

## 二维约瑟夫森结阵列中的相变及噪声频谱研究<sup>\*</sup>

吴炳国 赵志刚 尤育新 刘 楣<sup>†</sup>

(东南大学物理系, 南京 210096)

(2006 年 6 月 12 日收到, 2006 年 8 月 9 日收到修改稿)

采用电阻分路(RSJ)模型,运用数值计算方法研究二维约瑟夫森结阵列的涡旋度,涡旋密度涨落随温度的变化,表明了超导阵列中存在 KTB 型相变.还研究了相变点附近的涡旋噪声频谱随温度、驱动电流变化的特性.计算结果与最近实验报导定性一致,并能用涡旋的运动图像来解释噪声频谱的变化规律.

关键词:高温超导,噪声频谱,约瑟夫森结阵列,KTB 相变

PACC: 7430E, 7450, 6120J

### 1. 引 言

超导位相涨落引起在零磁场下涡旋的 Kosterlitz Thouless Berezinski(KTB)相变<sup>[1,2]</sup>.当温度低于 KTB 相变温度  $T_{\text{KT B}}$ ,涡旋与反涡旋束缚成对,当温度高于  $T_{\text{KT B}}$ ,束缚对态被解除,自由涡旋运动产生电阻,改变了材料的输运性质.在磁场作用下仍然存在一个涡旋态变化的相变温度<sup>[3]</sup>,在相变点伴随着涡旋激发引起的输运性质变化.

为了研究高温超导薄膜和人造超导阵列中由涡旋运动引起的输运性质变化,在实验上通常进行  $I-V$  曲线和磁通运动噪声测量<sup>[3-7]</sup>.  $I-V$  特性反映磁通运动对外电场的整体响应,而用超导量子干涉仪(SQUID)测量局域内的磁通量噪声反映了涡旋密度的涨落.最近, Festin 等<sup>[3,4]</sup>对高温超导  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  (YBCO)薄膜进行了磁通噪声谱密度  $S_\phi(\omega)$  测量,发现存在一个与温度有关的特征频率  $\omega_0(T)$ .在频率大于特征频率的高频区,  $S_\phi(\omega)$  与频率无关.在频率小于特征频率的低频区,  $S_\phi(\omega)$  与频率有  $\omega^{-x}$  关系(其中  $x = 1.5, 1.75$ ).在接近电阻相变温度处,特征频率  $\omega_0(T)$  表现出随温度升高突然大幅度的增大. Rogers 等<sup>[5]</sup>实验研究了超薄  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$  (BSCCO)在超流相变附近的  $S_\phi(\omega)$  变化,发现  $S_\phi(\omega)$  与频率有  $\omega^{-1.5}$  关系. Candia 等<sup>[6]</sup>与 Shaw 等<sup>[7]</sup>实验研究了人造二维超导三角和平方阵列在超导相变温度附近的

噪声频谱.他们发现在无磁场作用下超导相变是由热激发引起的涡旋与反涡旋对解除束缚而形成的 KTB 型相变.当温度高于相变温度,  $S_\phi(\omega)$  在特征频率以下是白噪声,在特征频率以上与  $1/\omega$  成正比.

目前对超导薄膜和人造超导阵列中相变点附近磁通噪声频谱的理论研究还很少报道.本文采用二维约瑟夫森结阵列(2D JJAs)中的电阻分流结(RSJ)模型,数值模拟描述弱连接超导体涡旋运动的动力学方程组,研究 2D JJAs 中的涡旋在热激发,及电流驱动情况下引起的涡旋相变性质.计算热激发以及电流驱动情况下 JJAs 中产生的涡旋度( $N_e$ )及涡旋密度涨落( $\delta N$ ),涡旋运动噪声频谱  $S_v(\omega)$  的变化行为.得到以下重要的结果.1)由  $N_e$  与  $(\delta N)^2$  的突变表明超导阵列中确实存在着热激发的 KTB 型相变.涡旋相变温度  $T_{\text{KT B}}$  不因有无外加电流而改变.2)温度在  $T_{\text{KT B}}$  以上和  $T_{\text{KT B}}$  下的  $S_v(\omega)$  图像,以及噪声强度随温度的变化都表现了完全不同的规律,因此实验上可以通过测量  $S_v(\omega)$  图像随温度的变化求出涡旋运动的 KTB 型相变温度  $T_{\text{KT B}}$ .3)  $T_{\text{KT B}}$  以上的频谱图像中存在一个分频谱为两部分的特征频率  $\omega_0(T)$ .低频  $\omega < \omega_0(T)$  时,  $S_v(\omega)$  表现了自由涡旋运动的特征,是白噪声.高频  $\omega > \omega_0(T)$  时,表现为涡旋对的频谱特征,即随频率的变化关系为指数下降  $S_v(\omega) \propto \omega^{-1.5}$ .4) 涡旋运动噪声频谱  $S_v(\omega)$  随电流的变化有类似的关系.其特征频率  $\omega_0(T, I)$  不

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10574021)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: mlui@seu.edu.cn

但是温度的函数,也是磁场<sup>[3]</sup>和驱动电流的函数.我们得到的结果与以上实验报道相一致<sup>[3-7]</sup>.并能很好地解释超导阵列和薄膜中的涡旋运动相变及在相变点附近的涨落和耗散性质<sup>[8,9]</sup>.

## 2. 模型和方程

高温超导薄膜是弱连接超导体,可以采用 2D JJAs 模型研究磁通运动性质.在图 1 中,由超导格点(图中阴影部分表示)在二维空间中排列成  $N(N = N_x \times N_y = 19 \times 19)$  个正方形格子,相邻两格点在  $X$  和  $Y$  方向都由约瑟夫森结连接.磁场的方向垂直于阵列面.在没有位置无序的情况下,晶格常数在两个方向上是相同的.外加偏置电流沿  $Y$  方向由阵列的首行流入,末行流出.在  $X$  方向上使用周期性边界条件,而  $Y$  方向上使用自由边界条件.一般情况下格点之间的结面积很小,故格点间电容可忽略不计.

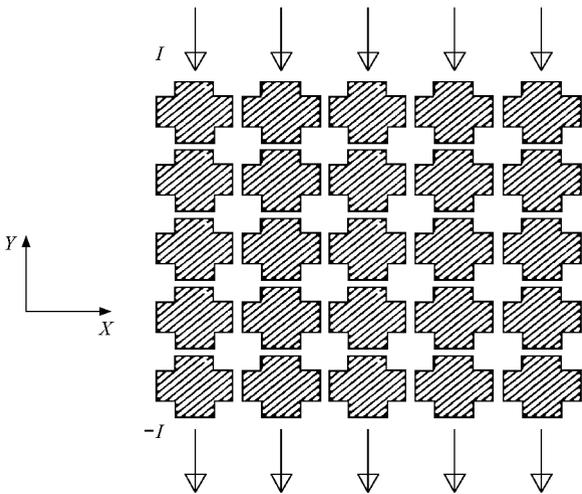


图 1 约瑟夫森结阵列模型图

我们用电阻分流约瑟夫森结(RSJ)方法表示通过格点  $i$  和  $j$  之间结电流  $I_{ij}$  为<sup>[10]</sup>

$$I_{ij} = V_{ij}/R_{ij} + I_{c,ij} \sin(\theta_{ij}^A) + I_{L,ij} \quad (1)$$

以上公式中右边第一项为通过结电阻为  $R_{ij}$  的正常电流,第二项为约瑟夫森结电流, $I_{c,ij}$  是结的临界电流, $\theta_{ij}^A$  表示  $i$  和  $j$  超导格点的相位差  $\theta_{ij}^A = \theta_i - \theta_j - A_{ij}$ ,其中  $A_{ij} = (2\pi/\phi_0) \int_i^j A \cdot dl$  表示由于磁场作用而产生的矢量势( $\phi_0 = hc/2e$  表示磁通量子).第三项  $I_{L,ij}$  是为模拟  $i$  和  $j$  间热噪声效应的朗之万噪声电流<sup>[11]</sup>.

$$I_{L,ij} = I_{th}(T) \sum_k \delta(t - t_k) \gamma(t_k) \Theta(p - q_k), \quad (2)$$

$I_{th}(T)$  代表热涨落电流的强度,它正比于温度  $T$  值. $\gamma(t_k)$  是具有平均值为 0、宽度为 1 的高斯分布随机数, $t_k$  表示第  $k$  个时间步长. $p$  是控制噪声在给定磁通上的概率, $q_k$  是第  $k$  步的随机数. $\Theta(x)$  是单位阶梯函数.由 JJAs 中的每个超导格点电流守恒定律得到  $\theta_i$  的运动方程为

$$\frac{1}{R_{ij}} \sum_j \frac{d}{dt} (\theta_i - \theta_j) = \frac{2e}{\hbar} \left\{ I_i - \sum_j I_{c,ij} \sin(\theta_i - \theta_j - A_{ij}) - \sum_j I_{L,ij} \right\}, \quad (3)$$

这里  $\sum_j$  表示对  $i$  最近邻结点  $j$  求和, $I_i$  是外加偏置电流,首行  $I_i = I$  末行  $I_i = -I$  其他格点  $I_i = 0$ .在朗道规范场中矢量势

$$A_{ij} = -\frac{2\pi H}{\phi_0} \frac{(r_{xj} + r_{xi})(r_{yj} - r_{yi})}{2}, \quad (4)$$

$H$  为外加磁场.考虑  $\sum_j A_{ij} = 2\pi \frac{Ha^2}{\phi_0} = 2\pi f$ , 由此可以看出  $f$  就是被磁通量子  $\phi_0$  规格化的磁通个数.考虑阵列中每一个点的临界电流都是相同的,磁场作用可以通过  $f$  来反映.我们采用四阶龙格-库塔算法模拟磁通位相运动方程组(3).取总的时间步  $T = 141072\tau_0$ ,时间间隔  $\Delta t = 0.05\tau_0$ ,并且去掉前  $10000\tau_0$  个时间步达到系综平衡.时间单位  $\tau_0 = \hbar/(2eRI_c)$ ,频率单位  $\omega_0 = 1/\tau_0$ ,温度单位  $T_0 = \hbar I_c/(2ek_B)$  都采用自然单位.为了研究磁通涡旋变化,我们定义激发产生的涡旋度为  $N_e$ ,

$$N_e = \frac{1}{(N-1)^2} \sum_r |n(r,t) - \bar{n}|, \quad (5)$$

其中  $r$  为 4 个结所围的空间位置,在图 1 中用空白的小方块表示. $\sum$  表示对所有  $r$  位置求和, $\bar{n}$  为对时间求平均值.在  $r$  位置  $t$  时刻的涡旋  $n(r,t) = -\sum_r n \sin(\theta_{ij}^A/2\pi)$ ,  $n \sin(F)$  表示最接近参数  $F$  的整数,  $\sum_r$  表示围绕  $r$  空位 4 个最近邻格点  $i$  和  $j$  之间位相求和,即表示沿  $r$  处的方形空位 4 个边界求和. $n(r,t)$  的值取  $+1, -1$  分别对应于一个正涡旋和一个负涡旋,而当取 0 时,表示该处的正负涡旋相抵消.定义  $t$  时刻的涡旋度和涡旋密度涨落  $(\delta N)^2$  为

$$N(t) = \frac{1}{(N-1)^2} \sum_r n(r,t), \quad (6)$$

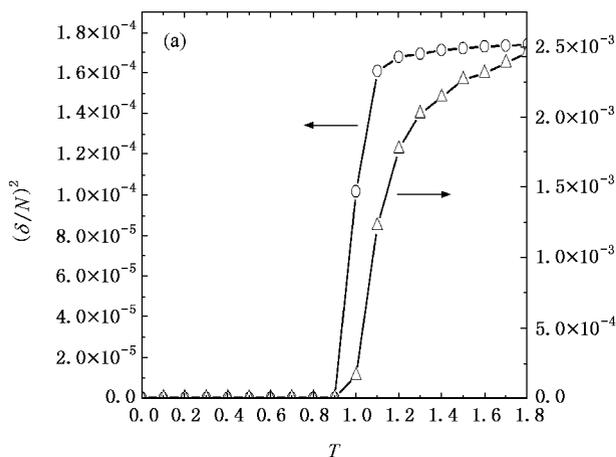
$$(\delta N)^2 = N(t)^2 - \overline{N(t)^2} \quad (7)$$

最后定义涡旋度噪声的谱密度  $S_V(\omega)$  为  $N(t)$  的傅里叶展开

$$S_V(\omega) = \frac{1}{T} \left| \int_0^T dt N(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \quad (8)$$

### 3. 结果和讨论

首先,我们计算有序 2D JJAs 阵列在无外加电流和磁场情况下的涡旋度  $N_e$  以及涡旋密度涨落  $(\delta N)^2$  随温度  $T$  的变化,表示在图 2(a) 中. 我们把  $N_e$  从无增加到  $5 \times 10^{-6}$  对应的温度作为相变温度,得到  $T_{\text{KTB}} = 0.95$ . 在  $T < T_{\text{KTB}}$  时涡旋被钉扎,  $N_e$  和  $(\delta N)^2$  保持为零. 而当温度升高到  $T > T_{\text{KTB}}$  时,  $N_e$  开



始增大  $(\delta N)^2$  跃变到极大,这一现象与 KTB 相变的特征一致. 根据 KTB 相变理论,在二维体系会产生一些拓扑型激发,即涡旋和反涡旋对. 温度升高热涨落作用大于涡旋之间相互作用,故而涡旋对解体产生运动,在相变温度涡旋度  $N_e$  及其涨落发生突变. 图 2(b) 表示在低频区不同频率  $\omega = 5, 35$  和  $50$  时,噪声强度  $S_V(\omega)$  随温度  $T$  的变化. 我们可以看到,低频区的三种频率对应的  $S_V(\omega)$  在  $T_{\text{KTB}}$  处都出现了极大值,表示在涡旋运动起始温度处低频噪声强度最大,涨落最强. 这一现象与文献 [12] 中对 YBCO 超导圆盘的磁通噪声实验测量得到的结果相一致. 另外从图中可以看出噪声强度随频率的增大而下降.

在确定  $T_{\text{KTB}}$  以后,我们进一步计算了在相变温

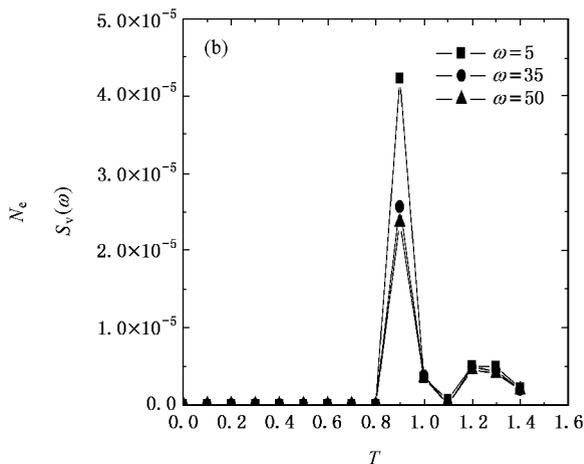


图 2 (a)  $N_e$  和  $(\delta N)^2$  与温度  $T$  的关系 (b) 不同频率的噪声强度与温度  $T$  的关系

度附近涡旋运动噪声谱密度  $S_V(\omega)$  随温度的变化表示在图 3 中. 我们发现  $S_V(\omega)$  总是随着频率的增大而降低,但不同的温度下  $S_V(\omega)$  下降的趋势和规律并不相同. 温度在  $T_{\text{KTB}}$  以下的噪声频谱表示在图 3(a) 中. 可以看出温度从 0.8 上升到 0.89 时,  $S_V(\omega)$  的值随温度的升高而增大. 在低频区域  $S_V(\omega)$  随  $\omega$  增大而减小. 在高频区域  $S_V(\omega)$  的值虽然涨落很大,但两条曲线随  $\omega$  增大而减小的渐近形式按  $\omega^{-x}$  衰减,衰减的斜率趋向相变温度时的斜率  $x = 1.50$ . 温度在  $T_{\text{KTB}}$  以上的噪声频谱表示在图 3(b) 中. 在相变温度 0.95 时  $S_V(\omega)$  曲线随  $\omega$  增大而减小,下降的形式为  $S_V(\omega) \propto \omega^{-1.5}$ . 温度增大到 1.3 和 1.5 时,  $S_V(\omega)$  随  $\omega$  的变化与 (a) 图情况完全不同. 首先,随着温度的升高  $S_V(\omega)$  的强度呈下降的趋势. 另外,

在温度升高为 1.3 和 1.5 时,  $S_V(\omega)$  频谱中明显存在一特征频率  $\omega_0(T)$  分频谱成为两个部分. 当频率低于  $\omega_0(T)$  时,  $S_V(\omega)$  与频率无关,表现为白噪声;而当频率大于  $\omega_0(T)$  时,  $S_V(\omega) \propto \omega^{-1.5}$  形式衰减. 同时还可以看出特征频率  $\omega_0(T)$  有明显的温度关系. 随温度的升高,特征频率  $\omega_0(T)$  也随着升高,使白噪声的频率范围变的更宽. 在温度下降到接近相变温度时,特征频率  $\omega_0(T)$  几乎下降为零. 因此可以由特征频率  $\omega_0(T)$  下降为零的特征判断发生相变的温度.

我们对于涡旋运动噪声频谱特性的分析如下: 由扩散方程知道噪声频谱的低频响应来自能延伸到较大尺寸的信号贡献,高频响应则与较小尺寸信号有关. 涡旋对具有短相干长度,自由涡旋运动具有大

的相干长度 因此频谱  $S_V(\omega)$  中低频行为来自自由涡旋运动, 而频谱中高频行为来自涡旋对的运动. 图 3(a) 中  $T_{KTB}$  以下时系统中无自由涡旋, 涡旋对的运动起主导作用. 涡旋对的  $S_V(\omega)$  随  $\omega$  增大呈  $\omega^{-x}$  减小, 在接近相变温度时,  $x = 1.5$ . 而且涡旋对的运动随着温度升高而加快, 出现噪声强度随温度升高而增大. 图 3(b) 中温度在  $T_{KTB}$  以上时系统中出现自由

涡旋和涡旋对的混合, 其中自由涡旋运动决定频谱中的低频响应行为, 而涡旋对运动决定频谱中的高频响应. 由于自由涡旋之间是互不关联的整体, 则对应于  $S_V(\omega)$  的低频区出现白噪声. 由于温度升高自由涡旋密度增大, 白噪声范围变大, 所以特征频率  $\omega_0(T)$  也随温度升高而增大. 同时自由涡旋运动随温度的升高而趋于平稳, 使得噪声强度减小.

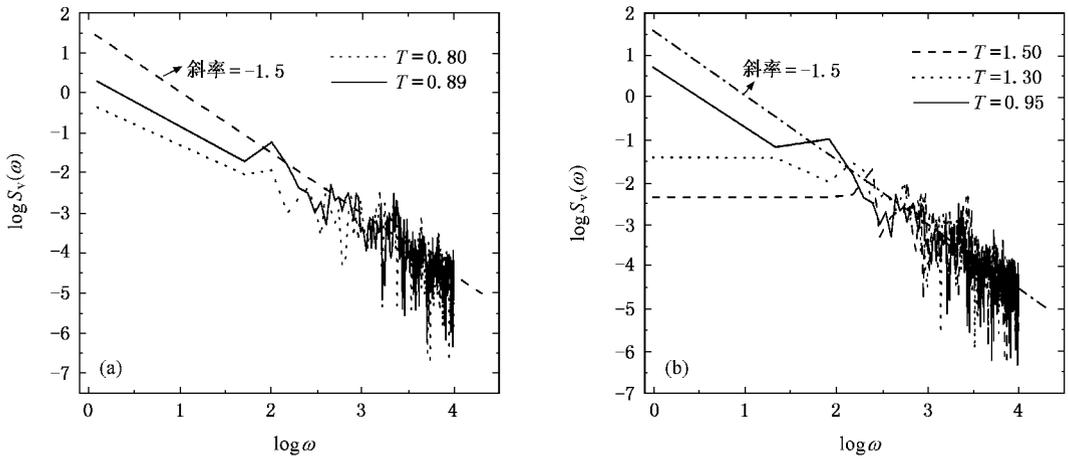


图 3 不同温度的涡旋噪声谱  $S_V(\omega)$  (a)  $T < T_{KTB}$  (b)  $T > T_{KTB}$

最后, 我们还计算了在外加驱动电流  $I$  作用下 JJAs 在温度分别为 0.1, 0.9 和 1.0 时的  $N_c - I$  曲线, 表示在图 4(a) 中. 插图中表示的是对应的  $\log N_c - \log I$  曲线. 首先从图中可以看到在低温  $T = 0.1$  时, 在驱动电流增加到  $I_c = 0.8$  时也能使涡旋对解体, 涡旋运动产生电阻. 当  $T = 0.9$ ,  $N_c$  发生变化的临界电流是很小的值, 几乎为零. 当温度增大到  $T = 1.0$  时, 即使不加电流, 涡旋对已在热运动的作用下解体,

$N_c$  有了一定数值. 由插图更清楚可见, 当温度在  $T = 0.9$  升高到  $T = 1.0$  范围中,  $\log N_c - \log I$  曲线的变化由原先的非线性增大变为后来的接近线性形式, 预示着 KTB 相变存在于这一温度范围内, 与图 2 表示的无电流时 KTB 型相变温度  $T_{KTB} = 0.95$  是符合的. 由此我们可以得出这样的结论: 驱动电流的动力学作用和温度的热效应都能增大超导阵列中的涡旋密度, 使涡旋运动, 它们的 KTB 型相变温度大致

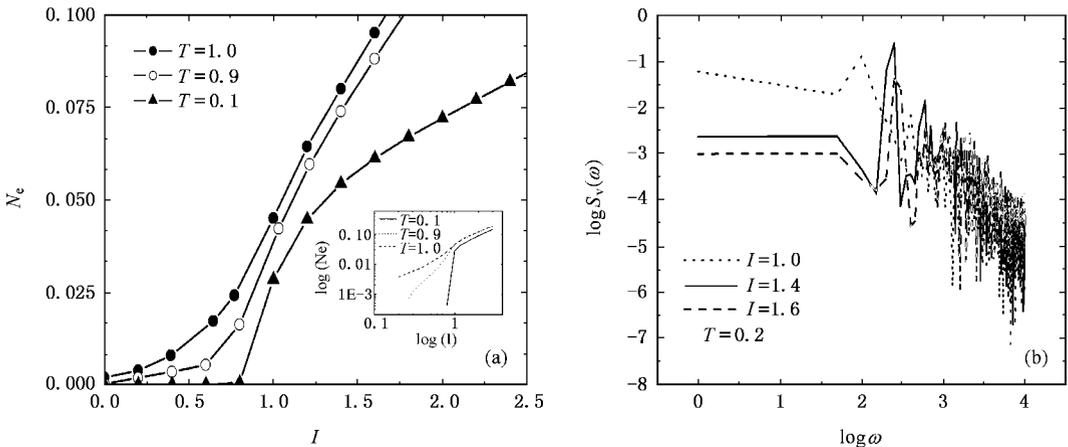


图 4 (a) 不同温度下  $N_c - I$  变化曲线 (b) 温度  $T = 0.2$  时不同电流作用下的  $S_V(\omega)$

相同. 这一结论与文献 [3] 中报道的外加磁场对涡旋运动的影响相一致.

我们还计算了低温 ( $T = 0.2$ ) 时不同电流作用下的  $S_V(\omega)$  变化, 如图 4(b) 所示. 随着电流从  $I = 1.0, 1.4$  增大到  $1.6$ ,  $S_V(\omega)$  与图 3(b) 中随温度变化的噪声频谱是一致的, 也存在特征频率  $\omega_0(T, I, f)$  分  $S_V(\omega)$  为白噪声和指数下降的两部分. 随着电流增大,  $\omega_0(T, I, f)$  增大, 低频白噪声范围增大, 同时  $S_V(\omega)$  强度减小. 这是因为电流使自由涡旋密度的增加增大了低频白噪声范围, 同时电流使涡旋运动逐渐趋于平稳, 降低噪声强度.

## 4. 结 论

我们计算了 2D JJAs 中磁通涡旋度  $N_e$ , 涡旋密度涨落  $(\delta N)^2$  随温度  $T$  的变化以及在相变温度附近的涡旋运动噪声频谱  $S_V(\omega)$  随温度、驱动电流的变化. 计算结果表明在无外加驱动电流时, 由涡旋度

$N_e$  以及涡旋密度涨落  $(\delta N)^2$  随温度升高到一定时会出现突变, 表明超导阵列中的相变是 KTB 型, 并由此可以确定了相变温度  $T_{\text{KTB}}$ . 由  $T_{\text{KTB}}$  附近涡旋运动噪声频谱  $S_V(\omega)$  随温度的变化图像表明, 低于  $T_{\text{KTB}}$  时  $S_V(\omega)$  表现了短相干长度涡旋对的噪声频谱特征, 即随频率增大而减小, 噪声强度随温度上升而增大. 在相变温度的频谱曲线为  $S_V(\omega) \propto \omega^{-1.5}$ . 温度高于  $T_{\text{KTB}}$  时的频谱以一特征频率  $\omega_0(T)$  为分界点. 高于  $\omega_0(T)$  的高频区频谱有  $S_V(\omega) \propto \omega^{-1.5}$  形式, 低于  $\omega_0(T)$  的低频区,  $S_V(\omega)$  为与频率无关的白噪声. 同时  $\omega_0(T)$  是温度的函数, 随温度升高而增大. 我们还计算了  $N_e$ 、不同频率的噪声强度与外加驱动电流的关系, 发现有电流驱动时与热力学驱动同样存在 KTB 相变, KTB 型相变温度基本不变. 特征频率  $\omega_0(T, I, f)$  不但是温度的函数, 也是驱动电流和外磁场<sup>[3]</sup>的函数. 这些计算结果很好地符合了实验上的测量结果并能反映超导材料中的涡旋运动的特性.

- [1] Kosterlitz J M, Thouless D J 1972 *J. Phys.* C **5** L124  
 [2] Kim B J, Minnhagen P 1999 *Phys. Rev.* B **60** 6834  
 [3] Festin Ö, Svedlindh P, Rönning F, Winkler D 2004 *Phys. Rev.* B **70** 024511  
 [4] Festin Ö, Svedlindh P, Kim B J, Minnhagen P, Chakalov R, Ivanov Z 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5567  
 [5] Rogers C T, Myers K E 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 160  
 [6] Candia S, Leemann Ch, Mouaziz S, Martionli P 2002 *Phys.* C **369** 309  
 [7] Shaw T J, Ferrari M J, Sohn L L, Lee D H, Tinkham M, Clarke J

1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2551

- [8] Xu Z A 2006 *Physics* **35** 432 [in Chinese] 许祝安 2006 物理 **35** 432  
 [9] Wen H H 2006 *Physics* **35** 111 [in Chinese] 闻海虎 2006 物理 **35** 111  
 [10] Hwang I J, Stroud D 1998 *Phys. Rev.* B **57** 6036  
 [11] Liu M, He Y W, Wu W J, Yang Y H 2005 *Phys. Rev.* B **71** 224508  
 [12] Foulds S A, Smithyman J, Cox G F, Muirhead C M 1997 *Phys. Rev.* B **55** 9098

# Phase transition and vortex noise spectrum in two-dimensional Josephson-junction array<sup>\*</sup>

Wu Bing-Guo Zhao Zhi-Gang You Yu-Xin Liu Mei

( *Department of Physics , Southeast University , Nanjing 210096 , China* )

( Received 12 June 2006 ; revised manuscript received 9 August 2006 )

## Abstract

Using the resistively shunted junction (RSJ) model we calculate the temperature dependence of vorticities and fluctuations of vorticities in two-dimensional Josephson junction array (JJA). It is found that the phase transition is of the Berezinski-Kosterlitz-Thouless (KTB) type. We also study the temperature and driving current dependence of the noise power spectrum in the vicinity of phase transition. The calculated results are consistent with recent experimental reports, and the main characteristics of the noise power spectrum can be explained by the motion of vortices.

**Keywords** : High  $T_c$  superconductors , noise power spectrum , Josephson junction arrays , KTB phase transition

**PACC** : 7430E , 7450 , 6120J

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10574021 ).