

各向异性磁化等离子体的 SO-FDTD 算法^{*}

杨宏伟¹⁾²⁾ 袁 洪¹⁾ 陈如山²⁾ 杨 阳²⁾

1) 南京农业大学物理系, 南京 210095)

2) 南京理工大学通信工程系, 南京 210094)

(2006 年 3 月 15 日收到, 2006 年 7 月 14 日收到修改稿)

给出了一种新的计算各向异性磁化色散介质的有限差分(FDTD)算法,称为移位算子 FDTD(SO-FDTD)算法,它利用算子之间的移位递推关系,将一类色散介质的包含介电常数的表达式写成有理分式函数形式,进而导出 FDTD 中一系列相关量之间的关系.通过计算各向异性等离子体平板对电磁波的反射系数和透射系数,验证了该算法的高效性和高精度,与 JEC 算法相比,可使计算效率提高数倍.

关键词:磁化等离子体,电磁波,FDTD 方法,各向异性

PACC:5240D,5225,5265,4270

1. 引 言

计算色散介质中电磁波传播和散射问题的时域方法已得到了较大发展,其中时域有限差分法(FDTD)是一种简单而有效的时域方法.近年来,又出现了大量的处理色散介质电磁仿真的 FDTD 算法文献,包括递推卷积(RC)法^[1]、辅助方程(ADE)法^[2]、Z 变换法^[3]、分段线性递推卷积(PLRC)法^[4]、电流密度卷积(JEC)法^[5]、分段线性电流密度卷积(PLJEC)算法^[6]、移位算子(SO)法^[7]等^[8-11].然而,由于处理各向异性色散介质的复杂性,使上述算法中,只有一部分方法适应于各向异性色散介质,其中主要有 RC 法^[12]、DI 法^[13]、JEC 法和^[14]和 ADE 法^[15].

本文给出一种新的计算各向异性磁化色散介质的 FDTD 方法,称为移位算子 FDTD 方法(SO-FDTD),当一些频域关系可以表示为有理分式函数时,通过引入离散时域移位算子(SO)直接得到时域和离散时域之间的算子过度关系,进而导出相关量的递推计算公式.其概念简明,无需应用 Z 变换等复杂的数学计算,即可得到与解析解近似的结果.本文通过计算各向异性磁化等离子体平板对电磁波的反射系数和透射系数,与解析解和 PLRC 解进行比较之后,验证了该方法的有效性和正确性,与 JEC 和

PLRC 算法相比,可使计算效率提高.

2. 各向异性磁化等离子体的 SO-FDTD 算法

在各向异性磁化等离子体色散介质中,Maxwell 方程组和相关的方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} + \nu_c \mathbf{J} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E} + \omega_{ce} \times \mathbf{J}, \quad (3)$$

其中 \mathbf{E} , \mathbf{H} 和 \mathbf{J} 分别是电场强度、磁场强度和极化电流密度, ϵ_0 和 μ_0 分别是真空中的介电常数和磁导率, ω_p 为等离子体角频率, ν_c 为电子平均碰撞频率, ω_{ce} 为电子回旋频率.

设外磁场的方向为 +z 轴,方程(3)可写作

$$\frac{dJ_x}{dt} + \nu_c J_x = \epsilon_0 \omega_p^2 E_x - \omega_{ce} J_y, \quad (4)$$

$$\frac{dJ_y}{dt} + \nu_c J_y = \epsilon_0 \omega_p^2 E_y + \omega_{ce} J_x. \quad (5)$$

由(4)和(5)式可见,电流密度的两个分量相互耦合,因此,其 FDTD 迭代需同时进行.

对时谐电磁场,将方程(4)变换到频域,有

^{*} 国家杰出青年科学基金(批准号:60325103)、国家自然科学基金(批准号:60431010)、江苏省自然科学基金(批准号:BK2006203)资助的课题.

† E-mail: phd-hwyang@yahoo.com.cn

$$J_x(\omega) = E_{xx}(\omega) - J_{yy}(\omega), \quad (6)$$

式中,

$$E_{xx}(\omega) = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega + \nu_c} E_x(\omega), \quad (7)$$

$$J_{yy}(\omega) = \frac{\omega_{ce}}{j\omega + \nu_c} J_y(\omega). \quad (8)$$

则(7)和(8)式形式相似,以(7)式为例,用 SO-FDTD 法^[7],可求得如下的递推关系:

$$E_{xx}^{n+1} = \frac{1}{a_0} [\epsilon_0 (b_0 E_x^{n+1} + b_1 E_x^n + b_2 E_x^{n-1}) - a_1 E_{xx}^n - a_2 E_{xx}^{n-1}], \quad (9)$$

其中,

$$a_0 = \nu_c + \frac{2}{\Delta t}, a_1 = 2\nu_c, a_2 = \nu_c - \frac{2}{\Delta t}, \quad (10)$$

$$b_0 = \omega_p^2, b_1 = 2\omega_p^2, b_2 = \omega_p^2,$$

由此可求得 J_x 和 J_y .

取电场 E 的值位于整数时间步,磁场 H 和电流密度 J 位于半个时间步,方程(1)可写为

$$E_x^{n+1} = E_x^n - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} (H_y^{n+1/2} - H_y^{n-1/2}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_x^{n+1/2}, \quad (11)$$

$$E_y^{n+1} = E_y^n + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} (H_x^{n+1/2} - H_x^{n-1/2}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_y^{n+1/2}. \quad (12)$$

磁场 H 的迭代方程与非磁化等离子体介质的方程完全相同.

显然,场量 E, H 和 J 的迭代过程中均未出现复数变量,因此,该算法与文献[14]相比,更加简单有效.此外,RC 算法中存在微分项 $\partial D/\partial t$ 的微分近似,其中 D 为电位移矢量,而本文则无该项,进一步提高了计算精度.

3. SO-FDTD 算法的有效性与高精度

为了检验上述算法的正确性,本文计算了各向异性磁化等离子体厚度 $d = 0.9 \text{ cm}$ 时,电磁波垂直入射到各向异性磁化等离子体表面时的反射系数和透射系数,入射电磁波为高斯脉冲的导数.

计算时,对等离子体厚度 $d = 0.9 \text{ cm}$,磁化等离子体参数取为 $\omega_p = 2\pi \times 50 \times 10^9 \text{ rad/s}$, $\omega_{ce} = 300 \times 10^9 \text{ rad/s}$, $\nu_c = 20 \times 10^9 \text{ Hz}$,计算空间分为 800 个网格,磁化等离子体占中间的 120 个网格,其余为真

空,计算空间步长为 $75 \mu\text{m}$,时间步长为 0.125 ps .图 1 和图 2 给出了 SO-FDTD 算法计算的 0.9 cm 厚磁化等离子体平板的右旋极化(RCP)波和左旋极化(LCP)波的反射系数,图 3 和图 4 分别为 RCP 波和 LCP 波的透射系数,并与解析解^[16]结果进行了比较.结果显示该算法正确,且有很高的计算精度.计算模拟时间步为 1800 步,与 JEC 法^[14]的计算等离子体厚度 1.5 cm 需 10000 时间步相比,模拟时间步大幅度减小.

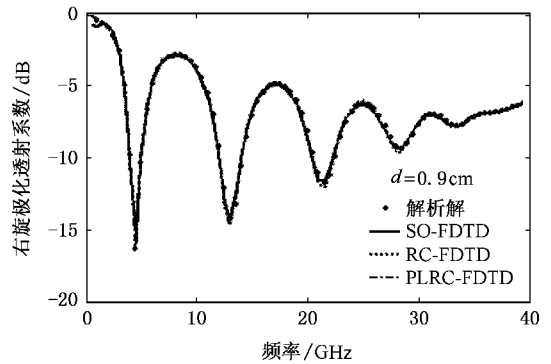


图 1 RCP 波反射系数比较

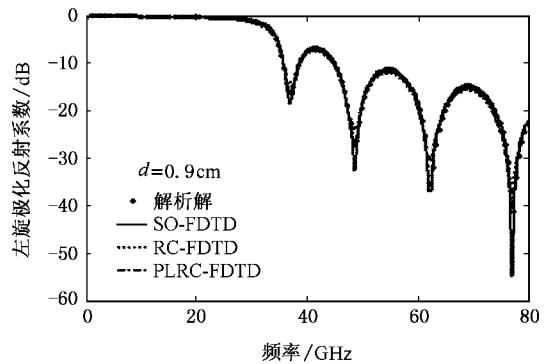


图 2 LCP 波反射系数比较

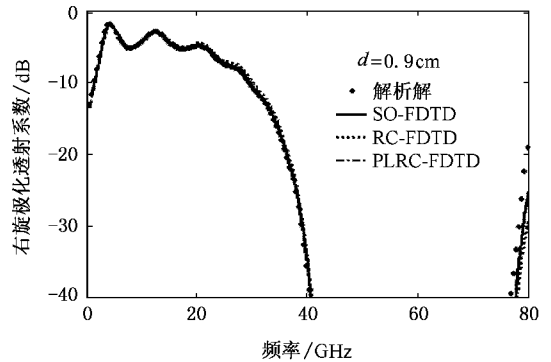


图 3 RCP 波透射系数比较

为了比较该算法的有效性和高精度,图中画出了解析解、SO-FDTD 解、RC-FDTD 和 PLRC-FDTD 方

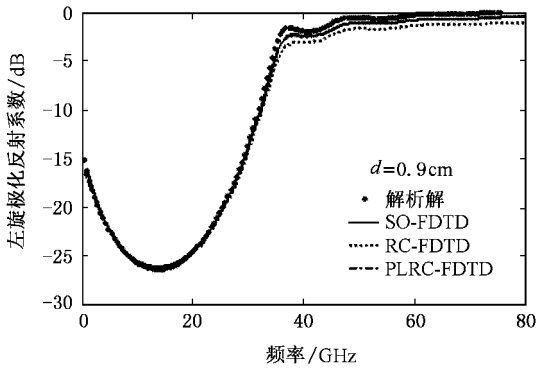


图4 LCP波透射系数比较

法计算该问题的结果.从图中比较这四种方法的精度可见,SO-FDTD具有相当高的计算精度,它比RC-FDTD的精度明显提高.从计算模拟时间步来看,SO-FDTD方法仅是PLRC-FDTD方法时间步的60%,且SO-FDTD的迭代时间很短.从公式推导可以看出,有几种可能使SO-FDTD具有较高的计算精度和计算效率.一是SO-FDTD是直接计算,迭代公式简单,减少了累计误差的产生,而PLRC方法中包含着分段、

递归和卷积等多个复杂过程.二是SO-FDTD仅在实数范围内运算,且加减乘除占大部分,而RC和PLRC都需要进行复数处理,且包含较多的指数运算.三是SO-FDTD公式简单,易于编程实现,而RC和PLRC的公式则相当复杂.由于PLRC-FDTD在计算过程中需要进行卷积等复杂运算,且迭代公式复杂,因此,在计算该类问题时,用SO-FDTD方法更具有优越性.

4. 结 论

本文将SO-FDTD算法推广应用到各向异性磁化等离子体色散介质中,推导了相应的计算公式,该算法同时解决了电磁波在各向异性频率色散介质中传播的难题,由于该算法消除了PLRC法中的多项卷积计算,因此,该算法既保证了计算的高效率,又有较高的计算精度.此外,通过计算磁化等离子体平板对平行于磁场传播的电磁波的反射和透射系数,与解析结果比较,验证了该算法的高效性和高精度.

[1] Lubbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **39** 29
 [2] Nickisch L J, Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propagat. Mag.* **34** 33
 [3] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1223
 [4] Kelley D F, Lubbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **44** 792
 [5] Chen Q, Katsurai M, Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **46** 1739
 [6] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 778 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]
 [7] Yang H W, Chen R S, Zhang Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3464 (in Chinese) [杨宏伟、陈如山、张云 2006 物理学报 **55** 3464]
 [8] Liu S B, Liu S Q 2004 *Chinese Physics* **13** 1892
 [9] Qian Z H, Chen R S, Yang H W 2005 *Microwave and Optical Technology Letters* **47** 147

[10] Qian Z H, Chen R S, Yang H W 2005 *Journal of Nanjing University of Science and Technology* **29** 510 (in Chinese) [钱志华、陈如山、杨宏伟 2005 南京理工大学学报 **29** 510]
 [11] Sullivan D M 2000 *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method* (New York: IEEE Press)
 [12] Hunsberger F, Lubbers R, Kunz K 1992 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **40** 1489
 [13] Young J L 1994 *Radio Sci.* **29** 1513
 [14] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 783 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 783]
 [15] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2233 (in Chinese) [刘少斌、莫锦军、袁乃昌 2004 物理学报 **53** 2233]
 [16] Yuan J H, Mo H D 1990 *The Wave in Plasma* (in Chinese) [袁敬阔、莫怀德 1990 等离子体中的波(成都:电子科技大学出版社)]

SO-FDTD analysis of anisotropic magnetized plasma^{*}

Yang Hong-Wei^{1,2,†} Yuan Hong¹⁾ Chen Ru-Shan²⁾ Yang Yang²⁾

¹⁾ *Department of Physics, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China*

²⁾ *Department of Communication Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*

(Received 15 March 2006 ; revised manuscript received 14 July 2006)

Abstract

A novel finite-difference time-domain (FDTD) method , called shift operator FDTD (SO-FDTD) method is developed for anisotropic magnetized dispersive media. The recursive relation between operators is used. In this paper , some expressions containing the dielectric constants of magnetized dispersive media are written as rational polynomial function. The SO-FDTD formulation for anisotropic magnetized plasma is derived. The high efficiency and effectiveness of the method are confirmed by computing the reflection and transmission through a magnetized plasma layer , with the direction of the propagation parallel to the direction of the biasing field. A comparison with frequency domain analytic results is included. The CPU time was several times shorter than that of the JEC method.

Keywords : magnetized plasma , electromagnetic wave , FDTD method , anisotropy

PACC : 5240D , 5225 , 5265 , 4270

^{*} Project supported by the National Science Found for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 60325103), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60431010), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province , China (Grant No. BK2006203).

[†] E-mail : phd-hwyang@yahoo.com.cn