

# 一类非线性微分方程的近似解析解\*

郑连存<sup>1)†</sup> 冯志丰<sup>1)</sup> 张欣欣<sup>2)</sup>

1) 北京科技大学数学力学系, 北京 100083)

2) 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083)

(2006 年 6 月 15 日收到, 2006 年 8 月 20 日收到修改稿)

从理论上研究了一类广义扩散方程的求解问题. 利用相似变换和解析拆分技巧给出了求解该类非线性微分方程近似解的一种有效方法, 方程的解可以表示为一个收敛的幂级数. 近似解结果和数值结果非常符合, 证明了所提出的方法的准确性和可靠性, 该方法可以用于解决其他科学和工程技术问题.

关键词: 广义扩散方程, 非线性边界值问题, 解析拆分, 近似解析解

PACC: 6610C, 4410, 0365D, 4430

## 1. 引 言

传热和扩散现象普遍存在于自然界和生产实际, 一直受到众多科学家和工程技术人员的极大关注. 1961 年 Philip<sup>[1]</sup> 建议用偏微分方程

$$u_t = (k(u) | u_x |^{N-1} u_x)_x \quad (1)$$

来描述某种确定的广义扩散过程. 当方程(1)用来描述非稳态热传导时,  $D(u) = -k(u) | u_x |^{N-1} u_x$  表示单位长度的热流密度,  $k(u)$  表示导热系数. 很多人对方程(1)在各种边界条件下的求解问题进行过研究, 发表了很多论文和报道<sup>[2-13]</sup>.

本文研究方程(1)在如下初、边值条件下的求解问题:

$$u(0, t) = 1, t > 0; u(x, 0) = 0, x > 0, \quad (2a)$$

$$u(x, 0) = 1, x < 0; u(x, 0) = 0, x > 0, t > 0. \quad (2b)$$

从下面的讨论中可以看到, 在特定的条件下, 可以通过求解如下非线性常微分方程  $-g''(z) = K(z) | g(z) |^{1/N}$  来得到方程(1)的相似解<sup>[2,3]</sup>; 该方程可以描述在局部电压  $V(z)$  不变时一维热传导介质中的温度分布函数  $g(z)$ , 稳定的电流使得每一点均成为热源,  $z$  点的电阻系数是  $\sigma(z) | g(z) |^{1/N}$ , 并有  $V^2(z) \sigma(z) = K(z)$ , 通常导热性系数设为 1.

根据问题的物理意义, 我们仅研究方程的正

解. 除非特殊说明, 本文遵循有如下假定:

1)  $N > 0$ ; 2)  $k(z)$  为幂函数; 3)  $g(z) \geq 0$ .

## 2. 相似变换

偏微分方程(1)具有非常强的非线性, 本文寻求如下形式的相似解:

$$u(x, t) = u(\eta), \eta = Cx^\alpha t^\beta, \quad (3)$$

其中  $C, \alpha$  和  $\beta$  为待定常数.

将上式带入方程  $u_t = (k(u) | u_x |^{N-1} u_x)_x$ , 经过计算选取  $C = 1, \alpha = 1, \beta = -(N+1)$ , 则将方程(1)简化为

$$((N+1)k(u(\eta)) | u'(\eta) |^{N-1} u'(\eta))' = -\eta u'(\eta); \quad (4)$$

相应的条件(2)化为

$$u(0) = 1, u(+\infty) = 0, \quad (5a)$$

$$u(-\infty) = 1, u(+\infty) = 0. \quad (5b)$$

显然可见, 如果函数  $u(x, t) = u(\eta)$  是问题(1)在条件(2)下的一个相似解, 那么  $u(\eta)$  即为方程(4)在条件(5)下的一个解, 反之亦然.

下面集中研究方程(4)在边界条件(5a), (5b)下的解.

令  $\eta = \eta(u)$  是方程的解函数  $u = u(\eta)$  的反函数, 其中  $u > 0$ ; 由  $\eta'(u) = \frac{1}{u'(\eta)}$  得

\* 国家自然科学基金(批准号 50476083)资助的课题.

† E-mail: liancunzheng@sina.com

$k(u) \chi - |\eta'(u)|^{-N} = k(u) |u'(\eta)|^{N-1} u'(\eta)$ ,  
 方程(4)化为

$$((N+1)k(u) |\eta'(u)|^{-N})' = -\chi(u). \quad (6)$$

对方程(6)两边从0到u积分得

$$-\eta'(u) = ((N+1)k(u))^{1/N} \left( \int_0^u \chi(s) ds \right)^{-1/N}. \quad (7)$$

令

$$g(z) = \int_0^z \chi(s) ds, \quad g(z) > 0,$$

方程(7)化为椭圆型微分方程

$$-g''(z) = ((N+1)k(z))^{1/N} (g(z))^{-1/N}, \quad (8)$$

相应的初、边值条件为

$$g(0) = 0, \quad g'(1) = 0, \quad (9a)$$

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 0. \quad (9b)$$

从上面的推导过程可知,我们仅需研究问题(8)(9)的正解.

### 3. 椭圆方程(8)的解及讨论

#### 3.1. Adomian 拆分法

Adomian 拆分法<sup>[14,15]</sup>又称逆算符法,是 Adomian 提出的求解线性、非线性数学物理方程近似解的一种数学方法,可给出方程的高精度逼近解析解甚至精确解. 对处理强非线性问题既不需要借助线性、摄动、迭代或简化模型方程等途径,也不需要数值方法. 分解法的基本思想主要有三点:1)将一个真解分解为若干个解分量之和,设法分别求出各阶解分量,然后让这些解分量之和以任意所需的高精度逼近真值. 2)将整个方程恰当地分解为若干部分. 主要按照算符分解为线性、非线性、确定及随机性各部分,原则上可以任意地分解;但在分解中存在一定技巧,如所选的确定项线性算符是可逆的,则易于求得该线性算符相应方程的部分解,然后利用已知初值或边值条件,从中设法找出方程中的其余部分解之间的关系. 最主要的是使其中高阶解分量只取决于低阶解分量,以便可由低阶解分量按一定规则推出任意高阶解分量. 3)对非线性方程中最要害的非线性项提出巧妙的方法,产生一个与之等价的多项式,用一个特殊的有规律可求的多项式替代非线性函数,即 Adomian 多项式,该多项式只由前面低阶的解分量及非线性函数来共同确定.

#### 3.2. 方程(8)的拆分求解

利用 Adomian 拆分法求得方程的解,其关键在于求得  $g'(0)$  的值,这样才能得到迭代式来逼近函数的近似值. 首先以  $k(z) = z$  为例来给出求解过程. 对于方程(8)应用 Adomian 分解法,得到

$$Lg(z) = -((N+1)z)^{1/N} (g(z))^{-1/N}, \quad (10)$$

这里微分算子  $L = \frac{d^2}{dz^2}$ . 逆算子  $L^{-1}$  定义为  $L^{-1} =$

$$\int_0^z \int_0^z (\cdot) dz dz.$$

则  $L^{-1} Lg(z) = g(z) - g(0) - g'(0)z = -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} (g(z))^{-1/N}$ . 由已知  $g(0) = 0$ , 令  $g'(0) = \alpha$ , 则

$$g(z) - \alpha z = -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} (g(z))^{-1/N}. \quad (11)$$

由 Adomian 分解法,把(11)式的解  $g(z)$  设为如下形式:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z). \quad (12)$$

定义一个由无限多项式级数组成的非线性泛函  $F(g(z))$ :

$$F(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (13)$$

将(12)(13)式代入(11)式得

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) = \alpha z - L^{-1}((N+1)z)^{1/N} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (14)$$

于是

$$\begin{aligned} g_0 &= \alpha z, \\ g_1 &= -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} A_0, \\ g_2 &= -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} A_1, \\ g_3 &= -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} A_2, \\ &\dots \\ g_n &= -L^{-1}((N+1)z)^{1/N} A_{n-1} \dots \end{aligned}$$

其中  $A_n$  的迭代公式为

$$\begin{aligned} A_0 &= f(g_0), \\ A_1 &= g_1 \left( \frac{d}{dg_0} \right) f(g_0), \\ A_2 &= g_2 \left( \frac{d}{dg_0} \right) f(g_0) + (g_1^2/2!) \left( \frac{d^2}{dg_0^2} \right) f(g_0), \\ A_3 &= g_3 \left( \frac{d}{dg_0} \right) f(g_0) + (g_1 g_2) \left( \frac{d^2}{dg_0^2} \right) f(g_0) \\ &\quad + (g_1^3/3!) \chi \left( \frac{d^3}{dg_0^3} \right) f(g_0), \end{aligned}$$

$$A_4 = g_4 \left( \frac{d}{dg_0} \right) f(g_0) + (g_1 g_3 + g_2^2/2) \left( \frac{d^2}{dg_0^2} \right) f(g_0) + (g_1^2 g_2/2) \left( \frac{d^3}{dg_0^3} \right) f(g_0) + g_1^4/4! \left( \frac{d^4}{dg_0^4} \right) f(g_0) \dots$$

这里  $f(g) = 1/g^{1/N}$ .

1)考虑当  $k(z) = z$  时,根据 Adomian 拆分法可得

$$A_0 = (\alpha z)^{-1/N},$$

$$A_1 = \frac{\beta z^{1-\frac{1}{N}}}{2N\alpha^{1+\frac{2}{N}}},$$

$$A_2 = \frac{\beta^2 z^{2-\frac{1}{N}}}{24N^2\alpha^{\frac{3}{N}+2}}(3N+5),$$

$$A_3 = -\frac{\beta^3 z^{3-\frac{1}{N}}}{288N^3\alpha^{\frac{4}{N}+3}}(12N^3+33N+23),$$

$$A_4 = -\frac{\beta^4 z^{4-\frac{1}{N}}}{5760N^4\alpha^{\frac{5}{N}+4}}(180N^3+492N^2+493N+183),$$

其中  $\beta = -(N+1)^{\frac{1}{N}}$ ,  $\alpha = g'(0)$  对应有

$$g_0 = \alpha z,$$

$$g_1 = \frac{\beta z^2}{2\alpha^{\frac{1}{N}}},$$

$$g_2 = -\frac{\beta^2 z^3}{12N\alpha^{\frac{2}{N}+1}},$$

$$g_3 = \frac{\beta^3 z^4}{288N^2\alpha^{\frac{3}{N}+2}}(3N+5),$$

$$g_4 = -\frac{\beta^4 z^5}{5760N^3\alpha^{\frac{4}{N}+3}}(12N^2+33N+23),$$

$$g_5 = \frac{\beta^5 z^6(180N^3+492N^2+493N+183)}{172800N^4\alpha^{\frac{5}{N}+4}}.$$

取级数  $g_n$  的前 5 项得到

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 = \alpha z + \frac{\beta z^2}{2\alpha^{\frac{1}{N}}} - \frac{\beta^2 z^3}{12N\alpha^{\frac{2}{N}+1}} + \frac{\beta^3 z^4}{288N^2\alpha^{\frac{3}{N}+2}}(3N+5) - \frac{\beta^4 z^5}{5760N^3\alpha^{\frac{4}{N}+3}}(12N^2+33N+23) + \frac{\beta^5 z^6(180N^3+492N^2+493N+183)}{172800N^4\alpha^{\frac{5}{N}+4}}.$$

方程在边值条件(9a)下得

当  $N = 0.1$  时,  $\alpha = 1.2210$ ; 当  $N = 0.05$  时,  $\alpha =$

1.1351;

当  $N = 1$  时,  $\alpha = 1.6133$ ; 当  $N = 2.5$  时,  $\alpha =$

1.5534;

当  $N = 10$  时,  $\alpha = 1.2784$ ; 当  $N = 100$  时,  $\alpha = 1.0500$ .

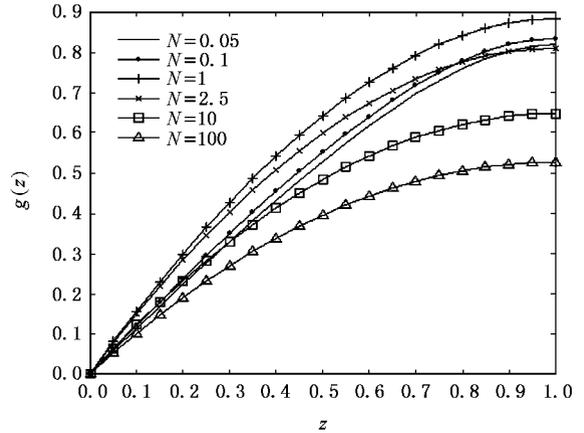


图1 温度函数分布 ( $g(0)=0, g'(1)=0, N=0.05, 0.1, 1, 2.5, 10, 100$ )

描绘解的分布如图 1. 由图 1 可知温度分布函数  $g(z)$  在  $N < 1$  的情况下,随着  $N$  的增大,温度增大,但当  $N > 1$  时,温度反而随着  $N$  的增大而降低.

方程在边值条件(9b)下得

当  $N = 1$  时,  $\alpha = 1.2052$ ; 当  $N = 2.5$  时,  $\alpha = 0.9860$ ;

当  $N = 5$  时,  $\alpha = 0.8162$ ; 当  $N = 10$  时,  $\alpha = 0.6911$ ;

当  $N = 100$  时,  $\alpha = 0.5295$ .

描绘解的分布如图 2. 由图 2 可知当  $N > 1$  时,温度分布函数  $g(z)$  随着  $N$  的增大,温度分布下降.

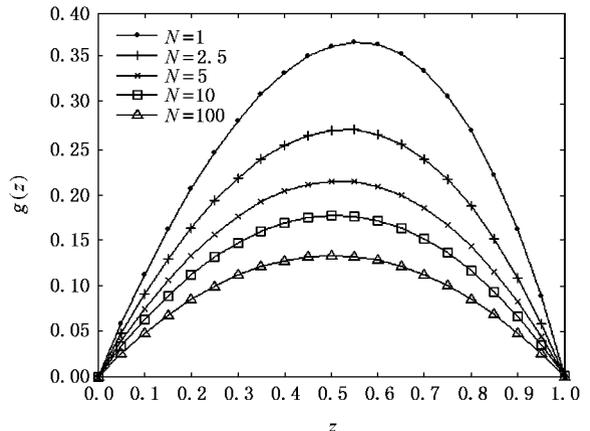


图2 温度函数分布( $g(0)=0, g(1)=0, N=1, 2.5, 5, 10, 100$ )

2)类似地,已知幂律  $N$ ,对  $k(z)$  的变化来讨论方程的解.

当取  $N = 0.5, k(z) = z$  时,有

$$g(z) = \alpha z - \frac{9z^2}{8\alpha^2} - \frac{27z^3}{32\alpha^5} - \frac{1053z^5}{1024\alpha^8} - \frac{12393z^5}{8192\alpha^{11}} - \frac{50301z^6}{16384\alpha^{14}}.$$

这时在条件(9a),(9b)下所求得的  $\alpha$  值分别为 1.5276, 1.2786.

当取  $N = 0.5, k(z) = z^2$  时,有

$$g(z) = \alpha z - \frac{3z^4}{16\alpha^2} - \frac{9z^7}{448\alpha^5} - \frac{261z^{10}}{71680\alpha^8} - \frac{27z^{13}}{33280\alpha^{11}} - \frac{8693001z^{16}}{33397145600\alpha^{14}},$$

这时在条件(9a)(9b)(8c)下所求得的  $\alpha$  值分别为 0.9846, 0.6897, 1.1501.

当取  $N = 0.5, k(z) = z^3$  时,有

$$g(z) = \alpha z - \frac{3z^6}{40\alpha^2} - \frac{27z^{11}}{8800\alpha^5} - \frac{243z^{16}}{1126400\alpha^8} - \frac{5913z^{21}}{315392000\alpha^{11}} - \frac{5357421z^{26}}{225505280000\alpha^{14}}.$$

这时在条件(9a)(9b)下所求得的  $\alpha$  值分别为 0.8090, 0.5053. 描绘出当  $N = 0.5$  时在条件(9a),(9b)下的图像分别为图3和图4.

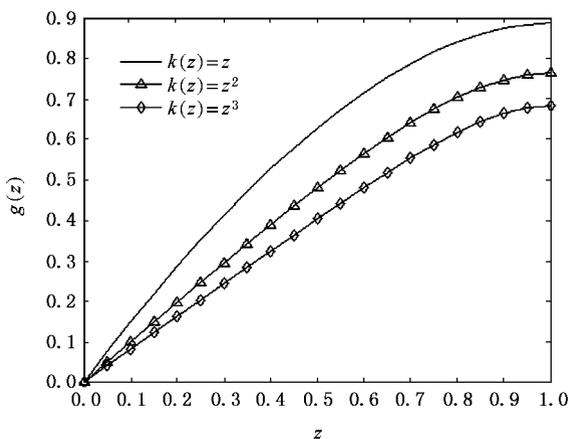


图3 温度函数分布( $N = 0.5, g(0) = 0, g'(1) = 0, k(z) = z, z^2, z^3$ )

当取  $N = 1, k(z) = z$  时,有

$$g(z) = \alpha z - \frac{z^2}{\alpha} - \frac{z^3}{3\alpha^3} - \frac{2z^4}{9\alpha^5} - \frac{17z^5}{90\alpha^7} - \frac{337z^6}{1350\alpha^9}.$$

这时在条件(9a),(9b)下所求得的  $\alpha$  值分别为 1.6130, 1.2052.

当取  $N = 1, k(z) = z^2$  时,有

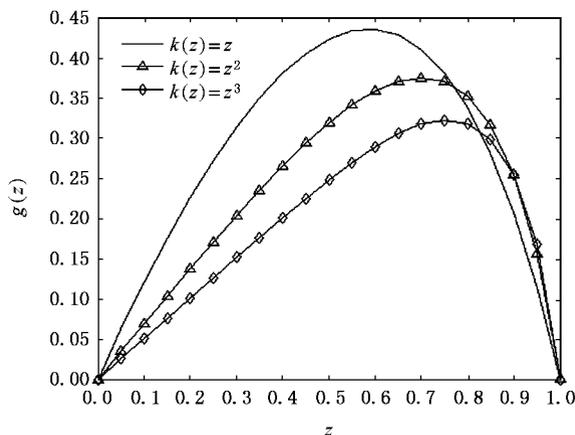


图4 温度函数分布( $N = 0.5, g(0) = 0, g(1) = 0, k(z) = z, z^2, z^3$ )

$$g(z) = \alpha z - \frac{z^3}{3\alpha} - \frac{z^5}{30\alpha^3} - \frac{13z^7}{1890\alpha^5} - \frac{25z^9}{13608\alpha^7} - \frac{14743z^{11}}{18711000\alpha^9}.$$

这时在条件(9a),(9b)下所求得的  $\alpha$  值分别为 1.0902, 0.6852.

当取  $N = 1, k(z) = z^3$  时,有

$$g(z) = \alpha z - \frac{z^4}{6\alpha} - \frac{z^7}{126\alpha^3} - \frac{z^{10}}{1260\alpha^5} - \frac{61z^{13}}{589680\alpha^7} - \frac{10879z^{16}}{495331200\alpha^9}.$$

这时在条件(9a),(9b)下所求得的  $\alpha$  值分别为 0.8706, 0.4813.

类似于  $N = 0.5$  的情况,可以得出当  $N = 1$  时在条件(9a),(9b)的图像如图5和图6.

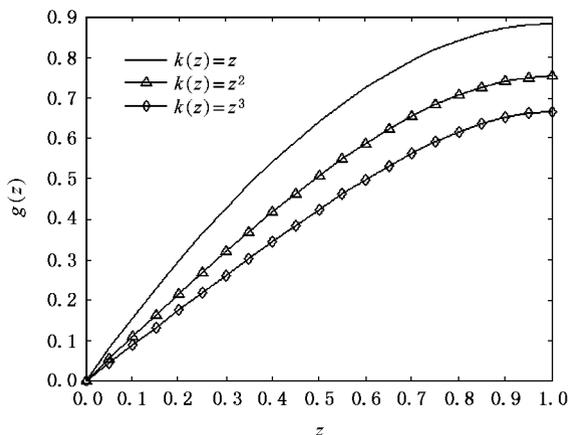


图5 温度函数分布( $N = 1, g(0) = 0, g'(1) = 0, k(z) = z, z^2, z^3$ )

由上述在相同  $N$  不同  $k(z)$  的情况下所得的图

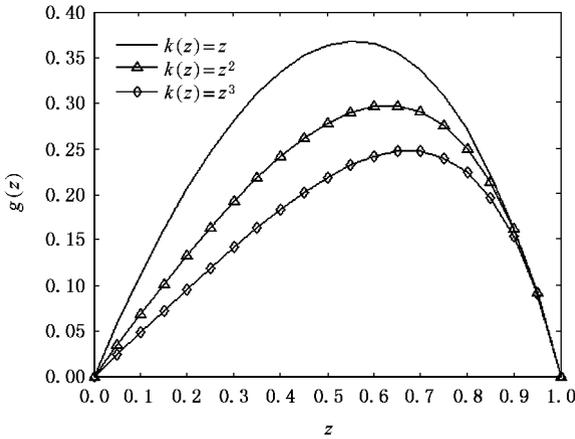


图 6 温度函数分布 ( $N = 1, g(0) = 0, g(1) = 0, k(z) = z, z^2, z^3$ )

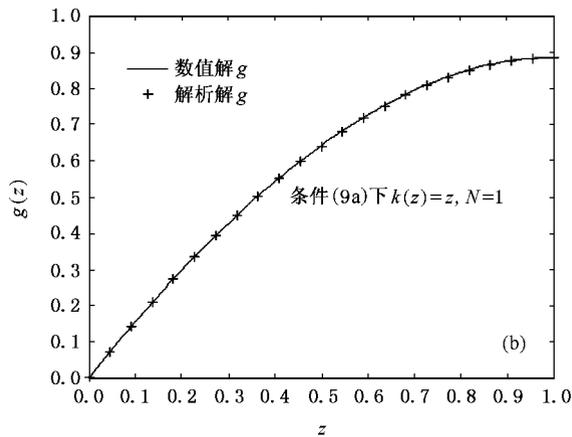
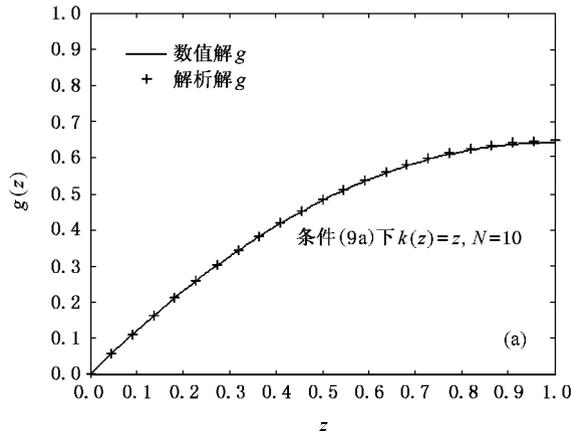


图 7 数值结果和近似结果比较 (a)  $k(z) = z, N = 1$ ; (b)  $k(z) = z, N = 10$

形可知,  $N = 0.5, N = 1$  两种情况且在 (9a) 式条件下都遵循很好的规律, 即随着  $k(z)$  的次数增大温度分布降低, 在 (9b) 式条件下温度函数在靠近 0 的区域随  $k(z)$  的次数的增加而减少, 而在靠近 1 的区域随  $k(z)$  的次数的增加而增加, 即不同的条件下的解是相交的。

图 7 和图 8 给出了数值结果和近似解结果分布曲线的比较, 可以看出数值结果和近似解结果非常符合, 证实本文所提出的解析近似方法的准确性和可靠性。

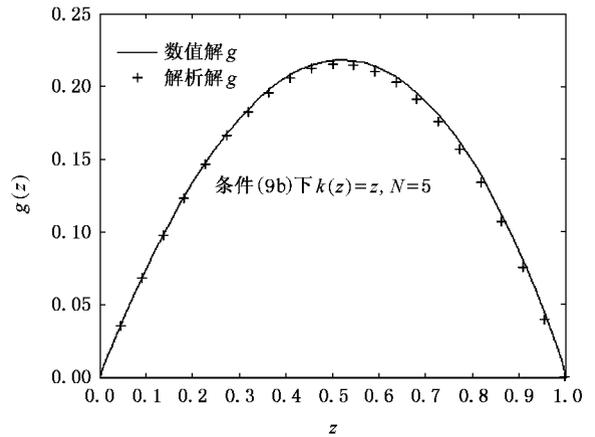


图 8 数值结果和近似结果比较

### 4. 结 论

研究了一类广义扩散方程的求解问题. 引入适当的相似变换将偏微分方程转化成一类常微分方程奇异非线性边界值问题, 利用 Adomian 拆分技巧给出了求解该类问题的一种有效的解析分解方法. 对于不同参数值, 得到了用级数形式表示的扩散方程的近似解析解及解的分布曲线. 数值结果证明, 所得到的近似解具有相当高的精度. 本文所提出的思想和方法可以用于解决其他科学和工程技术问题。

- [ 1 ] Philip J R 1961 *Austral J. Phys.* **14** 1
- [ 2 ] Bouillet J E , Gomes S M 1985 *J. Appl. Math.* **42** 395
- [ 3 ] Bouillet J E , Saravia D A , Villa L T 1980 *J. Diff. Equations* **35** 55
- [ 4 ] Wu Z Q 1985 *Nonlinear Analysis* **9** 937
- [ 5 ] Wang J Y 1990 *Nonlinear Analysis* **14** 691
- [ 6 ] Liu S K , Fu Z T , Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10 ]
- [ 7 ] Liu S D , Fu Z T , Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 ( in Chinese ) [ 刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718 ]
- [ 8 ] Zheng L C , Zhang X X , He J C 2002 *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **29** 1151
- [ 9 ] Zheng L C , Zhang X X , He J C 2003 *Int. J. Therm. Sci.* **42** 687
- [ 10 ] Zheng L C , Zhang X X , He J C 2003 *Singular nonlinear boundary value problems in transfer process* ( Beijing : Science Press ) Chapter 6-7 ( in Chinese ) [ 郑连存、张欣欣、赫翼成 2003 传输过程奇异非线性边值问题——动量、热量与质量传递方程的相似分析方法 ( 北京 : 科学出版社 ) ]
- [ 11 ] He W P , Feng G L , Dong W J , Li J P 2005 *Chin. Phys.* **14** 21
- [ 12 ] Luo Z M , Gou C J , Wolfram L 2003 *Chin. Phys.* **12** 0803
- [ 13 ] Bai J S , Zhang Z J , Li P , Zhong M 2006 *Chin. Phys.* **15** 22
- [ 14 ] Adomain G 1988 *J. Math. Anal. Appl.* **135** 501
- [ 15 ] Zheng L C , Chen X H , Zhang X X 2004 *Int. J. Appl. Mech. Eng.* **9** 795

## Approximate analytical solutions for a class of nonlinear differential equations \*

Zheng Lian-Cun<sup>1)</sup> Feng Zhi-Feng<sup>1)</sup> Zhang Xin-Xin<sup>2)</sup>

1  $\text{\textcircled{X}}$  Department of Mathematics and Mechanics , Beijing University of Science and Technology , Beijing 100083 , China )

2  $\text{\textcircled{X}}$  School of Mechanical Engineering , Beijing University of Science and Technology , Beijing 100083 , China )

( Received 15 June 2006 ; revised manuscript received 20 August 2006 )

### Abstract

This paper presents a theoretical analysis for a class of generalized diffusion equations . An effective analytical decomposition and numerical technique is given by similarity transformations and the analytical decomposition technique . The approximate analytical solution may be expressed in terms of a rapid convergent power series with elegantly computable terms . The reliability and efficiency of approximate solutions are illustrated by good agreement with numerical results .

**Keywords :** diffusion equations , nonlinear boundary value problems , analytical decomposition , approximate solution

**PACC :** 6610C , 4410 , 0365D , 4430