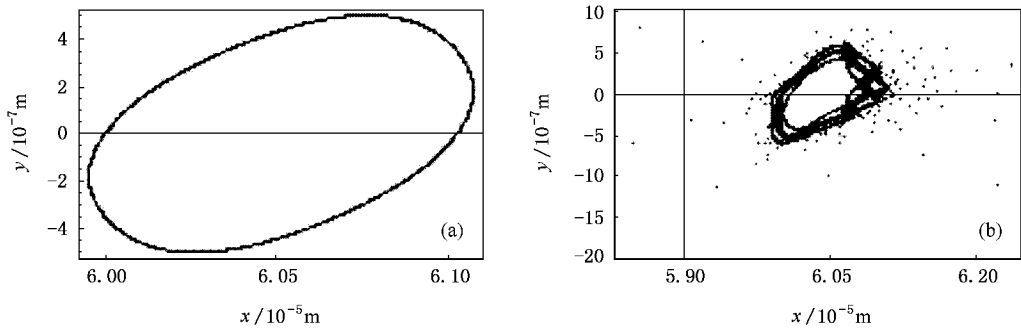


图4 阱频趋近零时不同 α 值对应的相空间轨道(其他参数和初始取值为 $a = 0.4202$ m/s, $T = 8.78 \times 10^{-7}$ s, $k = 1.22 \times 10^6$ m $^{-1}$, $x(0) = 6.00 \times 10^{-5}$ m, $\dot{x}(0) = 0$) (a) $\alpha = 0$, 离子运动相点成单一闭合曲线, 表明囚禁离子作周期运动 (b) $\alpha = 0.25$, 运动轨迹出现复杂结构, 表明系统已进入混沌运动状态

棘齿势场, 离子运动轨迹出现复杂结构, 表明已进入混沌运动状态。

4. 平均流与输运现象

前面讨论了囚禁离子的运动特性, 本节将讨论有无棘齿势作用时囚禁离子的输运性质。在文献 [24] 中, 作者研究非囚禁粒子在空间棘齿势和时间周期驱动共存情形的经典运动。他们采用不同时刻和不同初始条件下的平均速度定义了粒子流, 并分析了产生反向流的临界值附近参数的改变对动力学性质的影响, 由此揭示了反向流的起因。其中流 J 的定义包括两个平均: 首先, 选取初速度 $\dot{x} = 0$, 然后以 $x_0 = 0$ 为中心均匀地选取 M 个不同初始位置为初始条件, 对应于第 i 个初始条件离子在 t_j 时刻的速度为 \dot{x}_i , 这样就得到第一个对不同初始条件的速

度平均值

$$v_j = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \dot{x}_i(t_j), j = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

按照 (13) 式可以得到 N 个不同离散时刻的平均值 v_j , 把这 N 个平均值 v_j 再对时间取平均值, 这样得到的第二个速度平均值即为所定义的流

$$J = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j. \quad (14)$$

在这样定义的流 J 是系统参数的函数。设定部分参数, 可以得到流 J 随有效强度 a 的变化关系。文献 [24] 通过分析产生反向流的临界参数值附近系统的动力学性质, 得到反向流产生的原因, 即发生反向流时, 系统由规则运动转入混沌运动。本文所考虑的流与囚禁离子的动力学性质是否有类似的关系呢?

本文不同于文献 [24], 我们的系统包含谐振子囚禁势和时间 δ 函数势, 但仍可采用 (13) 式和 (14) 式中流的定义。从 (11) 式可以得到任意 t_j 时刻的速

度,代入(13)和(14)式即得平均流 J ,显然它是参数 α, a, T, k 和 ω_0 的函数.我们将取定其他参数,只考虑流 J 随激光参数 α 和 a 的变化情形.

首先选取 $a = 0.027394 \text{ m/s}$, $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5 \text{ Hz}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$,由(13)和(14)式数值计算流 J 随参数 α 的变化情况,得到结果如图5所示.从图5(a)可以看出,随着倾斜因子 α 作微小变化,平均流发生很大的变化.但在 α 值小于0.17情形,其数值总是大于零.这意味着虽然存在谐振子囚禁势,离子也能产生平均意义上的单向输运,这只能是一种棘齿效应.当然,从图5可见,这

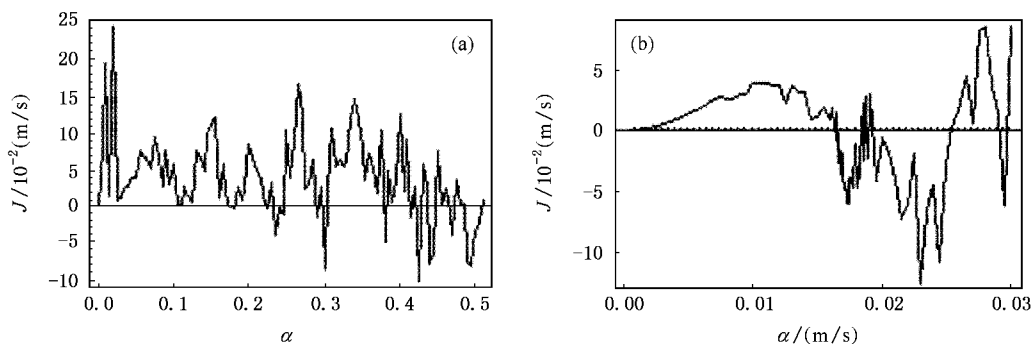


图5 由平均速度定义的流 J 随参数 a 和 α 的变化曲线(其他参数取为 $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5 \text{ Hz}$, $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$) (a) $a = 0.027394 \text{ m/s}$, J 随参数 α 的变化曲线 (b)虚线和实线分别表示 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.25$ 时流 J 随参数 a 的变化曲线

其次取参数 $T = 8.78 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\omega_0 = 2.365 \times 10^5 \text{ Hz}$ 和 $k = 1.22 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$,分别就 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 0.25$ 两种情形,数值计算流 J 随势场的有效强度 a 的变化情况,所得结果如图5(b)所示.图5(b)中的虚线表示 $\alpha = 0$ 时流 J 随参数 a 的变化,显然,该情形流始终接近零,数量级在 10^{-17} m/s 以下.从图5(b)实线可以看出,当 $\alpha = 0.25$ 时,随着参数 a 的变化,平均流 J 的大小先增后减,在临界值 $a = 0.01630775 \text{ m/s}$ 处出现反向流.对比前面给出的相空间轨迹图,我们注意到,此时囚禁离子的运动刚刚由周期运动过渡到混沌运动.由此可见,在棘齿势场情形,出现反向流仍是混沌起始的标志.

5. 结论与讨论

通过由两列激光驻波形成的棘齿势与物理系统相互作用,研究棘齿效应带来的新的物理现象,近年来受到研究者的广泛关注.在离子阱中实现棘齿势与囚禁离子的相互作用,是一个实验可操作的有用

种单向输运的平均流很弱,因为流 J 的取值很小.当 α 值大于0.17时,出现 $J < 0$ 的反向流.虽然在 $\alpha = 0.11$ 时,相空间轨迹图显示离子运动将逐渐由周期运动进入混沌运动,但此时图5(a)中流 J 锐减到接近0,并未出现 $J < 0$ 的情况.而且在此后一段 α 值也维持流 J 具有较小值,并在离子运动的过渡阶段流 J 又升到一个较大值.直到囚禁离子明显进入混沌运动所对应的 α 值(如图5(a)所示,此时 $\alpha = 0.171$),才出现反向流.这说明棘齿势场作用下反向流的出现确实与囚禁离子运动性质的突变存在着内在联系.

的方案.本文考虑的脉冲式棘齿势场,只需在文献[30]的系统中添加一列激光驻波即可得到.我们研究在这样的棘齿势场下囚禁单离子的规则与混沌运动性质,寻求相关的棘齿效应导致的物理现象.利用积分方程方法,我们得到系统的经典运动精确解,包括任意时间区间的连续运动态和以激光脉冲打开时刻为时间变量的离散映射关系.利用该精确解和数值方法,我们作出了在不同参数值和不同初始条件下的相空间轨道,计算了用平均速度定义的流随棘齿势场参数的变化情况.结合分析与数值结果,我们得到囚禁离子在棘齿周期势中规则运动和混沌运动的参数区域.与单驻波型激光脉冲情形相比,我们发现棘齿势场的存在使囚禁离子的运动变得更加复杂.我们的结果证实了两个重要的棘齿效应:一是脉冲式棘齿势场的作用导致参数空间混沌区域增大,规则区域减小,并部分改变两区域的位置;从而适当调节棘齿势场的第二驻波强度,可使离子由规则运动状态进入混沌运动,或者将混沌运动变为规则运动;二是通过计算不同参数情形的平均流,得到在无

棘齿势场时,流的取值的数量级在 10^{-17} m/s 以下,可以忽略,而棘齿势场的介入导致平均流的取值明显增大.这揭示了在囚禁势存在的情况下,棘齿势场能使离子产生平均意义下的单向输运.随着势场强

度增加到混沌区域,流的强度明显减小并改变方向,反向流的出现成为系统进入混沌运动的标志.上述棘齿效应是实验上可观测的,我们期待利用现有的离子阱技术,实验观测这些效应.

- [1] Heinzen D J , Wineland D J 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2977
- [2] Wu Y , Yang X ,1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3086
de Matos Filho R. L , Vogel W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 608
Wu Y 2001 *Phys. Rev. A* **63** 052303
- [3] Feng M ,Hai W H ,Zhu X W ,Gao K L ,Shi L 2000 *Chin. Phys.* **9** 250
Feng M , Wang X G 2002 *J. Opt. B : Quantum Semi-class. Opt.* **4** 283
Fang X M , Feng M , Shi L ,Gao K L , Zhu X W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2160 (in Chinese) [方细明、冯 芒、施 磊、高克林、朱熙文 1997 物理学报 **46** 2160]
- [4] Cirac J , Blatt R , Parkins A S , Zoller P 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1202
- [5] Protsenko E , Reymond G , Schlosser N , Grangier P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062306
- [6] Lan H J , Yang Q Y , Wei L F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1730 (in Chinese) [蓝海江、杨庆怡、韦联福 2002 物理学报 **51** 1730]
- [7] Sasura M , Buzck V 2001 *Phys. Rev. A* **64** 012305
- [8] Jiannis P , Herbert W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 187903
- [9] Jonathan M , Plenio M B , Knight P L 2002 *Phys. Rev. A* **62** 042307
- [10] Steane A , Roos C , Stevens F , Mundt D A , Leibfried D , Schmidt-Kaler F , Blatt R 2000 *Phys. Rev. A* **62** 042305
Nagerl H C , Leibfried D , Rohde H , Thalhammer G , Eschner J , Schmidt-Kaler F , Blatt R 1999 *Phys. Rev. A* **60** 145
- [11] Fang M F , Liu X . 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2363 (in Chinese) [方卯发、刘 翔 2001 物理学报 **50** 2363]
- [12] Blatt R 1993 in *Fundamental systems in quantum optics* , Proceedings of the les Houches Summer School , Session LIII , edited by Raymond J M and Zinujustin J (North Holland , Amsterdam) P253
- [13] Wineland D J , Bollinger J J , Itano W M , Moore F L , Heinzen D J 1992 *Phys. Rev. A* **46** R6797
- [14] Chen Y , Qi C H , Han F M 2005 *Chem. J. Chinese Universities* **26** 1828 (in Chinese) [陈 勇、祁春华、韩凤梅 2005 高等学校化学学报 **26** 1828]
- [15] Shi L , Duan Y W , Feng M , Zhu X W , Fang X M 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1248 (in Chinese) [施 磊、段宜武、冯 芒、朱熙文、方细明 1998 物理学报 **47** 1248]
- [16] Hai W H , Huang S , Gao K 2003 *J. Phys. B* **36** 3055
Hai W H , Feng M , Zhu X *et al* 2000 *Inter. J. Theor. Phys.* **39** 1405
Wu Y W , Hai W H , Cai L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 583 (in Chinese) [邬云文、海文华、蔡丽华 2006 物理学报 **55** 583]
Cai L , Hai W H , Lu G B 2006 *Chin Phys* **15** 1275
- [17] Gao K L , Zhu X W 1997 *Physics* **26** **11** (in Chinese) [高克林、朱熙文 1997 物理 **26** 11]
- [18] Jiang Y , Feng M , Gao K L , Zhu X W 2001 *Chin. Phys.* **9** 202
Cai L H , Hai W H , Wu Y W 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 1089
- [19] Hai W H , Duan Y W , Zhu X W *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2177 (in Chinese) [海文华、段宜武、朱熙文等 1997 物理学报 **46** 2117]
- [20] Hai W H , Duan Y W , Zhu X W *et al* 1998 *J. Phys. A* **31** 2991
Hai W H , Feng M , Zhu X W , Shi L , Gao K L , Fang X M 1999 *J. Phys. A* **32** 8265
- [21] Li F , Hai W H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1309 (in Chinese) [李飞、海文华 2004 物理学报 **53** 1309]
- [22] Li F , Hai W H , Chong G , Xie Q T 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 599
- [23] Emil L , Mats W 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 110603
- [24] Mateos J L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 258
- [25] Francisco J C , Luis D , Parrondo J M R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 040603
- [26] Majer J M , Peguiron J , Grifoni M , Tusveld M , Mooij M E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 056802
- [27] Zapata I , Bartussek R , Sols F , Hanggi P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2292
- [28] Mennerat-Robilliard C , Lucas D , Guibal S , Tabosa J , Jurczak C , Courtois J Y , Grynberg G 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 851
- [29] Reimann P , Grifoni M , Hanggi P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 10
- [30] Gardiner S A , Cirac J I , Zoller P 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4790
- [31] Hai W H , Feng M , Zhu X W , Shi L , Gao K L , Fang X M 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052105
- [32] Hai W H , Zhu X W , Feng M , Shi L , Gao K L , Fang X M 2001 *J. Phys. A* **34** L79

Regular and chaotic motions of a single trapped ion interacting with a flashing ratchet potential^{*}

Chen Wen-Qin^{1,2)} Hai Wen-Hua^{1)†} Li Hui¹⁾ Ma Zhi-Ying²⁾

1) (Department of Physics , Hunan Normal University , Changsha 410081 , China)

2) (College of Basic Science , South-China University of Tropical Agriculture , Danzhou 571737 , China)

(Received 9 August 2006 ; revised manuscript received 16 August 2006)

Abstract

Under the pseudopotential approximation , for a single Paul trapped ion which interacts with a flashing ratchet potential formed by two laser standing waves , we apply the method of integral-equation to construct the exact solution of the classical equation , and use the numerical technique to plot the orbits in phase space and calculate the current defined by the average velocity . By combining the analytical results with numerical ones , we investigate the regular and chaotic motions of the system . Compared to the case of the flashing lattice potential , two important ratchet effects are found here : First , the flashing ratchet potential changes the chaotic region in the parameter space such that we can make the regular motion of ion chaotic or *vice versa* by adjusting the parameters of the second laser . Secondly , by analyzing the evolutions of the average current versus the laser parameters , we find that the presence of the flashing ratchet potential can lead the trapped ion to be transported in average along a single direction . When the potential strength is increased to the chaotic region , the current decreases evidently and its direction varies , indicating the onset of chaotic motion .

Keywords : flashing ratchet potential , trapped ion , chaos , transportation

PACC : 0545 , 3280

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10575034 , 10547115) and the National Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics of China (Grant No. T152504).

[†] Corresponding Author . E-mail : whhai2005@yahoo.com.cn